UNIVERSITÉ AIX MARSEILLE
UFR SCIENCES
10 janvier 2014

Licence MPCI L2: Algèbre linéaire

Durée 2h

Aucun document autorisé, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1. *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On considère la matrice*

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) *Montrer que les colonnes de la matrice forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.*
(2) *En déduire que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$ on a $||RX|| = ||X||$.*
(3) *Montrer que les valeurs propres de R sont de module un.*
(4) *La matrice R est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
(5) *Trouver les valeurs propres de R.*

Exercice 2. *On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère le sous espace vectoriel E donné par le système*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$$

(1) *Trouver la dimension et une base de E.*
(2) *En déduire une base orthonormée de E.*
(3) *Montrer que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est dans $E^\perp$ si et seulement si $\begin{cases} x-z-t=0 \\ y-z+t=0 \end{cases}$*
(4) *Donner une base orthonormée de $E^\perp$.*
(5) *Soit $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la projection orthogonale sur E. Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de π est diagonale.*

Exercice 3. *Résoudre en fonction des paramètres réels a, b, le système*

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Exercice 4. *On considère la matrice suivante* $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) *Montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.*
(2) *Donner un polynôme annulateur de cette matrice.*