Année universitaire 2015/2016

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☐ 1$^{\text{er}}$ semestre ☒ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h

Examen de : L3 Nom du diplôme : Licence de Mathématiques

Code du module : SMI6U5TC Libellé du module : Géométrie differentielle

Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1. *Soient $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par* $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + xy + y^2$, $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + xy$.

(1) *Montrer que $q^{-1}(1)$ est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^2$.*
(2) *L'ensemble $h^{-1}(0)$ est il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$? Est il compact ?*

Exercice 2. *Soit $\rho : I \to]0, \infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et considérons la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la courbe d'équation $x = \rho(y)$ autour de l'axe (Oy).*

(1) *Montrer que*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \rho(v)\cos(u) \\ v \\ \rho(v)\sin(u) \end{pmatrix}$$

définit une paramétrisation de cette surface.
(2) *Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. Dessiner cette surface pour $I =]-R, R[$ et $\rho(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.*
(3) *Écrire une formule intégrale pour l'aire de $f([0, 2\pi] \times]a, b[)$.*
(4) *Déterminer les coefficients de la première forme fondamentale, le champ normal de Gauss, et les coefficients de la deuxième forme fondamentale de f.*
(5) *Déterminer la courbure de Gauss, les courbures principales et la courbure moyenne de f.*

Exercice 3. *On considère la surface paramétrée suivante*

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] * [0, \pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \mapsto & f(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) \end{array}$$

Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$, on définit alors la courbe paramétrée plane

$$\begin{array}{ccc}]0, \pi/2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & c(t) = (\tan(\alpha) \ln\tan(\frac{t}{2}), t) \end{array}$$

(1) *En un point $f(\theta, \varphi)$, calculer la première forme fondamentale de la surface.*
(2) *Calculer $f \circ c(t)$ ainsi que sa dérivée.*
(3) *Calculer la longueur de la courbe $f \circ c$ (et simplifier l'expression).*
(4) *Trouver la courbure normale à cette courbe au point de paramètre t.*
(5) *Quelle propriété géométrique possède cette courbe ?*

Exercice 4. *Soit $(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée 2-régulière telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, ||\gamma'(t)|| = 1, \ \kappa_\gamma(t) = \kappa, \ \tau_\gamma(t) = \tau.$$

(1) *En désignant par (f_1, f_2, f_3) le repère mobile de Frenet de γ, écrire les équations de Frenet pour la courbe paramétrée γ.*
(2) *Fixons $\varepsilon > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma(u) + \varepsilon\cos(v) f_2(u) + \varepsilon\sin(v) f_3(u) \ .$$

La fonction f est elle injective?
(3) *En utilisant les formules de Frenet exprimer les dérivées partielles de f comme combinaisons linéaires de vecteurs du repère mobile de Frenet.*
(4) *Déterminer (en fonction du paramètre $\varepsilon > 0$) l'ensemble des points $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ où f n'est pas une immersion.*
(5) *Montrer que, pour ε suffisamment petit, f est une immersion sur $\mathbb{R}^2$.*
(6) *Quelle est l'interprétation géométrique des courbes paramétrées $\mathbb{R} \ni v \mapsto f(u_0, v)$ pour $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé ?*

Exercice 5. *On considère les deux surfaces paramétrées:*

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u\cos v, u\sin v, \ln u) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$

(1) *Calculer la première forme fondamentale pour les deux surfaces.*
(2) *Ont elles même courbure de Gauss ?*