

UNIVERSITÉ D'AIX MARSEILLE

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : **Mathématiques**

présentée par

NICOLAS BÉDARIDE

SUBSTITUTIONS ET ISOMÉTRIES PAR MORCEAUX

Mémoire soutenu le **04 novembre 2014**,

devant le jury composé de :

MARIE-CLAUDE ARNAUD-DELABRIÈRE

Professeur, Université d'Avignon

VALÉRIE BERTHÉ

Directrice de recherches, LIAFA, Paris

FABIEN DURAND

Professeur, LAMFA, Université Haute Picardie

JEAN-MARC GAMBAUDO

Directeur de recherches, Institut non linéaire de Nice

PASCAL HUBERT

Professeur, I2M, Université d'Aix Marseille

MARTIN LUSTIG

Professeur, I2M, Université d'Aix Marseille

LUCA ZAMBONI

Professeur, Institut Camille Jordan, Université Lyon I

Après avis des rapporteurs :

ANTHONY QUAS

Professeur, Université Victoria Canada

RICHARD EVAN SCHWARTZ

Professeur, Université Brown Providence

LUCA ZAMBONI

Professeur, Institut Camille Jordan, Université Lyon I

Table des matières

Présentation	5
0.1 Exemple classique	5
0.2 Description des travaux et questions	7
0.3 Plan du mémoire	9
1 Introduction	10
1.1 Combinatoire des mots	10
1.1.1 Langages, définition	10
1.1.2 Substitutions	11
1.1.3 Fractal de Rauzy	12
1.1.4 Langage substitutif	13
1.2 Isométries	14
1.2.1 Définitions	14
1.2.2 Induction	16
1.2.3 Exemples	16
1.3 Pavages et SFT	18
1.3.1 Généralités	18
1.3.2 Règles locales	19
1.3.3 Pavage substitutif	19
2 Isométries par morceaux	21
2.1 Historique	21
2.2 Billard dual	22
2.2.1 Introduction	23
2.2.2 Polygones réguliers	23
2.2.3 Polygones quasi-rationnels	27
2.2.4 Exemple	28
2.2.5 Commentaires	30
2.3 Rotations par morceaux	30
2.3.1 Introduction	31
2.3.2 Cas bijectif	32

2.3.3	Cas non bijectif	32
2.3.4	Méthode	32
2.3.5	Énoncé des résultats	33
2.3.6	Commentaires	33
2.4	Billard dans un simplexe	35
2.4.1	Introduction	35
2.4.2	Définitions	35
2.4.3	Groupe du tétraèdre	36
2.4.4	Commentaires	37
3	Pavages	38
3.1	Historique	38
3.2	Quasi-cristaux, règles locales	39
3.2.1	Notations, définitions	39
3.2.2	Motivations et résultats	40
3.2.3	Coordonnées grassmaniennes	41
3.2.4	Méthode	42
3.2.5	Commentaires	45
3.3	Substitution topologique	46
3.3.1	Définitions	46
3.3.2	Résultat	47
3.4	Exemple de substitution topologique	47
3.4.1	Commentaires	48
4	Translations du tore	51
4.1	Historique	51
4.2	Résultats	52
4.3	Partition du tore, complexité	53
4.4	Comptage et mots sturmiens	54
4.5	Commentaires	55
	Conclusion et perspectives	56
5	Bibliographie	58
6	Mes articles	64

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Anthony Quas, Richard Schwartz et Luca Zamboni qui ont accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit. Mes remerciements vont aussi à Marie-Claude Arnaud, Valérie Berthé, Fabien Durand, Jean-Marc Gambaudo, Martin Lustig qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Un remerciement spécial à Pascal Hubert qui cumule les rôles de membre du jury et celui de tuteur. Rôle qui l'a obligé à combattre quelques dragons de natures variées.

Pour moi faire des mathématiques c'est d'abord parler avec quelqu'un. Je souhaite donc remercier mes différents co-auteurs¹ : Jeff, Thomas, Arnaud, Idrissa, Pascal, Julien, Damien, Timo, Glenn, Shigeki, Yannick, Michael, Martin, Jordan, Ana. Travailler avec eux est un vrai plaisir et m'a permis de découvrir différentes façons d'appréhender les mathématiques.

Depuis quelques années j'ai aussi pu bénéficier du très bon environnement mathématique qui règne dans les différents laboratoires marseillais que j'ai fréquenté. J'ai beaucoup appris grâce aux orateurs du Teich et aux repas qui s'en suivent. Je tiens aussi à remercier les diverses personnes qui partagent mes pauses café. On ne dira jamais assez l'importance d'une bonne machine à café pour pouvoir critiquer les collègues absents voire présents.

Je n'oublie pas Séverine, Nelly, Marie Christine, Gérard qui m'ont toujours gentiment aidés à appréhender les mystères derrière les acronymes suivants : Ares, Aigle, Apogée, Amidex, Kiwi, Carambole, Jeffico ...

Enfin je tiens à remercier mes amis² et ma famille qui me supportent. Merci pour tout, infiniment. Je crois que je peux reprendre la même formule que celle de ma thèse : Il paraît que je n'ai pas un caractère facile.

Et maintenant vous pouvez regarder le tableau à nouveau.

1. à prendre suivant la définition de [45]

2. Cela n'exclut pas certaines personnes déjà citées précédemment.

Présentation

Now this is not the end. It is not even the beginning of the end. But it is, perhaps, the end of the beginning.

Sir Winston Churchill

Ce mémoire est orienté autour de deux objets principaux : les substitutions et les isométries par morceaux : Nous commençons par rappeler un exemple standard puis présentons le contenu du mémoire.

0.1 Exemple classique

Considérons l'application suivante où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{T} \\ x &\mapsto x + \varphi \end{aligned}$$

Elle peut être étudiée de différentes façons :

- Cette application est une translation minimale du tore $\mathbb{T}$: c'est à dire que tout point a une orbite dense.
- Le tore $\mathbb{T}$ a comme domaine fondamental $[0, 1)$. Cette translation définit donc un échange de deux intervalles : c'est une application bijective définie sur $[0, 1)$ et qui est une translation par morceaux. Elle est définie sur les deux intervalles $[0, 2 - \varphi)$ et $[2 - \varphi, 1)$.
- Considérons maintenant $[0, 1]^2$ vu comme un domaine fondamental du tore $\mathbb{T}^2$. Calculons l'application de premier retour sur la diagonale $x + y = 1$ du carré, du flot linéaire de pente $\frac{1}{\varphi}$: on obtient l'application précédente à conjugaison près par une homothétie.
- Il est classique que la translation sur le tore $\mathbb{T}^2$ dans une direction $\mathbf{v}$ est conjuguée au billard dans le carré dans la direction $\mathbf{v}$ via la méthode de dépliage, cf [82]. Ainsi l'étude du billard carré dans la direction de pente $\frac{1}{\varphi}$ s'obtient via l'étude de cette application.
- Codons la partition de $[0, 1)$ en les deux intervalles précédents par l'alphabet $\{a, b\}$. Ce codage conjugue ce système dynamique au sous-shift engendré par le point fixe de la substitution de Fibonacci

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}^* &\rightarrow \mathcal{A}^* \\ a &\mapsto ab \\ b &\mapsto a \end{aligned}$$

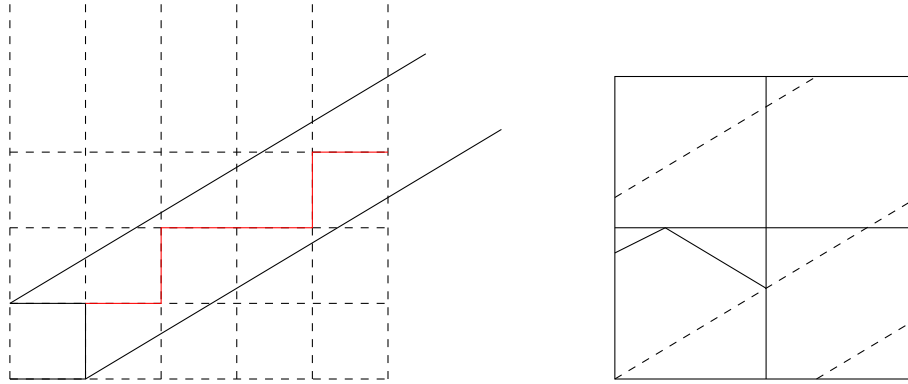


FIGURE 1 – Mot sturmien représenté comme billard dans le carré, pavage de la droite et quasicristal obtenu par coupe et projection.

Ce point fixe est appelé mot de Fibonacci. De plus l'orbite du point $x = \frac{1}{\varphi}$ sous cette translation a un codage donné par le point fixe de la substitution σ .

- On considère la matrice d'incidence de la substitution précédente, soit la matrice de l'application abélianisée : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le nombre d'or est une valeur propre de module plus grand que un. On considère le vecteur propre à droite correspondant à φ . Les coordonnées de ce vecteur définissent deux longueurs de segments. Considérons alors le pavage substitutif de la droite réelle, de facteur d'expansion φ , par deux intervalles ayant ces longueurs. L'action des translations sur ce pavage donne un système dynamique conjuguée au système étudié.
- Pour finir, considérons le carré $[0, 1]^2$ et la droite d de pente $\frac{1}{\varphi}$. On remarque alors que la ligne brisée de $\mathbb{Z}^2$ formée par l'abélianisé du mot de Fibonacci se trouve dans la bande $[0, 1]^2 + d$, voir la figure 1. De plus tout pavage de la droite obtenu précédemment se relève en une droite discrète dans cette bande. Ainsi on a obtenu un pavage par coupe et projection. C'est la façon canonique d'obtenir des quasicristaux.

Ces différents objets peuvent s'illustrer par la figure 1.

Ainsi ce système dynamique peut se voir de différentes façons :

- Une **translation** du tore.
- Une **isométrie par morceaux** : ici un échange de deux intervalles.
- Une orbite de **billard** dans le carré.
- Un **sous-shift** que l'on représente via le point fixe d'une substitution.
- Un **pavage substitutif** de la droite.
- Un **quasicristal** obtenu par coupe et projection.

0.2 Description des travaux et questions

Dans ce mémoire on étudie des objets similaires en dimension plus grande. Nous avons séparé les problèmes en trois catégories :

- Les isométries par morceaux.
- Les pavages.
- Les translations du tore.

- La première partie traite de trois problèmes liés aux isométries par morceaux : Le premier vient du billard dual que l'on étudie pour les polygones réguliers et pour les polygones quasi-rationnels. Le deuxième problème traite d'un exemple d'isométries par morceaux. Cet exemple a d'abord été traité d'un point de vue dynamique, ici nous apportons des réponses combinatoires et montrons qu'il est fortement lié au billard dual. Le dernier problème est celui d'existence d'orbites périodiques du billard dans un simplexe régulier. Signalons que ces systèmes font ressortir une dynamique proche de celle rencontrée en théorie KAM via l'existence d'îles périodiques qui persistent quand les paramètres varient peu, voir [4]. Dans ces trois systèmes dynamiques le but est de comprendre la dynamique d'isométries par morceaux en dimension supérieure ou égale à deux. Une question centrale est la description du langage, obtenu par codage de l'isométrie, en fonction de substitutions. Le but est de trouver des résultats généraux sur les isométries par morceaux. Une substitution apparaît si le système initial est conjugué à une application de premier retour sur une partie, on parle alors de renormalisation ou de système auto-induit.

Question 1. *A quelle condition sur le système dynamique peut on trouver une renormalisation ?*

Pour ce faire on s'intéresse d'abord au billard dual. L'étude des polygones réguliers permet de voir les premiers exemples de systèmes dynamiques dont le langage se décrit via des substitutions. Les premières limites de cette étude apparaissent avec le cas de l'heptagone régulier qui ne peut se traiter de la même façon. Une raison essentielle étant que le corps de nombre engendré par $\cos(2\pi/7)$ n'est pas de degré deux. En vue d'étudier le billard dual pour des polygones non réguliers nous étudions la famille des polygones quasi-rationnels et faisons le lien entre les diverses définitions. Le but de ce travail est de dégager des propriétés générales utiles dans l'étude d'autres polygones. Ensuite on s'intéresse à une autre famille d'isométries par morceaux définie à base de rotations. Cet exemple est fortement lié au billard dual de par le choix des angles étudiés et de par le lien avec des translations par morceaux. Ici encore pour certains angles une renormalisation existe mais ceci n'est pas général. Nous finissons cette partie par l'étude de trajectoires périodiques de billard dans le simplexe régulier. Cette étude est plus géométrique que les précédentes mais la notion d'isométrie par morceaux est toujours présente.

- Dans la deuxième partie nous nous intéressons aux pavages. Le premier problème concerne des pavages liés aux quasi-cristaux. Ces pavages sont obtenus par la méthode de coupe et projection. On cherche à caractériser les 2-plans de $\mathbb{R}^n$ qui par coupe et projection donnent des

pavages définis par des règles locales, c'est à dire des sous-shifts de type fini. Dans une deuxième temps on s'intéresse aux pavages substitutifs plan. On définit un nouveau procédé pour obtenir un pavage substitutif. Ce moyen permet d'obtenir des pavages substitutifs d'espaces non euclidiens comme l'espace hyperbolique. Cette partie se termine sur un exemple de tel pavage. Nous exhibons un pavage substitutif polygonal qui semble posséder les mêmes propriétés combinatoires que le pavage apériodique par le fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci.

Une question centrale sur ces sujets est la suivante : on se donne un pavage obtenu d'une manière géométrique (substitution, coupe et projection, ...) Comment décrire la combinatoire et la dynamique symbolique d'un tel pavage ? Remarquons qu'en dimension un, les notions de sous-shift de type fini et de substitutions sont bien distinctes, car l'un donne des systèmes d'entropie positive et pas l'autre. En dimension deux ceci disparaît, et il est connu depuis les travaux de Goodman Strauss qu'un pavage substitutif peut être obtenu via un pavage par règles locales, cf [42].

Question 2. *Comment donner une description combinatoire de pavages géométriques ?*

Le problème des règles locales pour les pavages obtenus par coupe et projection fait ressortir les mêmes objets que pour les isométries par morceaux. Par exemple dans la définition par substitution du pavage de Penrose, les triangles qui apparaissent sont les mêmes que ceux définis dans l'isométrie par morceaux de Goetz ou dans le billard dual autour d'un pentagone régulier. De même les plans dont les coordonnées sont des nombres quadratiques sont beaucoup plus faciles à étudier. Toutefois il est ici possible d'étudier certains plans dont les coordonnées sont dans un autre corps de nombre. Par exemple on peut obtenir des règles locales pour un plan ayant une symétrie d'ordre sept, *i.e* dont les coordonnées sont dans $\mathbb{Q}(\cos 2\pi/7)$. Le deuxième thème lié aux pavages concerne les pavages substitutifs. On montre ainsi que l'on peut paver le plan hyperbolique par un pavage substitutif. L'étude combinatoire de tels pavages est encore à faire. Pour finir on illustre la notion de substitution topologique par un exemple de pavage substitutif du plan euclidien.

- Dans la dernière partie on étudie des translations sur un tore. Le premier problème concerne les rotations du cercle. Il est lié aux quasi-cristaux via la géométrie discrète. On cherche à estimer de façon précise des quantités liées au langage de l'ensemble des suites sturmiennes. Dans une deuxième partie on s'intéresse à des translations sur un tore de dimension quelconque. On se demande quelle est la plus petite fonction de complexité d'une translation minimale suivant le domaine de définition. L'exemple le plus connu vient encore d'une substitution, c'est la substitution de Tribonacci. La thématique commune de ces travaux est :

Question 3. *Décrire la dynamique symbolique d'une rotation du tore $\mathbb{T}^n$ en fonction de la partition du tore.*

Les outils de combinatoire des mots utilisés ici sont le caractère S-adique des mots sturmiens dans un cas et les graphes de Rauzy dans l'autre. Dans le premier travail de cette partie, on

utilise le fait que l'ensemble de tous les mots sturmiens peut se décrire via un nombre fini de substitutions. Cette description permet d'obtenir des estimés détaillés sur la taille du langage du langage de l'ensemble des mots sturmiens. Le deuxième travail porte sur les translations en dimension quelconque. L'exemple classique de Tribonacci amène naturellement la question de savoir quelle est la meilleure partition pour décrire symboliquement une translation minimale. Là encore les translations liées à des substitutions semblent posséder des propriétés optimales.

0.3 Plan du mémoire

Dans le chapitre 1 on regroupe les notions utiles à la compréhension des travaux présentés : on donne un rappel des notions de combinatoire des mots, d'isométrie par morceaux et de pavages utilisés dans la suite. Les trois chapitres qui suivent rassemblent un descriptif de mes travaux. Ils sont organisés suivant la façon suivante : Une première partie situe les résultats dans la littérature puis on présente les résultats, enfin on décrit des perspectives possibles.

Dans le chapitre 2 on s'intéresse aux travaux relatifs aux isométries par morceaux. Ces travaux se découpent en trois parties : deux traitent du billard dual, et correspondent aux articles [BC11] et [Bé12]. Une s'intéresse aux rotations par morceaux, [BK13], et le dernier résultat porte sur l'existence d'orbites de billard périodiques dans un simplexe régulier [BR14].

Le chapitre 3 s'intéresse à la notion de pavage. Tout d'abord on se demande quels sont les pavages obtenus par coupe et projection qui sont des sous-shifts de type fini, cf [BF13]. Dans les deux articles suivants on introduit la notion de substitution topologique et on étudie un exemple particulier, cf [BH13] et [BHJ13]. On montre que l'on peut trouver un pavage substitutif du plan hyperbolique seulement si la substitution n'est pas primitive. Dans le deuxième article on étudie un exemple de pavage substitutif du plan euclidien lié au fractal de Rauzy.

Enfin le chapitre 4 étudie des translations du tore $\mathbb{T}^k$. Deux problèmes nous ont intéressés : un problème de combinatoire sur les translations du tore de dimension un, cf [BDJR10] et un problème de complexité lié à la partition du tore qui code la dynamique d'une translation minimale sur un tore de dimension quelconque, cf [BB13].

Chapitre 1

Introduction

1.1 Combinatoire des mots

Pour cette partie on renvoie le lecteur à [68, 60, 19].

1.1.1 Langages, définition

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé **alphabet** dont les éléments sont appelés des **lettres**. Soit $\mathcal{A}^*$ le monoïde engendré par $\mathcal{A}$ pour la concaténation. Un **mot fini** sur $\mathcal{A}$ est un élément du monoïde. On le note $a_0 \dots a_{n-1}$ où les a_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. L'entier n s'appelle la **longueur** du mot. Un **facteur** v du mot u est un mot tel qu'il existe deux mots p, s possiblement vides tels que $u = pvs$. Un **langage** est l'union sur tous les entiers n d'un ensemble fini de mots de longueur n . On supposera en plus qu'il est égal à l'ensemble de ses facteurs. Un mot infini est un élément de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, un mot infini **périodique** de période le mot fini u se note $u^\omega = u.u \dots$. On munit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, le **décalage** S est alors une application de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ dans lui même qui à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Cette application est continue pour la topologie considérée. Un **sous-shift** est alors un système dynamique (X, S) ou X est un sous ensemble fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ invariant pour le décalage S .

Considérons un langage, et le sous ensemble L_n des mots de longueur n . Un mot de L_n est **spécial à droite** s'il admet plusieurs prolongements à droite en un mot de L_{n+1} . De même on définit la notion de mot **spécial à gauche**. Un mot **bispécial** est un mot vérifiant les deux à la fois. Définissons alors les quantités

$$\begin{cases} m_r(v) = \text{card}(a \in \mathcal{A}, va \in L_{n+1}) \\ m_l(v) = \text{card}(a \in \mathcal{A}, av \in L_{n+1}) \\ m_b(v) = \text{card}(a, b \in \mathcal{A}, bva \in L_{n+2}) \end{cases}$$

La **complexité** d'un langage est une fonction $p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque entier n le nombre de mots de longueur n de ce langage. Cette fonction se calcule essentiellement grâce

au lemme suivant (Attention cela ne veut pas dire qu'il est facile de la calculer...) :

Lemme 1.1. [17] On note $s(n) = p(n+1) - p(n)$, supposons que pour tout entier n les ensembles $\{v \in L_n, m_l(v) = 0\}$ et $\{v \in L_n, m_r(v) = 0\}$ soient vides, alors :

$$p(n+1) - p(n) = \sum_{v \in L_n} (m_r(v) - 1) = \sum_{v \in L_n} (m_l(v) - 1).$$

$$s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in L_n} (m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1).$$

Un mot est **sturmien** si sa complexité $p(n)$ est égale à $n+1$ pour tout entier n .

Exemple 1.2. L'exemple le plus simple est de considérer un mot infini ultimement périodique : $a(ab)^\omega$. On définit alors un sous shift (X, S) en posant X égal à l'orbite du mot infini sous S . L'ensemble X est alors formé des éléments suivants $\{a(ab)^\omega, (ab)^\omega, (ba)^\omega\}$. Le langage est formé par l'union sur les entiers n des mots de la forme $a(ab)^n, a(ab)^n a, (ab)^n a, (ba)^n b, (ab)^n, (ba)^n$. Ce langage est de complexité bornée car $p(n) = 3$ pour tout entier n supérieur ou égal à deux. Le seul mot spécial à droite de longueur non nulle est a .

1.1.2 Substitutions

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, une **substitution** est un morphisme du monoïde libre $\mathcal{A}^*$. Il suffit de connaître l'image de chaque élément de $\mathcal{A}$ pour définir la substitution. On appelle **point fixe** de la substitution σ un mot u (possiblement infini) tel que $\sigma(u) = u$. Une bonne façon de construire u apparaît si l'image d'une lettre a commence par elle même et a une longueur strictement plus grande que 1. Dans ce cas la suite $(\sigma^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un **mot infini** point fixe de σ . Il est possible qu'une substitution possède plusieurs points fixes. Ce sera le cas pour la substitution de Thue Morse. Dans la suite si on parle du point fixe d'une substitution, cela signifie que le résultat est valable pour tous.

Ce point fixe u définit un sous-shift (X, S) en posant (où S est le décalage) :

$$X = \overline{\{S^n u, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Exemple 1.3. On considère la substitution suivante appelée substitution de **Fibonacci**.

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathcal{A}^* & \rightarrow & \mathcal{A}^* \\ a & \mapsto & ab \\ b & \mapsto & a \end{array}$$

Le point fixe est donné par $u = abaababa \dots$. Le point fixe est un mot sturmien appelé **mot de Fibonacci**.

La **matrice d'incidence** de la substitution est la matrice qui compte le nombre d'occurrences de chaque lettre dans l'image d'une lettre. Dans l'exemple précédent on trouve $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est la matrice de l'endomorphisme abélianisé de σ .

La substitution est dite **primitive** s'il existe un entier n tel que M^n soit à coefficients strictement positifs. Elle est dite **unimodulaire** si sa matrice est de déterminant un. Elle est dite **irréductible** si le polynôme caractéristique de M est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Un théorème important est le théorème de Perron Frobenius :

Si M est une matrice réelle primitive, alors M possède une valeur propre simple strictement plus grande que les autres en module. Ainsi à toute substitution primitive on peut associer une **valeur propre** dominante de M et un **vecteur propre** à droite.

De plus signalons un résultat plus dynamique sur le point fixe u d'une substitution :

- Le sous-shift $\overline{\{S^n u, n \in \mathbb{N}\}}$ associé à une substitution primitive est minimal pour l'action de S .
- La complexité de u est linéaire : il existe C tel que $p(n) \leq Cn$ pour tout entier n .

Exemple 1.4. Le mot de **Thue Morse** est un des point fixes de la substitution

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{A}^* & \rightarrow & \mathcal{A}^* \\ a & \mapsto & ab \\ b & \mapsto & ba \end{array}$$

Ce n'est pas un mot sturmien.

1.1.3 Fractal de Rauzy

On considère une substitution primitive et unimodulaire σ sur k lettres. Il existe alors un ensemble compact de $\mathbb{R}^{k-1}$, noté $\mathcal{R}_\sigma$ qui pave l'espace par translation et une application T définie et à valeurs dans $\mathcal{R}_\sigma$ telle que le sous-shift défini par l'orbite du point fixe de la substitution sous le décalage S soit semi-conjugué au système $(\mathcal{R}_\sigma, T)$. L'application T est alors une translation par morceaux. Ce compact s'appelle le **fractal de Rauzy** voir [69]. On dit que l'on a une représentation géométrique de la substitution. Les exemples classiques sont basées sur les **substitutions k -bonacci**, dont le point fixe est noté w_k . On se donne un alphabet à k lettres $1, \dots, k$ et la substitution est alors définie par

$$\sigma_k : \begin{cases} 1 \mapsto 12 \\ 2 \mapsto 13 \\ \vdots \\ k-1 \mapsto 1k \\ k \mapsto 1 \end{cases}$$

Voici quelques exemple de représentations géométriques de substitutions k -bonacci.

- Pour $k = 2$, et $\mathcal{R}_1 = [0, 1)$, la translation est $T : x \mapsto x + a \mod (1)$ avec $a = \varphi - 1$. La partition est donnée par $D_1 = [0, 1 - a)$, $D_2 = [1 - a, 1)$. Le point fixe w_2 s'appelle **mot de Fibonacci**.
- En dimension deux, w_3 est le **mot de Tribonacci**. La partition est faite de domaines à bord fractal.
- Même chose pour $k = 4$ avec un domaine dans $\mathbb{R}^3$, voir la figure suivante.

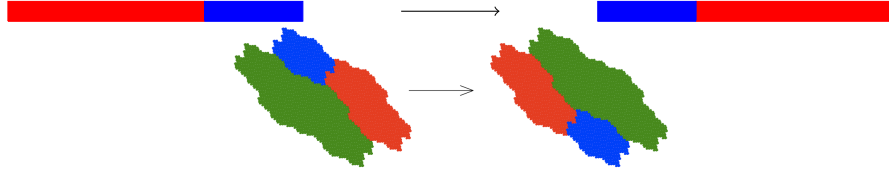


FIGURE 1.1 – Translation du tore et fractal de Tribonacci.

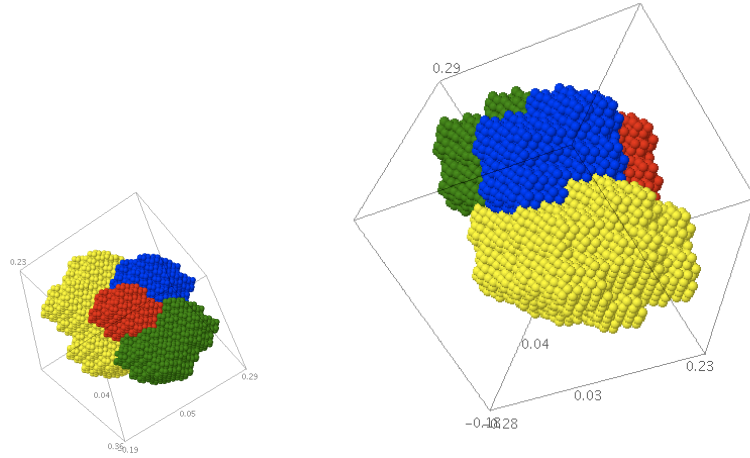


FIGURE 1.2 – Substitution 4-bonacci.

1.1.4 Langage substitutif

Considérons un nombre fini de substitutions $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ définies sur un même alphabet $\mathcal{A}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{1 \dots k\}$, alors le mot w admet une **représentation S-adique** si

$$w = \lim_n \sigma_{u_0} \circ \sigma_{u_1} \circ \dots \circ \sigma_{u_n}(a_n)$$

ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. La suite u est dite suite directrice du langage. Cette notion est reliée à la complexité car toute suite de complexité linéaire a une structure S -adique

d'après les travaux de Ferenczi [30]. Toute la question est de savoir à quelle condition une suite S -adique possède une complexité linéaire. Nous renvoyons à [29] et [12] comme référence sur le sujet.

Un **langage substitutif** est obtenu en considérant une union de mots S -adiques en donnant des restrictions sur l'ensemble des suites directrices permises : Il est donné par un graphe dirigé connexe fini G dont les arêtes sont étiquetées par les substitutions $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ et les sommets par des mots du langage de telle sorte que chaque chemin infini donne une suite directrice. Signalons qu'un langage substitutif possède une complexité polynomiale depuis les travaux récents de Delecroix, voir [26].

Dans ce mémoire nous allons rencontrer plusieurs langages venant de systèmes S -adiques. Ce sera le cas des langages des isométries par morceaux décrites dans la suite. Nos langages seront plus simples qu'un langage S -adique général car les suites directrices obtenues sont ultimement constantes. Pour simplifier les dessins, si une seule substitution apparaît on identifiera tous les sommets du graphe.

1.2 Isométries

1.2.1 Définitions

Considérons un nombre fini d'hyperplans affines de $\mathbb{R}^n$, $H_1 \dots H_k$. Soit $X = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \leq k} H_i$ le complémentaire des hyperplans. Une **isométrie par morceaux** de $\mathbb{R}^n$ est une application T :

- définie sur X ,
- à valeurs dans $\mathbb{R}^n$,
- telle que la restriction de T à un ensemble connexe soit une isométrie de $\mathbb{R}^n$.

Ces hyperplans sont appelés les **discontinuités** de l'application. L'orbite d'un point m est définie pour presque tout point $m \in X$. En effet un point a une orbite définie s'il n'existe pas d'entier n tel que $T^n m$ soit dans un des hyperplans H_i . L'union des hyperplans est de mesure nulle, et donc l'union dénombrable d'hyperplans obtenus par image réciproque des H_i est de mesure nulle. Notons alors X_0 le complémentaire dans X de cette union d'hyperplans. On va maintenant coder cette application. Le **codage** de l'application consiste à associer une lettre à chaque isométrie définissant T . On définit alors Φ , en notant les composantes connexes de X par $P_1 \dots P_l$:

$$\Phi : X_0 \mapsto \{1 \dots l\}^{\mathbb{N}}$$

$$\Phi(m) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

u_n est définie par $T^n m \in P_{u_n}$. Définissons $\Sigma = \overline{\Phi(X_0)}$ pour la topologie produit. L'ensemble Σ est l'ensemble de tous les mots infinis codages de trajectoires. Un mot de longueur n apparaissant comme facteur d'un élément de Σ est appelé mot du langage de l'application. Le langage relatif est noté L .

Remarque 1.5. Si l'isométrie par morceaux n'est pas bijective, alors il se peut que le langage ne soit pas récurrent. C'est à dire qu'il existe des mots de longueur n tels que $m_l(v) = 0$. Ceci complique la formule du lemme 1.1 pour calculer la complexité.

La **cellule** d'un mot v est

$$\sigma_v = \overline{\{m \in X_0, T^i m \in P_{v_i} \quad \forall i \in [0 \dots |v| - 1]\}}.$$

Une cellule se raffine de la manière suivante : Soit v un mot fini tel que $v = ua$ avec u mot du langage et a lettre. On a alors $\sigma_v = \sigma_u \cap T^{-1}\sigma_a$. En particulier σ_v est un sous ensemble de σ_u . On peut alors définir la cellule d'un mot infini comme l'intersection des cellules des préfixes convergeant vers le mot infini. On montre alors, voir [35] pour une preuve dans un contexte proche, que la cellule associée à un mot infini périodique est un ensemble connexe d'intérieur non vide.

Remarque 1.6. La notion de cellule est à rapprocher de celle de cylindre en dynamique symbolique.

On a alors $\overline{X_0} = \bigcup_{v \in L_n} \sigma_v$. Ainsi à chaque itération de T , l'espace est partitionné en cellules qui correspondent aux mots d'une longueur donnée. La **complexité** d'une isométrie par morceaux (X, T) codée comme précédemment est définie par

$$\begin{aligned} p &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \text{card}(L_n) \end{aligned}$$

où $p(n)$ est le nombre de mots différents de longueur n du langage. Ainsi $p(n)$ est égal au nombre de parties dans la partition $\bigcup_{v \in L_n} \sigma_v$.

Lorsque n tend vers l'infini la partition de X se fait donc en plusieurs ensembles :

- Des ensembles connexes correspondant aux orbites périodiques.
- Un ensemble de mesure nulle, correspondant aux pré-images des discontinuités.
- Le reste : les orbites non périodiques.

On a ainsi la correspondance entre les notions de combinatoire et des propriétés géométriques des cellules. Cette correspondance se retrouve dans les exemples qui suivent.

Mot v	Cellule
Mot fini	Polygone
Mot infini périodique	Polygone, disque
Mot infini non périodique	Fractale
Point fixe de substitution	Ensemble auto-similaire

Remarque 1.7. Ce tableau est à rapprocher du résultat sur la dynamique d'un sous-shift de point fixe de substitution. En effet le sous-shift défini par une substitution primitive est minimal, donc l'orbite d'un point codée par une telle substitution doit être dense dans son adhérence d'où la forme de la cellule du point fixe.

1.2.2 Induction

Pour finir ce paragraphe nous devons rappeler la notion d'application induite. Cette méthode sera au cours des preuves des théorèmes de la première partie décrivant le langage d'isométries par morceaux.

Si T est une application de X dans lui même et A une partie de X , l'application **induite** de T sur A , si elle existe, est définie par $T_A(m) = T^{r_A(m)}(m)$ avec $r_A(m) = \min\{n > 0, T^n(m) \in A\}$ pour tout $m \in A$ ou $r_A(m)$ est fini. On suppose ici que le temps de retour de tout point de A est fini. Le mot $\Phi(m)$ commence alors par un mot fini qui est le codage de la suite $m, Tm, \dots, T^{r_A(m)-1}m$, ce mot est appelé **mot de retour** de m sur A .

Supposons que T ait un codage défini sur les ensembles $P_i, i = 1 \dots l$. Notons alors l'application de premier retour de T sur $P_1 : T_{P_1}$. Cette application est naturellement munie d'une partition suivant les différents mots de retour. Il y a plusieurs mots de retour notés $v_i, i = 1 \dots k$. Notons L_{P_1} le langage associé. Définissons le morphisme α_{P_1} entre les monoides $\{1 \dots k\}^*$ et $\{1 \dots l\}^*$ par

$$\begin{cases} \alpha_{P_1}(1) = v_1 \\ \vdots \\ \alpha_{P_1}(k) = v_k \end{cases}$$

Lemme 1.8. *On a alors :*

- $\alpha_{P_1}(L_{P_1}) \subset L$.
- Si les mêmes hypothèses sont vérifiées sur chaque ensemble P_i , on a

$$\bigcup_{i=1}^l \alpha_{P_i}(L_{P_i}) = L.$$

- Supposons qu'il existe un homéomorphisme h entre X et P_1 tel que h établit une bijection entre les éléments de la partition associée à T_{P_1} et les éléments de la partition associée à T et telle que pour tout $x \in X$ on ait $h^{-1} \circ T_{P_1} \circ h(x) = T(x)$. Alors on peut identifier les deux monoides et on a :

$$L_{P_1} = L.$$

De plus L_{P_1} est stable par α_{P_1} .

Dans ce cas le langage de T est **substitutif** en accord avec la définition précédente. On dit aussi que T possède une **renormalisation** ou est **auto-similaire**. Si tel est le cas, on voit alors que la dynamique est liée à celle du sous shift engendré par la substitution. Dans le prochain paragraphe on donne deux exemples illustrant cette notion.

1.2.3 Exemples

Premier exemple

Voici un exemple classique sur $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$.

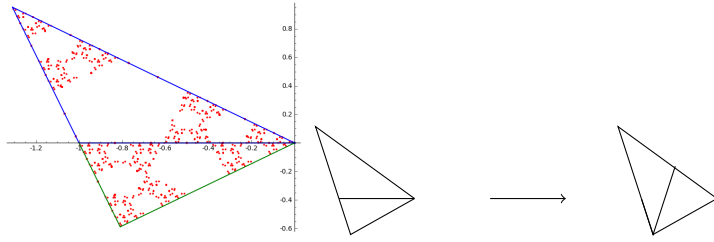


FIGURE 1.3 – Orbite de certaines discontinuités pour une rotation par morceaux.

On pose $\zeta = e^{2i\pi/5}$, et on considère les deux triangles de sommets

$$P_0 = (0, \zeta + \zeta^2 + \zeta^3, -1); P_1 = (0, -1, \zeta^3).$$

On considère T l'application définie sur $P_0 \cup P_1$ par

$$T(z) = \begin{cases} R_0(z) = \zeta^2 z + (\zeta + \zeta^2 + \zeta^3), z \in P_0 \\ R_1(z) = \zeta^3 z + \zeta^3, z \in P_1 \end{cases}$$

Cette application est bijective et définie localement par des rotations. Dans [39] Goetz décrit cette application et prouve que presque tout point a une orbite périodique. De plus l'induction sur P_0 est auto-similaire. On peut alors estimer la dimension de l'ensemble des points ayant une orbite non bornée grâce à la renormalisation. En codant cette application sur l'alphabet $\{0, 1\}$ suivant la partition donnée par P_0, P_1 la substitution associée à cet exemple est

$$\begin{cases} 0 \mapsto 01010 \\ 1 \mapsto 000 \end{cases}$$

Deuxième exemple

Considérons l'exemple d'isométrie par morceaux composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ donnée par la figure 1.4. On code cette application sur un alphabet à deux lettres, la bande horizontale est codée par 0 et le secteur par la lettre 1. Cet exemple possède une renormalisation, on montre comment utiliser la renormalisation pour en déduire la description de la dynamique de l'application.

On induit sur le secteur angulaire infini. On obtient une application conjuguée à l'originale et la substitution associée est

$$\sigma : \begin{cases} 0 \mapsto 10 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

On déduit de ce résultat que toutes les cellules sont des carrés, tous les points ont une orbite périodique. Chaque orbite périodique a un codage de la forme $\sigma^n(0)^\omega, n \in \mathbb{N}$. Ainsi l'espace

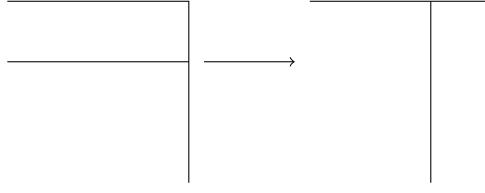


FIGURE 1.4 – Exemple d’isométrie par morceaux.

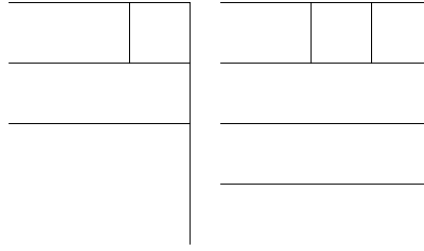


FIGURE 1.5 – Partition de l’espace suivant les cellules des mots de longueur 2 puis 3.

est pavé par des carrés correspondant aux mots périodiques du langage. Cet exemple est très simple, mais le calcul de la complexité associé n’est pas si évident. Cet exemple constitue le cas le plus simple associé au billard dual autour d’un carré, voir [BC11].

Dans le premier exemple, pour chaque entier n on a un pavage de l’espace par des polygones, mais à la limite on n’a plus un pavage à cause des points d’orbites non périodiques dont chaque cellule forme un ensemble de Cantor. D’une certaine manière une isométrie par morceaux décrit une suite de pavages du plan qui ne converge pas vers un pavage.

1.3 Pavages et SFT

1.3.1 Généralités

Une **tuile** est un ensemble compact connexe de $\mathbb{R}^n$ égal à l’adhérence de son intérieur. Un **pavage** est une collection de tuiles dont l’union recouvre l’espace entier et dont les intérieurs sont deux à deux distincts. Deux tuiles sont **équivalentes** s’il existe une translation qui envoie l’une sur l’autre. Une classe d’équivalence de tuiles est appelé **proto-tuile**. Un **patch** est une union finie de tuiles formant une partie connexe de $\mathbb{R}^n$. Pour un ensemble fini de proto-tuiles $\mathcal{P}$, l’ensemble des pavages formés à partir de cet ensemble s’appelle **l’espace des pavages** de $\mathcal{P}$ et se note $X_{\mathcal{P}}$. Un pavage de l’espace euclidien est dit **apériodique** si le groupe des isométries qui le laissent invariant ne contient pas de translation. Un ensemble de proto-tuiles est **apériodique** si tout pavage formé à partir d’elles est apériodique. Dans les exemples

usuels les proto-tuiles sont des polygones et deux polygones s'intersectent s'ils ont une arête en commun.

L'espace des pavages $X_{\mathcal{P}}$ a été fortement étudiée depuis les travaux de Belissard, Benedetti et Gambaudo [8]. Ses propriétés topologiques ont été clarifiées : il possède une structure de solénoïde, on peut dans certains cas calculer ses groupes de cohomologie, voir [72]. Le groupe $\mathbb{R}^n$ des translations agit sur cet espace et l'étude de la dynamique sur cet espace s'est aussi développée, citons par exemple [2] pour un calcul de fréquence de tuiles.

On considère deux pavages T, S d'un même espace. Alors le pavage S est dit localement dérivable à partir de T si pour tout réel positif R il existe un réel $r > 0$ tel que si deux patches de taille R de T coïncident alors les deux patches de S de taille r situés aux mêmes endroits coïncident. Les deux pavages sont dits **mutuellement localement dérivables** si chacun est localement dérivable à partir de l'autre.

1.3.2 Règles locales

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de proto-tuiles, et $\mathcal{F}$ un ensemble fini de patches. On dit qu'un pavage de $X_{\mathcal{P}}$ satisfait les **règles locales** de $\mathcal{F}$ si tout patch du pavage ne contient pas d'élément de $\mathcal{F}$. L'ensemble de tels pavages donne une généralisation de la notion de **sous-shift de type fini** défini en dynamique symbolique. Un pavage est dit **coloré** si on associe une couleur à chaque proto-tuile. Un ensemble de pavages est alors dit **sofique** s'il existe un ensemble fini de motifs colorés tel que le sous-shift de type fini formé par cet ensemble se projette en enlevant la couleur de chaque tuile sur l'ensemble de pavage. On retrouve bien la notion de facteur d'un système dynamique.

1.3.3 Pavage substitutif

Un pavage **substitutif** généralise la notion combinatoire de substitutiton. On se donne un ensemble fini de prototiles $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ et une matrice expansive M (toutes les valeurs propres sont de module plus grand que un). Un pavage substitutif est alors défini par la donnée de vecteurs $v_{i,j}$ tels que pour toute tuile P_i on ait

$$MP_i = \bigcup_j (P_j + v_{i,j})$$

En d'autres termes l'image d'une tuile par une application linéaire expansive est une union finie de tuiles.

Voici deux exemples de pavage substitutif. Chaque pavage est apériodique (invariant par aucune translation) mais le jeu de tuiles qui le forme n'est pas apériodique. Signalons pour terminer cette partie qu'en dimension deux, le résultat de Goodman Strauss, voir [42]. Pour tout pavage substitutif il existe un jeu de tuiles et des règles locales avec décoration tel qu'un pavage dans le sous-shift sofique associé soit dans l'espace de pavage associé au pavage substitutif. Ce

type de résultat est impossible en dynamique symbolique uni-dimensionnelle par un simple argument de complexité.

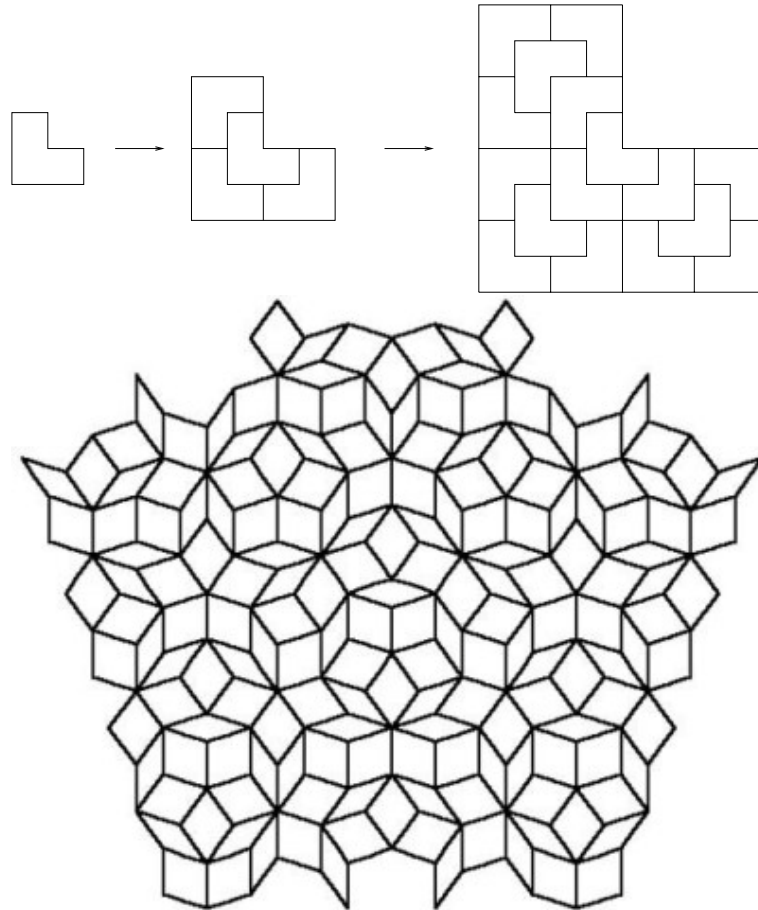


FIGURE 1.6 – Pavage chaise et pavage de Penrose.

Chapitre 2

Isométries par morceaux

2.1 Historique

Le premier résultat général sur les isométries par morceaux est du à Buzzi [16] : En toute dimension pour une isométrie par morceaux non nécessairement bijective l'entropie topologique est nulle. Rappelons que via le codage Φ donné dans l'introduction une isométrie par morceaux définit un sous-shift et un langage. L'entropie topologique de ce système dynamique peut alors se définir par la formule suivante où $p(n)$ désigne la complexité du langage.

$$h(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log p(n)}{n}.$$

Le second résultat général est du à Bressaud-Poggiaspalla [14]. Ils commencent une classification des isométries par morceaux bijectives définies sur un triangle. Aucun autre résultat général n'existe. Par contre de nombreux exemples d'isométries ont été étudiées en dimension deux. Le premier exemple relié à des rotations remonte à Adler-Kitchens-Tresser [1]. Cet exemple est très proche de ceux étudiés par Goetz dans [40] et [39], voir le chapitre d'introduction. Il concerne une isométrie par morceaux définie sur un compact et chaque isométrie est une rotation d'un angle multiple d'un nombre commun. Suivant les valeurs de cet angle la dynamique est plus ou moins complexe. La famille d'applications introduite par Boshernitzan et Goetz dans [13] est alors un prolongement de cet exemple. Par la suite plusieurs exemples ont été produits dans le but de dégager une étude générale. Ces exemples sont liés à une conjecture sur la forme des cellules limites de la partition, voir par exemple [6].

Les autres isométries par morceaux du plan étudiées font partie de la famille du billard dual. Ce type d'application, définie en fonction d'un polygone, a été introduite par Neumann, voir [66] et la question centrale est : Toute orbite est-elle bornée ? La première étude du billard dual remonte à l'article de Gutkin-Simany, où ils prouvent, voir [43] et [53], que toute orbite de billard dual pour un polygone quasi-rationnel est bornée. Comme corollaire on en déduit que toute orbite de billard dual pour un polygone rationnel est périodique. Un problème est que la

définition de polygone quasi-rationnel ne s'applique pas si deux côtés sont parallèles. Mais Li a prouvé l'analogie pour les trapèzes dans [57], voir aussi [38] pour une annonce du résultat.

L'autre grande famille étudiée est celle des kites, famille de quadrilatères dépendant d'un paramètre A . Schwartz a prouvé que le kite avait un comportement différent dans [73] et [74]. Il montre que pour tout paramètre A irrationnel il existe des orbites non bornées. De plus il construit une compactification de ce système dynamique en un échange de polytopes défini sur un tore de grande dimension. Ses travaux les plus récents sont axés sur une étude d'échange de polytopes défini sur un compact en utilisant les techniques introduites pour le billard dual. Remarquons que les théorèmes sur le caractère borné des orbites ne décrivent nullement ces orbites. Le premier résultat sur les polygones réguliers est celui de [83]. Il donne pour le pentagone régulier une description exhaustive des orbites. En outre Schwartz décrit complètement les orbites pour le kite associé au nombre d'or via ses théorèmes de compactification, voir [75]. Signalons pour finir que l'article [44] contient des estimations sur la complexité du billard dual polygonal, mais elles sont loin d'être optimales.

Pour clore cette partie, voici quelques mots sur le billard dans un polytope. Ce système n'est pas à proprement parlé une isométrie par morceaux, néanmoins les méthodes utilisées sont assez proches du fait que l'application de premier retour sur le produit face, direction est une isométrie par morceaux. L'étude de orbites périodiques utilise donc grandement des techniques d'isométries par morceaux. On peut prouver l'existence d'orbite périodique dans tout polytope rationnel, mais la preuve est non constructive, voir [82]. On peut aussi donner un critère de stabilité pour les trajectoires périodiques dans les polygones. Ce critère est basée sur le codage de l'orbite. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mot périodique de billard de codage donné dans tout polygone assez proche du polygone de départ, voir [87]. Ce critère peut s'étendre en toute dimension, du moins pour la condition suffisante voir [Bé08]. Pour les polygones irrationnels, le seul cas traité est celui des triangles. Il est bien connu que dans tout triangle aigu, il existe une orbite périodique de période trois. Pour un triangle obtus, le meilleur résultat est du à Schwartz, voir [77]. Il prouve que si l'angle est inférieur à cent degrés, alors il existe une orbite périodique. Citons aussi [47] qui traite du billard dans un triangle rectangle dans les angles sont proches de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

2.2 Billard dual

Avant de commencer signalons que la moitié des articles sur le sujet parle de billard dual, l'autre de billard extérieur. Ici nous optons pour le terme de billard dual. La dualité vient si l'on étudie ce problème pour des polygones sphériques. Il y a alors dualité entre ce billard et le billard classique, voir [82].

2.2.1 Introduction

Soit P un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$. Le billard dual est une isométrie par morceaux au sens du chapitre précédent définie dans l'intérieur de P par l'identité et en dehors de P de la façon suivante : On se fixe une orientation du plan, et on prolonge les côtés du polygone en des demi droites de telle manière que l'angle entre deux demi droites consécutives soit positif. Cela partage l'espace en secteurs. Sur chaque secteur l'application est une symétrie centrale de centre le sommet du secteur, voir figure 2.1. La question centrale est : Toute orbite est elle bornée ? Remarquons que le problème est invariant si on change le polygone par une affinité. Différentes classes de polygones ont été étudiées : nous allons en présenter quatre :

- Les polygones rationnels
- Les polygones quasi-rationnels
- Les kites
- Les trapèzes.

Un polygone est dit **rationnel** si ses sommets sont sur un réseau du plan. Un **kite** est un quadrilatère de sommets $(-1, 0), (0, -1), (A, 0), (0, 1)$ avec $0 < A < 1$. Un **trapèze** est un quadrilatère avec deux côtés parallèles. Il a pour sommets $(-1, -1), (0, -\alpha), (0, \alpha), (-1, 1)$.

Pour définir un polygone **quasi-rationnel** il faut un peu plus d'outils. Considérons un polygone convexe à k sommets $v_1, \dots, v_k$. Commençons par définir les **bandes** $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$. Une bande est une partie connexe du plan dont le bord consiste en deux droites parallèles. Considérons un côté du polygone orienté suivant la même orientation que le plan. Notons v_i, v_{i-1} ses sommets. La **bande associée** à ce côté est la plus petite bande contenant le polygone ayant le côté dans la frontière de la bande. On la note Σ_i . Cette bande a pour bord deux droites parallèles : la droite (v_i, v_{i-1}) et sa parallèle passant par un sommet noté v_j . Posons alors $a_i = 2(v_j - v_i)$. Le polygone est dit **quasi-rationnel** si les aires de parallélogrammes $\Sigma_i \cap \Sigma_{i+1}$ sont toutes commensurables à des nombres rationnels, voir la définition exacte dans la suite.

Proposition 2.1. *On a les inclusions :*

- *Un polygone rationnel est quasi-rationnel.*
- *Un polygone régulier est quasi-rationnel.*
- *Un polygone régulier qui n'a pas trois, quatre ou six côtés n'est pas rationnel.*
- *Un kite est quasi-rationnel si et seulement si $A \in \mathbb{Q}$.*
- *Un trapèze avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$ n'est pas quasi-rationnel*

2.2.2 Polygones réguliers

Ce travail est en commun avec Julien Cassaigne. Dans cette partie on étudie la dynamique du billard dual pour un polygone régulier. On arrive à décrire la dynamique symbolique de cette application pour certains polygones réguliers. Cette étude permet en plus d'obtenir des renseignements sur la complexité du langage associé. Le codage Φ se fait en associant une lettre à chaque secteur. Pour simplifier les énoncés on introduit une application $\hat{T}$ définie de

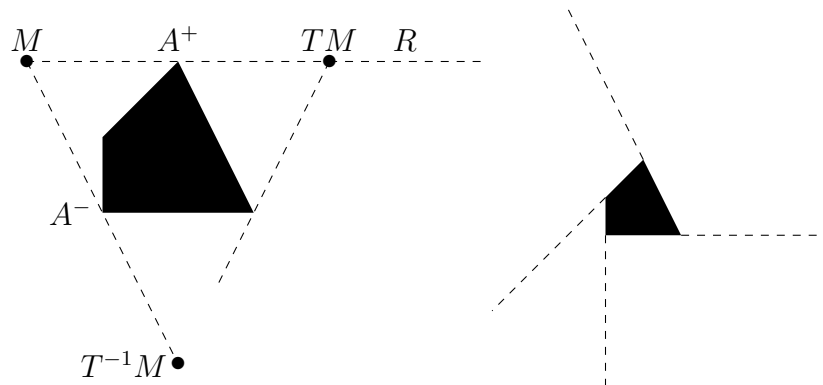


FIGURE 2.1 – Définition du billard dual.

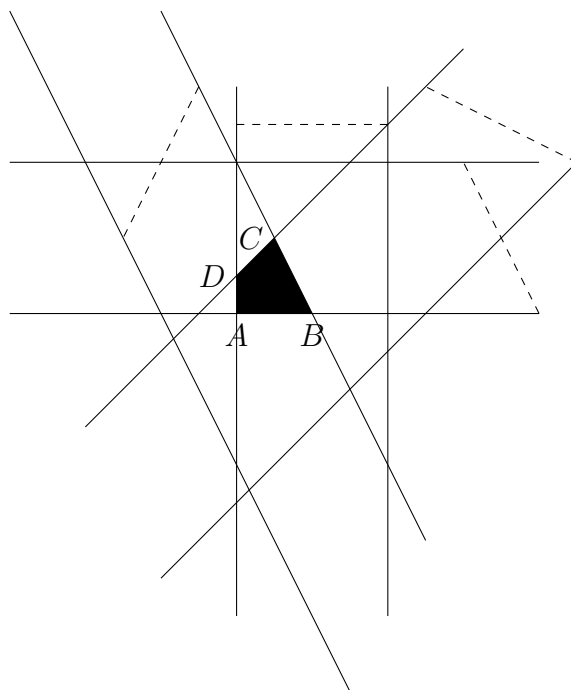


FIGURE 2.2 – Un polygone $ABCD$ et ses quatre bandes.

la manière suivante : Soit P le polygone régulier à k sommets et R la rotation d'angle $-\frac{2\pi}{k}$, centrée au centre de P . Considérons un secteur V_0 , on définit :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=0}^{k-1} V_i &\rightarrow \mathbb{N} \\ y &\mapsto n_y \end{aligned}$$

où l'entier n_y est le plus petit entier tel que R^n envoie le secteur V_i contenant y sur V_0 . Alors on pose :

$$\hat{T}(x) = R^{n_{T(x)}}T(x).$$

Le point important est que $\hat{T}$ est une isométrie par morceaux de V_0 définie sur $j = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ morceaux. On peut coder cette application via ψ , où l'ensemble Y est une union dénombrable de droites.

$$\begin{aligned} \psi : V_0 \setminus Y &\rightarrow \{1, \dots, j\}^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (n_{T^i(x)})_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Appelons L' le langage de $\hat{T}$ pour le codage ψ . Les deux codages sont liés par :

Lemme 2.2. *Si $x \in V_0 \setminus Y$, alors les codages $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \Phi(x)$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \psi(x)$ vérifient alors $v_n = u_{n+1} - u_n \pmod k$.*

On en déduit que les complexités vérifient $p_L(n) = kp_{L'}(n-1)$. De plus l'application $\begin{matrix} L & \rightarrow & L' \\ u & \mapsto & v \end{matrix}$ définie par $v_i = u_{i+1} - u_i$, pour $0 \leq i \leq n-2$ si $u = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ permet de changer de langage.

Théorème 1. [BC11] *Soit P un triangle, un carré, un hexagone régulier ou un pentagone régulier. Alors le langage L' de la dynamique de $\hat{T}$ est l'ensemble des facteurs des mots périodiques de la forme z^ω pour $z \in Z$, où*

– Si P est un triangle

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1(21)^n, 1(21)^n 1(21)^{n+1}\}.$$

– Si P est le carré

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{12^n\}.$$

– Si P est l'hexagone régulier

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{23^n, 23^n 23^{n+1}, 1\}.$$

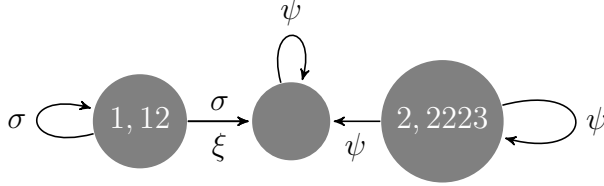
– Si P est le pentagone régulier, alors il existe trois substitutions σ, ψ, ξ définies sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$ telles que Z est l'union de

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma^n(1), \sigma^n(12)\},$$

$$\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \{\psi^m(2), \psi^m(2223), \psi^m \circ \sigma^n(1), \psi^m \circ \sigma^n(12)\},$$

$$\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} \{\psi^m \circ \xi \circ \sigma^n(1), \psi^m \circ \xi \circ \sigma^n(12)\}.$$

Remarquons que l'on montre que le billard dual relatif à ces polygones est un système S -adique. Pour le pentagone régulier le langage est donné par le graphe suivant :



Théorème 2. [BC11] Dans les cas suivants la complexité vaut :

– Pour un triangle, on a

$$p_{L'}(n) = \frac{5n^2 + 14n + f(r)}{24},$$

ou $r = n \mod 12$ et $f(r)$ est définie par

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(r)$	24	29	24	9	8	21	24	17	0	-3	8	9

– Pour un carré on obtient :

$$p_{L'}(n) = \frac{1}{2} \lfloor \frac{(n+2)^2}{2} \rfloor.$$

– Pour un hexagone régulier :

$$p_{L'}(n) = \lfloor \frac{5n^2 + 16n + 15}{12} \rfloor.$$

– Pour un pentagone régulier, soit β le nombre réel défini par :

$$\beta = \frac{14}{15} + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{48 \cdot 6^n \cdot 2 + 14 + 2(-1)^n} + \frac{7}{18 \cdot 6^n \cdot 2 + 14 - (-1)^n} \right) - \sum_{n \geq 0} \left(\frac{7}{78 \cdot 6^n \cdot 2 + 14 + 5(-1)^n} + \frac{7}{48 \cdot 6^n \cdot 2 + 14 - 5(-1)^n} \right).$$

alors on a

$$p_{L'}(n) \sim \frac{\beta n^2}{2}.$$

Dans l'énoncé du théorème 2 on donne la complexité $p_{L'}$. On peut facilement en déduire la complexité du langage L .

Commentaires

Ces théorèmes expliquent que le pentagone régulier est le polygone régulier le plus simple pour lequel le billard dual possède des orbites non périodiques. Ces orbites sont décrites de manière symbolique par un mot S -adique donné par les substitutions. Géométriquement cela signifie que la cellule associée à une orbite bornée non périodique forme un ensemble fractal du plan borné par des polygones réguliers correspondant aux orbites périodiques. Ceci peut faire penser aux îlots périodiques en théorie KAM, [4]. Le mot infini non périodique est limite de mots périodiques dont les périodes sont de préfixes du point fixe de la substitution. La preuve de ce théorème utilise la méthode d'induction décrite dans l'introduction. Le caractère substitutif du langage de l'application semble fortement lié au fait que les paramètres du problème sont dans un corps de nombres quadratique. La prochaine étape semble être d'étudier le cas de l'heptagone régulier puisque l'on se trouve dans un corps de nombre cubique.

2.2.3 Polygones quasi-rationnels

Dans cette partie nous explicitons la notion de polygone quasi-rationnel. Le but est de donner diverses conditions équivalentes. On part de la définition originale et on montre qu'elle est équivalente à celle introduite par Schwartz. Au passage on introduit une autre variante qui semble plus maniable en pratique. On commence par rappeler la construction originelle de [43], puis on énonce notre résultat qui donne les équivalences entre les définitions. On encourage le lecteur à se référer aux figures 2.3 et 2.4 pour aider la lecture des paragraphes suivants. Signalons enfin que la définition initiale n'est valable que si le polygone n'a pas de côtés parallèles.

Définition 2.3. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des réels non nuls, ils sont dits commensurables si les nombres $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}, \frac{\alpha_1}{\alpha_k}$ sont rationnels.

On considère deux sommets A, B de P , et les images de P par les deux symétries centrales par rapport à ces points. Ces images sont égales à translation près, on note alors $\tilde{P}$ un des ces polygones. Soit M un point du plan en dehors de P , on définit alors $\mathcal{S}_P$ l'union des translatés de P ou de $\tilde{P}$ ne contenant pas M .

Soit $Q \in \mathcal{S}_P$, prenons l'image de M par le billard dual en dehors de Q . Il est obtenu par une rotation d'angle π centrée en un sommet de Q appelé A_Q . On dit que A_Q est associé à M pour le polygone Q . L'application suivante ou $\varepsilon = 1$ si Q est un translaté de P et $\varepsilon = -1$ sinon est alors injective, donc bijective sur son image notée $\mathfrak{I}$.

$$\begin{aligned} \pi_M &: \mathcal{S}_P \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{-1, 1\} \\ Q &\mapsto (A_Q, \varepsilon) \end{aligned}$$

Considérons alors le polygone Q' image de Q par la rotation d'angle π centrée en A , voir Figure 2.3. Le couple $(A', -\varepsilon)$ est alors celui associé à Q' . En d'autres termes on a $(A', -\varepsilon) = \pi_{TM}(Q')$. On vérifie que Q' est bien dans $\mathcal{S}_P$.

On définit alors le **dépliage** du billard dual relativement à M par :

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \mathfrak{J} &\rightarrow \mathfrak{J} \\ (A, \varepsilon) &\mapsto (A', -\varepsilon) \end{aligned}$$

Cette définition, voir [43], peut paraître compliquée, mais elle est adaptée de la notion similaire de dépliage pour le billard polygonal intérieur. L'étude de cette application est liée au billard dual via le résultat suivant. On fera l'abus de notation de noter le conjugué de $\tilde{T}$ par la projection sur $\mathbb{R}^2$ et $\tilde{T}$ par la même lettre.

Définition 2.4. On note $(l_i)_{i \leq k}$ les droites passant par M et parallèles aux côtés de P . Elles définissent $2k$ cônes $C_1, \dots, C_{2k}$ centrés en M .

Proposition 2.5. [43] On a :

- La suite $(T^n(M))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (resp. périodique) si et seulement si il existe un point $Q \in \mathfrak{J}$ tel que l'orbite de Q sous l'action de $\tilde{T}$ est bornée (resp. périodique).
- Pour chaque cône C_i , il existe un vecteur a_i et un sous cône tel que si A est dans ce sous cône, alors $\tilde{T}(A) - A = a_i$. De plus on a pour tout entier $i \leq k$, $a_{k+i} = -a_i$.
- Il existe un polygone P^* à $2k$ côtés deux à deux parallèles et de mêmes longueurs, avec des sommets sur $l_1, \dots, l_k$ tel que chaque côté soit parallèle à l'un des vecteurs a_i .

Les côtés de P^* sont notés $v_i^*, i = 1 \dots 2k$.

On peut alors énoncer les définitions équivalentes de polygone quasi-rationnel :

Théorème 3. [Bé12] On a équivalence entre :

- $(\frac{v_1^*}{|a_1|}, \dots, \frac{v_k^*}{|a_k|})$ sont dans $\mathbb{PQ}^k$.
- $(|a_1 \wedge a_2|, \dots, |a_k \wedge a_1|)$ sont commensurables.
- $(|\Sigma_2 \cap \Sigma_1|, \dots, |\Sigma_k \cap \Sigma_1|)$ sont commensurables.
- P est quasi-rationnel.

Notre reformulation permet de déduire facilement :

Corollaire 2.6. [Bé12] Tout quadrilatère quasi-rationnel est rationnel.

2.2.4 Exemple

On considère un triangle, on dessine les bandes $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ et les intersections deux à deux des bandes. Dans chaque parallélogramme $\Sigma_i \cap \Sigma_{i+1}$ on dessine le vecteur a_i correspondant. Ce cas correspond à un polygone rationnel.

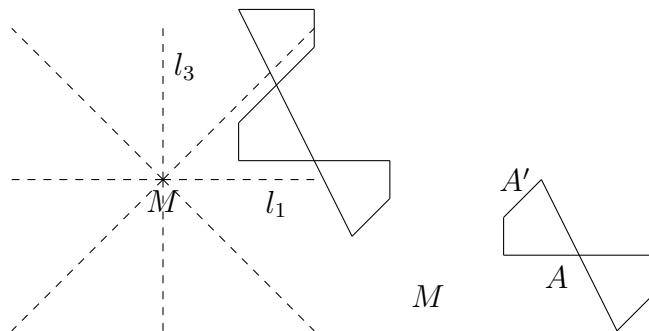


FIGURE 2.3 – Dépliage du billard dual.

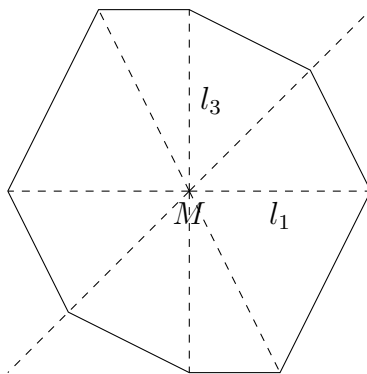


FIGURE 2.4 – Polygone P^* associé au quadrilatère $ABCD$.

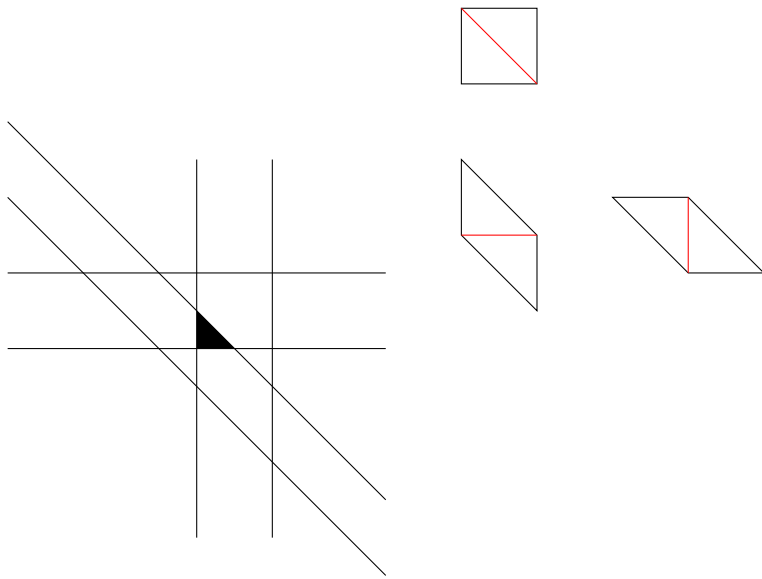


FIGURE 2.5 – Exemple du triangle

2.2.5 Commentaires

La preuve du théorème précédent permet de voir plusieurs caractéristiques des polygones quasi-rationnels. La première définition permet de comprendre la structure de T^2 qui est une translation par morceaux bijective. En dehors des bandes, cette application est une translation par un des vecteurs $a_i, i = 1 \dots k$. De même cette définition permet de montrer via l'existence du polygone P^* l'existence d'orbites périodiques pour le billard dual, voir [84]. Les cellules associées au codage de ces orbites périodiques forment des couronnes de polygones encerclant le polygone initial. Enfin la définition avec les aires des intersections des bandes relie ceci aux travaux de Schwartz et à la compactification de ce système via le Pinwheel theorem [73]. Une suite naturelle serait de trouver une famille de polygones intermédiaire entre les quasi-rationnels et les kites. Par exemple on peut s'intéresser aux polygones donc les vecteurs a_i sont tous rationnels sauf un ou deux d'entre eux. Cette famille pourrait donner des comportements intéressants. Une autre piste serait d'étudier des propriétés générales d'un échange compact de polytopes en utilisant les outils introduits par Schwartz.

2.3 Rotations par morceaux

Ce travail est en commun avec Idrissa Kaboré.

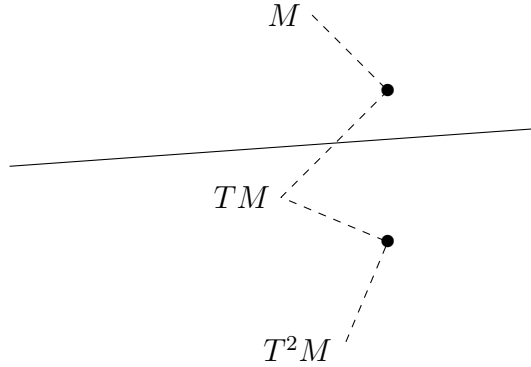


FIGURE 2.6 – Rotation par morceaux.

2.3.1 Introduction

Soit θ un réel, le problème initial est le suivant : on se donne deux rotations du plan d'angle $2\pi\theta$ et de centres différents. On définit une isométrie par morceaux sur $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante : On coupe le plan en deux par une droite ne passant pas par ces points : sur un demi plan on applique la première rotation, sur le deuxième on applique l'autre. Ce système a d'abord été étudié par Boshernitzan et Goetz, voir [13], qui prouvent que si l'application n'est pas surjective alors tout point en dehors d'un compact a une orbite non bornée et que si elle est n'est pas injective alors toutes les orbites s'accumulent dans une région donnée compacte. Le cas bijectif n'est pas traité par ce résultat. Il se ramène alors à l'application définie comme suit où σ est un nombre réel positif :

$$T(z) = \begin{cases} e^{2i\pi\theta}(z + 1 + \sigma) & \text{Im}z > 0 \\ e^{2i\pi\theta}(z - 1 + \sigma) & \text{Im}z < 0 \end{cases}$$

Goetz et Quas prouvent dans [41] que si θ est rationnel et σ proche de zéro, alors toute orbite est bornée. Pour ce faire ils utilisent le codage et donnent une famille explicite de mots périodiques dont les cellules forment des anneaux invariants du plan composés de polygones ayant deux à deux un sommet commun. Une orbite ne peut traverser un de ces anneaux et se trouve donc bornée. Si θ est irrationnel on comprend moins la dynamique. Goetz et Quas montrent que pour tout ensemble A de mesure positive, presque tout point visite A une infinité de fois. De plus ils construisent un ensemble de points périodiques pour tout angle en approximant θ par des rationnels. Dans le cas irrationnel, on ne sait pas si toute orbite est bornée.

On s'est intéressé à cette application pour les valeurs suivantes du nombre θ : $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}\}$. On code cette application comme une isométrie par morceaux sur un alphabet à deux lettres et on décrit alors complètement la dynamique de cette application dans les trois cas : bijectif, non injectif, non surjectif. On montre que le langage associé est substitutif.

2.3.2 Cas bijectif

Tout d'abord on traite le cas symétrique, c'est à dire $\sigma = 0$. On peut décrire la dynamique de la rotation par morceaux pour les angles précédents. Dans les trois premiers cas toute orbite est périodique, dans les autres cas il existe des orbites non périodiques. Le codage de ces orbites donne des mots ayant une représentation S -adique.

Le cas non symétrique se traite par la même méthode que le précédent. On voit apparaître de nouvelles formes de cellules par rapport au cas symétrique. Il est à noter que le langage est le même quelque soit la valeur non nulle de σ inférieure à 1. De plus on voit que la dynamique est différente suivant la position de σ par rapport à un. Si le paramètre est supérieur à un, alors les cellules associées aux décalés d'un mot périodique ne forment plus un anneau invariant, il faut utiliser plusieurs types de cellules.

2.3.3 Cas non bijectif

Que l'application soit non injective ou non surjective il apparaît un ensemble compact constitué de points d'orbites bornées. On s'est intéressé à la description de cet ensemble. Il est à bord polygonal. Dans le cas non injectif on décrit la dynamique de tout point dans cet ensemble et on montre que cette dynamique s'exprime encore en fonction de substitutions. Dans le cas non surjectif on s'intéresse à la forme de cet ensemble.

2.3.4 Méthode

La méthode ressemble fortement à celle utilisée dans le travail sur le billard dual pour un polygone régulier. On va l'expliquer sur le cas $\sigma = 0$ et $\theta = \frac{p}{q}$ rationnel. Si un point est très proche d'un des deux centres alors son orbite se trouve sur un cercle et donc reste dans un des demi-plans. Elle est alors codée par 0^ω ou 1^ω . On définit alors deux polygones réguliers symétriques par rapport à l'origine avec q ou $2q$ côtés comme les cellules associées à ces mots. Ces polygones sont centrés aux deux centres de rotations et possèdent un côté sur la droite de discontinuité. On considère alors l'application de premier retour $\hat{T}$ sur un cône délimité par la droite, un sommet du polygone et la demi droite supportant un côté du polygone passant par le sommet.

Proposition 2.7. *[BK13] Cette application $\hat{T}$ est une isométrie par morceaux. L'étude de $\hat{T}$ est équivalente à celle de T .*

La dernière phrase signifie qu'il existe une application entre les deux langages comme dans le lemme 2.2. Dans de bons cas, l'application $\hat{T}$ possède une renormalisation. C'est dans ce but que l'on doit restreindre notre étude à des valeurs particulières de l'angle.

Dans le cas non injectif, on reprend la preuve de Boshernitzan-Goetz afin de décrire explicitement l'ensemble attractif. On remarque alors que la dynamique sur cet ensemble est la même que celle décrite par Schwartz dans [76].

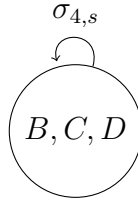
2.3.5 Énoncé des résultats

Pour ne pas alourdir l'énoncé suivant, on ne donne pas la description de chaque langage.

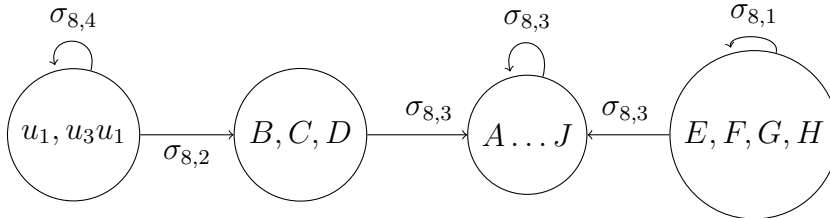
Théorème 4. [BK13]

- Si T est bijective (symétrique ou non) d'angle appartenant à $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}\}$ le langage L' de la dynamique de $\hat{T}$ est substitutif.
- Si T n'est pas injective et d'angle $\frac{\pi}{4}$, la dynamique dans l'ensemble attractif vérifie les propriétés suivantes : Presque tout point a une orbite périodique. L'ensemble des points d'orbite non périodique est de mesure de Hausdorff supérieure à un. Le codage d'une orbite non périodique possède une représentation S -adique.

Par exemple si T est bijective non symétrique d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $0 < \sigma < 1$, alors la substitution

$$\text{est donnée par } \sigma_{4,s} \begin{cases} A \mapsto A \\ B \mapsto AB \\ C \mapsto AC \\ D \mapsto ABC \end{cases} \quad \text{et le graphe associé est :}$$


Le cas de l'application bijective symétrique d'angle $\frac{\pi}{4}$ donne un graphe plus complexe défini via plusieurs substitutions et un alphabet de grande taille :



2.3.6 Commentaires

Cet exemple fournit plusieurs renseignements : Tout d'abord il montre que comme dans le cas du billard dual, la dynamique est décrite par des substitutions si les paramètres (les longueurs) de l'application se trouvent dans un corps quadratique. Ensuite cette application permet de donner le premier exemple d'isométrie par morceaux non bijective définie en dimension deux. On voit que la dynamique d'une telle application est assez complexe à étudier même dans ce cas simple. Ceci est à relier à l'étude des translations par morceaux en dimension un, étude plus riche que celle des échanges d'intervalles. Enfin on voit que l'étude de cette application se ramène, du moins sur ces exemples, à l'étude d'une isométrie par morceaux définie sur un compact. Ceci est à relier à la compactification du billard extérieur introduite par Schwartz.

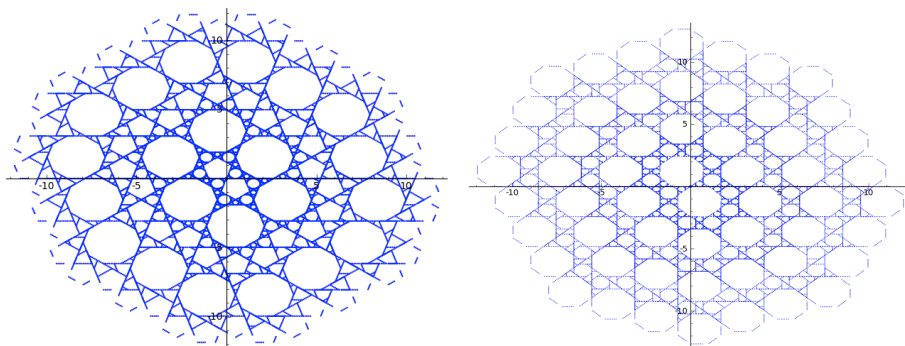


FIGURE 2.7 – Rotations par morceaux bijectives d'angles $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{4}$.

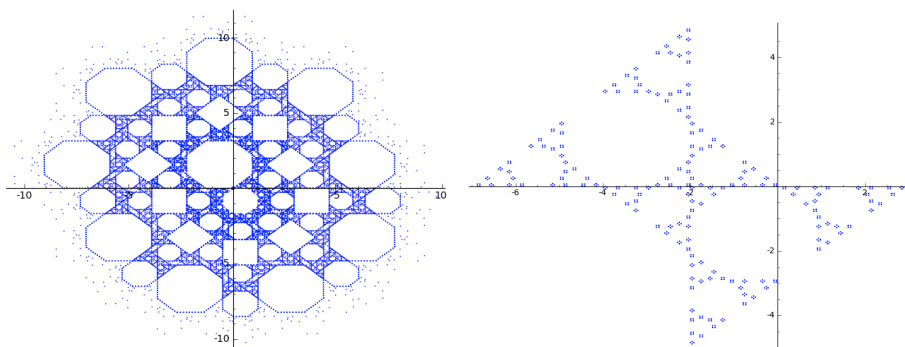


FIGURE 2.8 – Rotations par morceaux non symétrique et non injective d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2.4 Billard dans un simplexe

Ce travail est en commun avec Michael Rao.

2.4.1 Introduction

Considérons un polytope de $\mathbb{R}^n$. L'espace de phase du billard est le produit du bord du polytope par les vecteurs unités de $\mathbb{R}^n$ entrant dans le polytope. Un élément de cet espace est donc un couple point, direction. Le **billard** dans ce polytope est une application définie sur cet espace de la façon suivante. A partir d'un point du bord et d'une direction on se déplace en ligne droite dans la direction de départ jusqu'à intersecter le bord. Cela donne le nouveau point, pour obtenir la nouvelle direction il faut appliquer la symétrie orthogonale par rapport à la face contenant ce point. Ainsi dans une orbite de billard les directions sont obtenues en faisant agir sur la direction de départ le sous groupe G du groupe orthogonal engendré par les symétries orthogonales par rapport aux faces de P . Le polytope est dit **rationnel** si ce groupe est fini. Dans le plan l'étude dynamique est grandement facilitée dans le cas rationnel. Dans cette partie on s'intéresse au simplexe régulier et à l'existence d'orbites périodiques pour le billard. Ce polytope n'est pas rationnel si $n \geq 3$, les techniques usuelles ne peuvent donc pas s'appliquer. Une trajectoire périodique est donnée par une direction initiale et un nombre fini de points dans les faces du polytope tels que la ligne brisée reliant ces points soit une trajectoire de billard. Ces points seront appelés **points de base**. Ici on s'intéresse au problème en dimension supérieure ou égale à trois. L'existence d'une orbite périodique dans le tétraèdre régulier remonte à [81]. Nous généralisons ce résultat en toute dimension puis nous étudions plus en détails le groupe associé au simplexe régulier. Le billard est codé par la suite des faces rencontrées lors d'une orbite. On montre facilement qu'une trajectoire périodique est codée par un mot périodique, mais la réciproque n'est pas vraie, voir [35].

2.4.2 Définitions

Considérons un simplexe régulier Δ^n de $\mathbb{R}^n$ et considérons les coordonnées barycentriques par rapport aux sommets. Les sommets sont donc numérotés de 0 à n et on codera la face ne contenant pas le sommet i par la lettre i . Définissons trois points $m_0, p_1, r_1 \in \mathbb{R}^n$ par les formules suivantes ou $\pi_i(m)$ dénote la i -ème coordonnée barycentrique de m .

$$\begin{aligned} - \pi_i(m_0) &= -i^2 + (n+1)i \quad 0 \leq i \leq n. \\ - \pi_i(p_1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ -2(n+1)i^2 + 2(n+1)^2i - n(n+2) & \text{si } 0 < i \leq n. \end{cases} \\ - \pi_i(r_1) &= \begin{cases} n & \text{si } i = 0, \\ 2(n+1)(n-i+1)(i-1) & \text{si } 0 < i \leq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour un point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées barycentriques $(x_0, \dots, x_n)$ le décalage cyclique à droite des coordonnées définit le point $(x_n, x_0, \dots, x_{n-1})$. Introduisons alors les points $m_i, i = 1 \dots n$

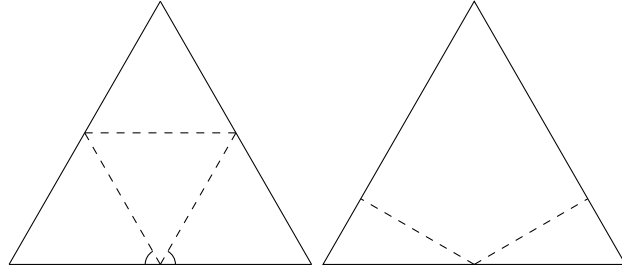


FIGURE 2.9 – Orbites périodiques codées 012 et 0102.

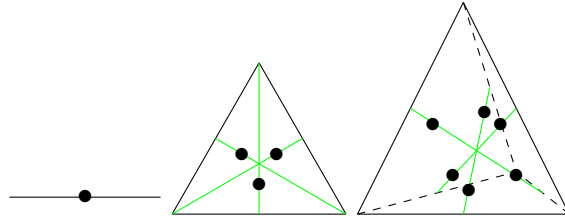


FIGURE 2.10 – Points de base dans une face de Δ^n de la trajectoire périodique pour $n = 2, 3, 4$.

de $\mathbb{R}^n$ obtenus par décalage cyclique à droite des coordonnées de m_0 . De même définissons les points $p_i, i = 2 \dots n$ (resp r_i) obtenus par décalage cyclique à droite des n dernières coordonnées de p_1 (resp. r_1). Par exemple on a $m_1 = (n, 0, n, 2n - 2 \dots, 2n - 2)$ et $p_2 = (0, n^2, n^2, 3n^2 - 2n - 4, \dots, 3n^2 - 2n - 4)$.

Théorème 5. [BR14] Dans un simplexe régulier $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$ on a :

- (1) Le mot $012 \dots n$ est la période d'un mot périodique de billard de période $n + 1$ passant par chaque face durant la période. Les points de base de cette orbite sont donnés par $m_i, i = 0 \dots n$.
- (2) Le mot $010203 \dots 0n$ est la période d'un mot périodique de billard de période $2n$. Cette trajectoire passe n fois par une face et une seule fois par chacune des autres faces. Les n points de base dans la même face, notée 0, ont comme coordonnées $p_i, i = 1 \dots n$. Les autres points sont donnés par $r_i, i = 1 \dots n$.

2.4.3 Groupe du tétraèdre

On considère un tétraèdre régulier T de sommets $ABCD$ dans $\mathbb{R}^3$. On appelle **suite de dépliages** de T une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tétraèdres réguliers tels que $T_n \cap T_{n+1}$ soit une face de T_n et tel que T_{n+2} soit différent de T_n . Il est bien connu qu'on peut associer à une trajectoire de billard dans T , une suite de dépliages et une droite coupant chaque T_n , voir [82]. On appelle x, y les rotations d'angles θ et d'axes AB, CD avec $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

On prouve alors le résultat suivant, en utilisant un résultat méconnu de [25].

Théorème 6 (B). *Pour un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$, on a :*

- *Le groupe $\langle x, y \rangle$ est un groupe libre.*
- *Pour tout entier n il existe $g \in \langle x, y \rangle$ tel que $g(T) = T_n$.*
- *Il n'y a pas de trajectoire de billard périodique de période impaire.*

2.4.4 Commentaires

Dans le théorème 5 la difficulté est de trouver un mot périodique qui va coder une trajectoire périodique. Une fois qu'on le connaît il existe un algorithme pour chercher un éventuel couple point direction tel que son orbite soit codée par ce mot. Cet algorithme a été introduit dans [Bé08]. Pour l'instant on ne connaît pas de méthode pour trouver un mot périodique mis à part une étude informatique. Ainsi en utilisant l'algorithme on peut obtenir tous les mots périodiques de petite longueur. C'est ce qu'on fait dans la proposition suivante : Cette liste contient tous les mots de billard périodiques jusqu'à la longueur 24 (à permutation cyclique près).

Pour aller plus loin, il faut comprendre plus en détail la géométrie du tétraèdre. Un premier pas est de comprendre le groupe engendré par les symétries orthogonales autour des faces. C'est ce que l'on fait dans le théorème 6. Cela permet de montrer un résultat plus simple mais plus général.

Proposition 2.8 (B.). *Liste des mots de billard périodiques dans un simplexe régulier de dimension 3 :*

Longueur 4	Longueur 6	Longueur 12	Longueur 14
1230	$\left\{ \begin{array}{l} 120130 \\ 102030 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 102013021030 \\ 120132130230 \\ 102013012030 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 10201310131030 \\ 10203102310230 \end{array} \right\}$
Longueur 16	Longueur 18	Longueur 20	
102031032130230	$\left\{ \begin{array}{l} 102010203020301030 \\ 120132012031201230 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 10201301201310121030 \\ 1020130121013021030 \\ 1020131013213202320 \\ 120120320232132130130 \end{array} \right\}$	
Longueur 22		Longueur 24	
$\left\{ \begin{array}{l} 1020301203212023210230 \\ 1023012302313203120320 \\ 1023013203212032130230 \\ 1301301203102103102130 \\ 1201312032013012310230 \end{array} \right\}$		120310231032130213101230	

Chapitre 3

Pavages

3.1 Historique

L'étude des pavages apériodiques du plan commence par la découverte par Robinson d'un jeu de tuiles ne pouvant paver le plan que de façon apériodique, voir [71]. Depuis de nombreux exemples ont été découverts, le plus célèbre étant celui découvert par Penrose [67]. Pour obtenir un pavage apériodique il existe essentiellement deux méthodes : une par **substitution** et une par **coupe et projection**.

La première méthode repose sur la façon suivante : On se donne un ensemble fini de polygones et une application dilatante du plan euclidien : Un pavage substitutif est alors une application qui à un polygone de la famille associe un pavage de l'image du polygone par l'application dilatante en utilisant uniquement des images de polygones pris dans la famille de départ par des isométries (souvent des translations). Si cela est possible on peut recommencer le procédé et ainsi en itérant cette application paver le plan. Si la substitution possède de bonnes propriétés (primitivité entre autre) alors il est possible d'avoir un pavage apériodique. Ce type de pavages est très étudié (en toute dimension) vu son lien avec la notion de substitution en dynamique symbolique. À un pavage on peut associer un système dynamique obtenu par action du groupe des translations $\mathbb{R}^2$, voir [8]. De nombreux parallèles ont été faits entre les deux systèmes dynamiques. À une substitution symbolique peut être associé un pavage apériodique de la droite réelle ayant les mêmes propriétés combinatoires que le point fixe de la substitution. Solomyak a prouvé que la plupart des résultats de théorie ergodique sur les substitutions uni-dimensionnelle s'appliquaient en dimension supérieure ou égale à deux, voir [79]. Un problème plus géométrique a aussi été beaucoup regardé : on sait caractériser les facteurs d'expansion de pavage substitutif de la droite : ce sont les nombres de Perron d'après un résultat de Lind [58]. En dimension deux le problème est plus ardu : il a été étudié par Kenyon et par Solomyak mais on n'a pas encore une caractérisation de la valeur propre dominante de la matrice d'expansion [52].

La deuxième méthode est basée sur la donnée d'un sous espace E de dimension 2 de $\mathbb{R}^n$.

Elle a été introduite par De Bruijn pour étudier le pavage de Penrose, voir [24]. On regarde la bande centrée en l'origine de largeur un, dont le bord est formée de plans parallèles au plan E : on étudie donc l'ensemble $E + [0, 1]^n$. Cette bande contient une partie du réseau entier. On projette orthogonalement les deux-faces du complexe $\mathbb{Z}^n$ sur le plan E et l'on obtient ainsi un pavage du plan par des losanges. On s'intéresse à ce type de pavage car c'est un moyen assez simple d'avoir un pavage d'une part apériodique mais aussi obtenu par des règles locales : c'est à dire que l'on peut le construire à partir des losanges et d'un nombre fini de règles d'assemblage. Ce type de pavage a été intensément étudié dans les années 1990. Ce type de construction peut être vu dans l'autre sens : à partir d'un pavage du plan par des losanges on peut le relever en une surface discrète de $\mathbb{R}^n$ qui se projette dans le plan sur le pavage considéré. L'entier n est ici le nombre d'arêtes des losanges, chacune se relève en un vecteur d'une base de $\mathbb{R}^n$. Ce type de considération est très présent dans les pavages par dominos via la fonction de **hauteur** introduite par Thurston dans son étude des pavages par dominos [85]. Cette étude a été prolongée par les travaux de Kenyon-Okounkov sur les pavages par dimères, voir [51] entre autre. Signalons aussi les travaux de Kellendonk [33] qui étudient les propriétés dynamiques et topologiques de pavages obtenus par coupe et projection. Ces derniers introduisent des outils de cohomologie pour déduire des résultats dynamiques.

Les deux types de pavages sont reliés par les travaux de Goodman Strauss [42]. Il prouve qu'à tout pavage substitutif on peut associer un pavage obtenu par règles locales colorées qui a la même combinatoire. Bien sûr ce type de résultat est impossible en dimension un par un argument de complexité. Notons que ces règles locales font intervenir un jeu de tuiles plus important et muni de couleurs.

3.2 Quasi-cristaux, règles locales

Ce travail est en commun avec Thomas Fernique.

3.2.1 Notations, définitions

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs unitaires du plan deux à deux non colinéaires et $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit les C_n^2 *proto-tuiles* :

$$T_{ij} := \{\lambda \vec{v}_i + \mu \vec{v}_j \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}.$$

Une **tuile** est une copie translatée d'une proto-tuile. Un **pavage par losanges** est alors un recouvrement du plan par des tuiles, d'intérieurs deux à deux disjoints, prises parmi les proto-tuiles. Dans la suite on supposera qu'un pavage utilise tous les types de tuiles. Étant donné un pavage par losanges $\mathcal{P}$ et un sommet arbitraire s de ce pavage, son **relèvement** est la **surface en escalier** $\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie ainsi :

- $\gamma(s) = \vec{0}$;
- si $[x, x + \vec{v}_i]$ est une arête du pavage, alors $\gamma(x + \vec{v}_i) = \gamma(x) + \vec{e}_i$;

- γ est affine sur chaque losange.

Le relèvement d'un pavage est donc unique modulo l'action de $\mathbb{Z}^n$ (choix de $\vec{s}$) grâce au fait que les tuiles sont des parallélogrammes.

Soit E un sous espace vectoriel de dimension deux de $\mathbb{R}^n$ et $w \geq 1$. D'après [24] et [34], l'intersection de $E + [0, 1]^n$ et des 2-faces du complexe $\mathbb{Z}^n$ se projette orthogonalement sur E en un pavage de $\mathbb{R}^2$ par des losanges. Dans la suite on considère ce jeu de tuiles et on va relever les pavages formés par ces tuiles.

Un pavage par losanges dont un relèvement est inclus dans la tranche $E + [0, w]^n$ est appelé un **quasi-plan**, dit de **pente** E et d'**épaisseur** w . Si $w = 1$, on parle de **plan**.

On dit que E admet des **règles locales** s'il existe un sous-shift de type fini, non vide, basé sur les proto-tuiles tel que tout relevé d'un pavage du sous-shift soit un quasi-plan de pente E . Il y a trois types de règles locales :

- **Règles locales faibles** : On n'a pas de borne sur l'épaisseur w .
- **Règles naturelles** : S'il existe un pavage d'épaisseur un satisfaisant les règles locales.
- **Règles fortes** : si les pavages qui satisfont les règles sont tous plans, *i.e* $w = 1$.

Une **ombre** d'un relevé d'un pavage par losanges est une projection du relevé sur un espace de dimension trois engendré par trois vecteurs $\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k$. La projection se fait orthogonalement à $n - 3$ vecteurs de base de $\mathbb{R}^n$. Cette ombre est dite **périodique** si elle est périodique dans une direction entière non nulle de $\mathbb{Z}^3$. Ce vecteur entier de $\mathbb{Z}^3$ est appelé **période** du pavage. Par extension on appelle **période de E** une période d'un pavage qui se relève dans $E + [0, 1]^n$, voir [56]. L'espace E est dit **totalemtent irrationnel et algébrique** s'il ne contient pas de vecteur entier et si on peut trouver une base telle que toutes les coordonnées soient dans $\mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ pour un certain entier D .

Soit m un entier, on dit qu'un plan de $\mathbb{R}^n$ possède une **symétrie d'ordre** m s'il existe une base donnée par les deux vecteurs

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{m}\right)_{0 \leq k \leq n-1}, \left(\sin \frac{2k\pi}{m}\right)_{0 \leq k \leq n-1}$$

L'entier n vaut m si m est impair et $m/2$ sinon. Géométriquement cela signifie que les losanges servant à paver le plan sont construits sur les racines m -ième de l'unité. Le terme de symétrie d'ordre m est aussi lié au fait que dans un tel pavage on peut trouver des motifs de taille arbitrairement grande invariants par la rotation d'ordre m .

3.2.2 Motivations et résultats

L'intérêt de la notion de période réside dans le fait suivant.

Proposition 3.1. [BF13] *Si un vecteur v est une période d'une ombre d'un relevé de pavage, alors il existe un vecteur de E dont la projection suivant une ombre soit égal à v .*

De plus, étant donné l'ensemble des périodes d'un plan E on peut trouver un sous shift de type fini non vide tel que tout pavage de ce sous-shift possède ces périodes.

L'ensemble de pavages obtenus ainsi est dit **forcé** par les périodes. Si tout pavage forcé est un quasi-plan, on dit que **les périodes forcent la planarité**. Remarquons que l'on n'impose pas que les quasi-plans soient tous de même pente.

L'objectif est d'arriver à caractériser les 2-plan totalement irrationnels de $\mathbb{R}^n$ qui admettent des règles locales. On conjecture qu'une condition nécessaire et suffisante est qu'un nombre fini de pavages possèdent les mêmes périodes. Pour l'instant on ne sait pas prouver la conjecture, mais on sait prouver le résultat suivant.

Théorème 7. [BF13] *Dans $\mathbb{R}^4$ soit E un 2- plan totalement irrationnel et algébrique, on a : Les périodes forcent la planarité si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Trois périodes se trouvent dans trois ombres différentes ne possédant chacune que cette période.*
- *Ces trois périodes se relèvent dans E en trois vecteurs non colinéaires deux à deux.*

Corollaire 1. [BF13] *De plus si les périodes caractérisent un nombre fini de pentes, alors le plan E possède des règles locales naturelles.*

Si la dimension est strictement plus grande que quatre, on n'a pas encore de preuve générale. Toutefois la méthode utilisée en dimension quatre permet de traiter la famille d'exemples suivants qui se trouvent en dimension quelconque.

Théorème 8. [BF13] *Les plans ayant une symétrie d'ordre m possèdent des règles locales naturelles si m est impair et divisible par 5 ou 7. Si m est pair et multiple de 5, 7, 8, 12 alors les pavages sont des quasi-plans.*

Levitov a montré que si une pente admet des règles locales, alors certaines ombres admettent des périodes, voir [56]. En corollaire il obtient le résultat suivant : les pavages avec symétrie qui admettent des règles locales fortes ne peuvent avoir que des symétries d'ordre un élément de $\{3, 4, 6, 5, 8, 10, 12\}$. Les trois premiers cas ne sont pas intéressants car ce sont des pavages périodiques. Ensuite Socolar a montré que certaines conditions impliquent des règles locales faibles, voir [78]. Notamment il peut construire des pavages possédant une symétrie d'ordre m avec des règles locales faibles pour m impair ou le double d'un nombre impair. Ensuite Le a montré que les pentes avec des règles locales naturelles sont forcément algébriques, voir [54] et [55]. Enfin signalons que les pavages par coupe et projection qui admettent des règles locales par décoration (soit un sous-shift sofique) sont exactement ceux dont la pente est générée par des vecteurs calculables, voir [32].

Ainsi notre méthode permet de retrouver tous les exemples connus jusqu'ici.

3.2.3 Coordonnées grassmaniennes

Un outil pratique est donné par les coordonnées grassmaniennes : A un 2-plan E de $\mathbb{R}^n$ on associe $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres $A_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. Ces nombres forment les **coordonnées grassmanniennes** de E , elles sont définies à une constante multiplicative près. Elles vérifient les

relations

$$A_{ij}A_{kl} - A_{ik}A_{jl} + A_{jk}A_{il} = 0$$

pour tout triplet $i < j < k < l$ ainsi que $A_{i,i} = 0$ pour tout entier i . Réciproquement à tout ensemble de $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres vérifiant ces équations on peut associer un 2-plan de $\mathbb{R}^n$.

Toutes nos hypothèses se traduisent facilement dans ce système de coordonnées :

- On suppose $A_{i,j} \neq 0$ pour tous i, j pour que toute tuile apparaisse dans le pavage.
- Par exemple le plan E admet dans l'ombre engendrée par les vecteurs e_i, e_j, e_k une période s'il existe trois entiers p, q, r tels que

$$pA_{jk} - qA_{ik} + rA_{ij} = 0$$

- De même l'hypothèse du corollaire du théorème 7 se traduit par :
Supposons que le système formé de l'équation quadratique

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{32}A_{14} = 0$$

et d'un nombre fini d'équations linéaires du type

$$pA_{jk} - qA_{ik} + rA_{ij} = 0$$

pour $i < j < k$ et $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$ admette un nombre fini non nul de solutions toutes dans $\mathbb{R}^6 \setminus \mathbb{Q}^6$.

Résoudre un tel système se fait en utilisant des bases de Grobner. Un plan solution d'un tel système est alors obtenu comme racine d'un polynôme associé via les bases de Grobner. Un plan est alors dit **de degré** d s'il existe un polynôme entier irréductible de degré d et x une de ces racines réelles tel que l'on puisse trouver une base du plan dont les coordonnées soient dans $\mathbb{Q}[x]$.

3.2.4 Méthode

La preuve que nous proposons est en plusieurs étapes, qui sont résumées ainsi :

- Si un pavage plan d'épaisseur un satisfait la condition alors tous les pavages avec les mêmes périodes sont des quasi-plans.
- Si tous les pavages avec les mêmes périodes qu'un pavage irrationnel d'épaisseur un sont plans et d'épaisseur bornée, alors les périodes satisfont la condition.
- Si le nombre de pentes de pavages plans ayant les mêmes ombres qu'un pavage donné est fini ; alors ces périodes satisfont la condition.
- On peut trouver des motifs finis qui forcent les périodes.

Le deuxième théorème se prouve en projetant la surface associée à un tel pavage sur une ombre de dimension quatre. On montre via le premier théorème que certaines de ces ombres (de dimension quatre) sont planaires, ensuite on démontre qu'un pavage qui possède suffisamment d'ombres planaires est un quasi-plan. Nous illustrons le théorème 8 sur deux exemples :

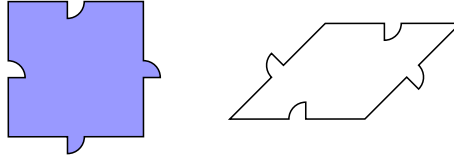


FIGURE 3.1 – Tuiles d’Ammann-Beenker.

Exemple : pavages de Amman-Beenker généralisés

On considère le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les deux vecteurs

$$\left(\cos \frac{k\pi}{4}\right)_{0 \leq k \leq 3}, \left(\sin \frac{k\pi}{4}\right)_{0 \leq k \leq 3}.$$

Les pavages d’Ammann-Beenker sont les pavages associés à ce plan par des règles locales fortes. Ils possèdent une symétrie d’ordre 8 et sont devenus un exemple populaire de quasicristal ayant une telle symétrie. Ils ont été introduits indépendamment par Amman dans les années 1970 et par Beenker en 1982. D’un côté Ammann les a définis comme ceux formés par deux tuiles décorées spéciales et par une tuile clé. Ceci est proche de la définition des pavages de Penrose dans [23]. D’un autre côté Beenker les a défini via la méthode de coupe et projection à partir du plan de $\mathbb{R}^4$. Mais il n’a pas pu trouver les tuiles décorées qui forment seulement ces pavages. Il a trouvé les tuiles de la figure 3.1 et a prouvé que l’espace de pavage associé contenait strictement sa famille de pavages.

On voit que les coordonnées grassmanniennes du plan sont

$$(1, \sqrt{2}, 1, 1, \sqrt{2}, 1).$$

Les équations des périodes sont donc $A_{12} = A_{14} = A_{23} = A_{34} := x$. Les relations de Plucker donnent alors en normalisant x par 1 : $A_{13}A_{24} = 2$. Le théorème 7 montre que chaque pavage est quasi-plan. Néanmoins il n’y a pas un nombre fini de plans ayant ces vecteurs comme périodes, les pavages d’Amman-Beenker correspondent à $A_{13} = \sqrt{2}$, voir [BF12]. On ne peut trouver de règles locales pour l’ensemble de ces pavages car la taille des règles locales varie en fonction de A_{13} . Remarquons qu’il suffirait de forcer la relation $A_{13} = A_{24}$ pour caractériser la seule pente du pavage d’Amman-Beenker. Ceci n’est hélas pas faisable par des règles locales comme remarqué par Burkov [15].

Deuxième exemple : Plan cubique

On considère le plan de $\mathbb{R}^7$ engendré par les vecteurs

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{7}\right)_{0 \leq k \leq 6}, \left(\sin \frac{2k\pi}{7}\right)_{0 \leq k \leq 6}$$

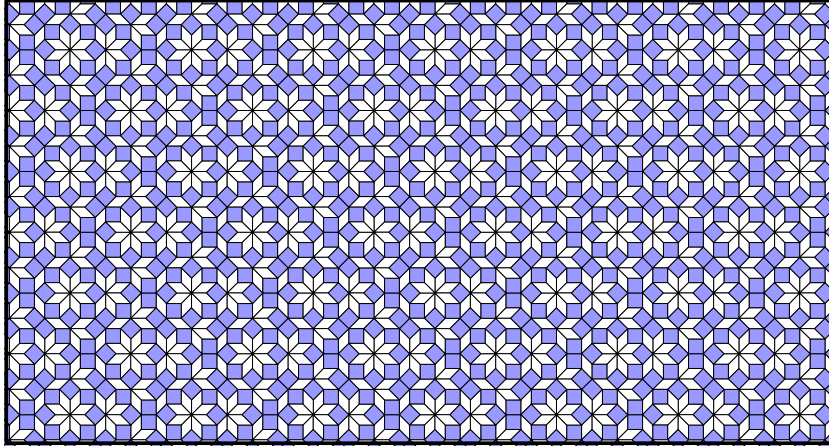


FIGURE 3.2 – Pavage d'Amman-Beenker.

Le pavage associé se fera par sept losanges dont les angles sont multiples de $\frac{2\pi}{7}$. On commence par calculer les coordonnées grassmanniennes pour trouver des ombres de dimension quatre ou appliquer le premier théorème. On cherche des relations linéaires entre ces coordonnées

$$\begin{cases} A_{12} = A_{71} = A_{67} = A_{56} = A_{45} = A_{34} = A_{23} =: x, \\ A_{13} = A_{61} = A_{46} = A_{24} = A_{72} = A_{57} = A_{35} =: y \\ A_{14} = A_{51} = A_{25} = A_{62} = A_{36} = A_{73} = A_{47} =: z \end{cases}$$

On considère donc les ombres 1235, 2346, 3457, 4561, 5672, 6713, 7124. Dans chacune de ces ombres on peut appliquer le premier théorème. Ces ombres de dimension quatre sont donc des relevés de pavages quasi-planaires, il faut alors s'assurer qu'il y a un nombre fini de plans ayant ces périodes. Pour ce faire on résout le système : Il y a $C_7^4 = 35$ relations de Plücker. Les relations de Plücker se ramènent alors à seulement quatre équations :

$$\begin{aligned} x^2 + xz - y^2 &= 0, \\ xy - xz - yz &= 0, \\ x^2 - yz - z^2 &= 0, \\ xy - y^2 + z^2 &= 0. \end{aligned}$$

En fixant, par exemple, $z = 1$, on obtient quatre coniques du plan euclidien, qui s'intersectent en trois points. On obtient facilement que ces trois points ont pour abscisses les racines du polynôme

$$X^3 - X^2 - 2X + 1,$$

l'ordonnée d'un point d'abscisse x étant $y = \frac{x}{x-1} = x^2 - 1$. Il reste alors à montrer que si un pavage possède les ombres de dimension quatre planaires alors c'est un quasi plan. Le calcul précédent montrera alors que le plan possède des règles locales.

Pour finir on peut expliciter les règles locales : ce sont des règles d'alternance. Dans un pavage par losanges, on appelle bande associée à un type d'arête : un ensemble de losanges ayant deux à deux une intersection suivant le type d'arête fixée. Il y a sept types de bandes, la règle d'alternance s'exprime dans chaque bande. Dans la bande correspondant à l'arête 1, il y a six losanges, la règle d'alternance consiste à supposer qu'entre deux losanges d'un même type on trouve un losange d'un autre type.

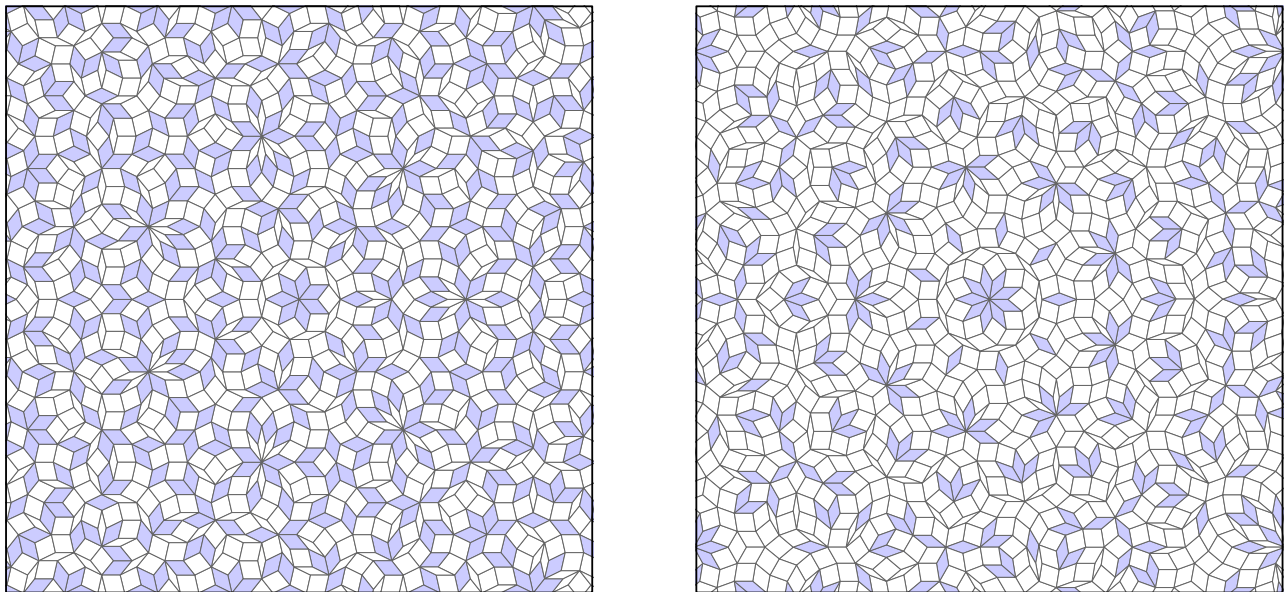


FIGURE 3.3 – Deux pavages planaires ayant des symétries d'ordre 7 (gauche) et 9 (droite).

3.2.5 Commentaires

Pour caractériser les plans possédant des règles locales, il faut faire deux choses : Affiner notre condition suffisante et montrer l'autre implication.

Pour la condition suffisante, voici quelques problèmes qui peuvent se produire : Tout d'abord il est possible que l'espace $\Delta = E^\perp \cap \mathbb{Z}^n$ soit non nul (cela arrive pour le pavage de Penrose). Dans ce cas même s'il n'y a qu'un nombre fini de plans $E_1 \dots E_k$ possédant les mêmes périodes, on a $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \oplus \Delta$. Notre preuve ne s'applique pas directement, toutefois l'on peut montrer que Δ est le supplémentaire du plus petit espace entier contenant les plans $E_i, i \leq k$ et cela peut dans la majorité des cas permettre d'éviter ce problème. Un problème plus important est celui où le plan E est de degré supérieur ou égal à trois. Pour l'instant la méthode employée dans la preuve du théorème 7 ne s'étend pas au cas général.

Pour la condition nécessaire, notre idée est d'étudier la fenêtre de projection : c'est à dire la projection de $[0, \omega]^n + E$ sur $E^\perp$. Cette fenêtre est un ensemble compact et elle se découpe via les points singuliers. On se fixe un entier k et on projette les points entiers du réseau inclus

dans la bande à distance au plus k . Pour chaque entier k on a une partition en polygones de la fenêtre, et un point singulier est un sommet intérieur de valence strictement plus grande que quatre. On se demande comment bougent ces points singuliers lorsque l'on fait varier le plan E . En effet si l'on bouge E et que l'on crée de nouvelles cellules dans la fenêtre alors on n'a pas un sous-shift de type fini. Ceci est liée au nombre de cellules présentes dans la fenêtre, cf [49].

Divers problèmes peuvent se poser une fois ce résultat démontré : Tout d'abord on peut se demander comment caractériser les classes d'isomorphismes de tels pavages. On peut aussi de demander si les pavages obtenus sont substitutifs. Enfin on peut essayer de généraliser cette preuve pour des pavages $n - d$. Dans un deuxième temps on peut essayer d'analyser la hauteur de tels pavages et voir si elle vérifie des propriétés similaires à celle des pavages $3 - 2$ par dominos ou losanges.

3.3 Substitution topologique

Ce travail est en commun avec Arnaud Hilion.

3.3.1 Définitions

On définit dans cette partie un nouveau procédé pour paver un espace de manière substitutive. Les méthodes usuelles dans l'espace euclidien sont basées sur le fait suivant : On se donne un nombre fini de polytopes et une similitude et l'on pave les images des polytopes par la similitude. On peut itérer ce procédé et paver des zones de volume croissant. A la limite on obtient un pavage de l'espace entier. Ici la méthode est différente car le but est de comprendre des pavages de l'espace hyperbolique, or cet espace ne contient pas de similitude. La substitution est définie sur un nombre fini de polygones topologiques : des complexes à une face dont le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes. L'image de chaque polygone est un CW-complexe obtenu en collant les polygones de départ suivant des arêtes, et de plus on marque les images des sommets du polygone de départ. Nous introduisons plusieurs graphes qui permettent de vérifier que l'on peut itérer notre substitution sur les complexes. Ce sont les graphes de configuration des sommets et d'hérédité des arêtes. La définition est donc topologique et se base sur des CW-complexes qui grossissent à chaque itération de l'application. Or à un pavage d'un espace est associé de manière naturelle un CW-complexe. Un pavage est alors dit substitutif si l'on peut réaliser le CW-complexe obtenu par la substitution en celui du pavage. Ainsi on dispose d'un moyen algorithmique pour savoir si l'on peut itérer le processus et obtenir un CW-complexe homéomorphe à l'espace entier. A une telle construction es associée une matrice comme dans le cas usuel. On définit alors la notion de substitution topologique primitive en imitant la définition initiale.

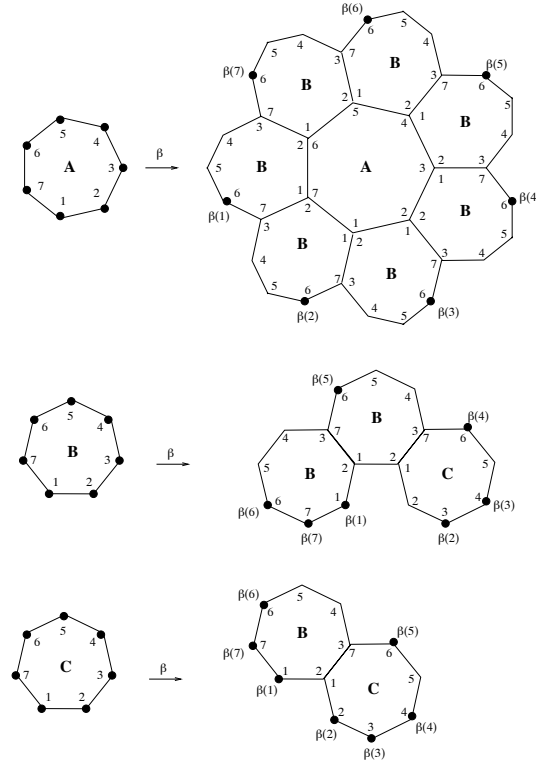


FIGURE 3.4 – Substitution topologique non-primitive β .

3.3.2 Résultat

Nous prouvons alors :

Théorème 9. [BH13] *Il n'existe pas de pavage substitutif primitif du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.*

La preuve se base sur l'inégalité isopérimétrique. Par contre si la substitution n'est pas primitive, on montre :

Théorème 10. [BH13] *Il existe un pavage substitutif du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.*

Ce pavage est obtenu avec la substitution β définie via la figure 3.4.

3.4 Exemple de substitution topologique

Ce travail est en commun avec Arnaud Hilion et Timo Jolivet. Dans cette partie on donne un autre exemple de substitution topologique. Celle ci permet de paver le plan euclidien. On considère la substitution topologique σ définie à la figure 3.6. On peut itérer cette substitution

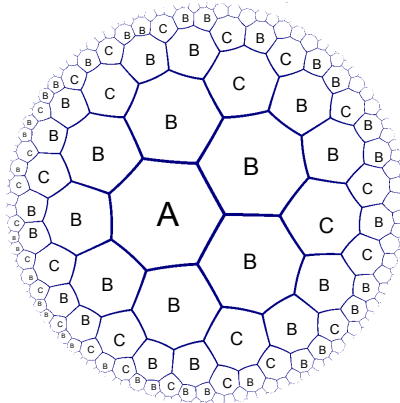


FIGURE 3.5 – Réalisation géométrique du complexe obtenu par itération de la substitution topologique β .

et il existe un pavage substitutif du plan euclidien qui réalise cette substitution. On appelle le pavage du plan associé $\mathcal{R}_{top}$. La figure 3.6 montre les premiers itérés de la substitution.

Considérons maintenant la substitution s de Tribonacci et rappelons la définition du pavage du plan obtenu par sa substitution duale : La substitution duale $E_1(s)^*$ est une application définie sur les couples point, parallélogrammes voir figure 3.7. Elle permet de paver le plan par trois types de parallélogrammes, notons $\mathcal{R}_{step}$ ce pavage. Enfin notons $\mathcal{R}$ le pavage apériodique du plan par le fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci. La figure 3.8 donne une idée de ces pavages.

Dans un travail en cours on s'intéresse aux liens entre le pavage $\mathcal{R}_{top}$ et les deux pavages $\mathcal{R}, \mathcal{R}_{step}$ du plan.

Théorème 11. [BHJ13] *Les trois pavages du plan $\mathcal{R}, \mathcal{R}_{step}, \mathcal{R}_{top}$ sont mutuellement localement dérivables.*

3.4.1 Commentaires

Plusieurs questions apparaissent maintenant que nous avons introduit cette notion de substitution topologique. Tout d'abord on peut étudier la dynamique des pavages substitutifs. Quelle est la forme de l'enveloppe de tels pavages ? On peut aussi se demander si la construction d'une substitution topologique qui mime la structure du pavage par le fractal de Rauzy de Tribonacci peut se reproduire pour d'autres substitutions que celle de Tribonacci. Enfin on peut se demander si une telle construction est réalisable en dimension plus grande ?

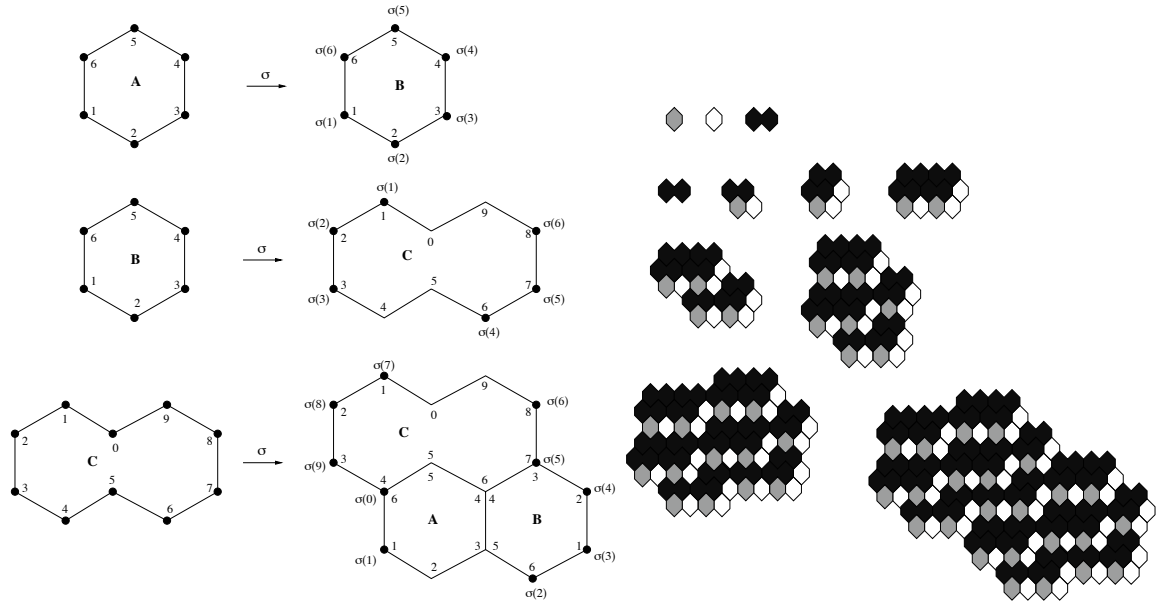


FIGURE 3.6 – Substitution topologique de Tribonacci et itérations de la substitution.

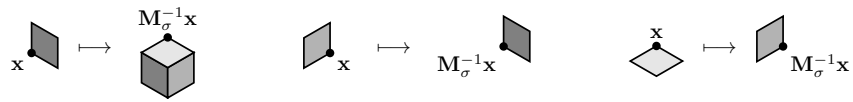


FIGURE 3.7 – Substitution duale de Tribonacci.

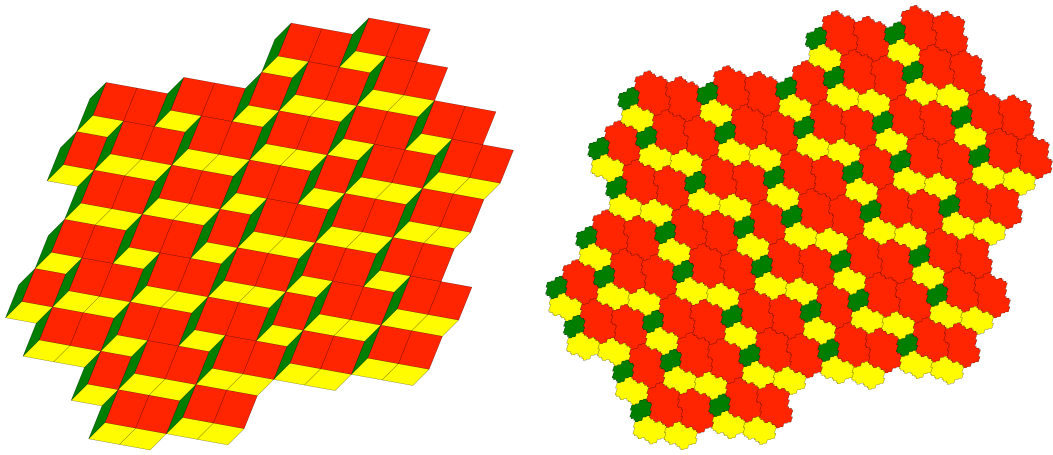


FIGURE 3.8 – Itération de $E_1^*(s)$ et pavage par le fractal de Rauzy.

Chapitre 4

Translations du tore

4.1 Historique

Une **translation du tore** est une application définie sur $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ de la forme suivante pour $\mathbf{a} \in \mathbb{T}^k$.

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^k &\rightarrow \mathbb{T}^k \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}\end{aligned}$$

Cette application est minimale si et seulement si les coordonnées de $\mathbf{a}$ sont indépendantes sur $\mathbb{Q}$. On s'intéresse à un codage d'une telle translation. Un domaine fondamental du tore est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^k$ de volume fini qui pave l'espace périodiquement sous l'action de $\mathbb{Z}^k$. On cherche une partition d'un tel domaine fondamental ayant de bonnes propriétés pour le codage. Pour $k = 1$, on utilise la partition de $[0, 1)$ en les deux intervalles $[0, 1 - a)$ et $[1 - a, 1)$. Le codage de l'orbite d'un point sous cette translation s'appelle alors un **mot sturmien**, voir [64] et [21]. Il est de complexité $n + 1$ pour tout entier n . Cette partition est la meilleure possible car un mot apériodique ne peut avoir une complexité inférieure à $n + 1$. Ainsi on ne peut trouver une partition de l'intervalle telle que la translation soit de moindre complexité. En dimension $k \geq 2$, pour toute translation il existe des domaines fondamentaux du tore en forme de polytopes et des partitions associées telle que la complexité soit un polynôme de degré k .

L'exemple le plus classique de partition en polytopes est lié au billard. Si on code le billard dans l'hypercube en identifiant les faces parallèles, on voit que le billard dans la direction $\mathbf{a}$ est conjugué à une translation du tore. Cette translation peut s'étudier en regardant l'application de premier retour sur le couple formé de la face diagonale et de la direction $\mathbf{a}$. Ainsi en dimension deux pour une translation du tore on peut toujours trouver un domaine fondamental formé de trois losanges qui se réunissent en un hexagone, voir la figure 4.1.

Dans ce cas la complexité est quadratique ($n^2 + n + 1$) et ce résultat se généralise en toute dimension pour le même type de partition. On pourra voir [7] pour une preuve en toute dimension. En dimension deux la première preuve est due à [5] puis à [Bé03]. De plus Chevallier prouve que si le domaine fondamental du tore est un polygone alors la complexité est toujours

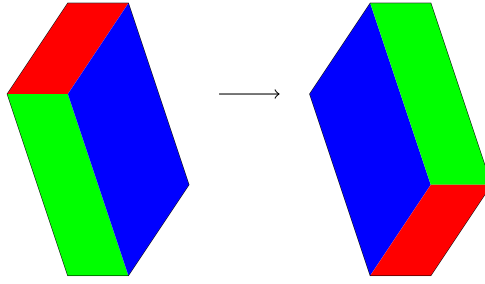


FIGURE 4.1 – Translation sur le tore $\mathbb{T}^2$.

quadratique [20]. Des travaux proches ont aussi été menés par Steiner voir [80].

Il existe aussi pour certaines directions $\mathbf{a}$ un domaine fondamental fractal du tore de dimension k et une partition en morceaux fractals telle que la complexité du langage associé à la partition soit égale à $kn + 1$. L'exemple fondamental est le **fractal de Rauzy** en dimension deux, voir [69]. Ces exemples sont obtenus via la substitution k -bonacci. Le vecteur propre de la matrice d'incidence pour la valeur propre de Perron donne le vecteur de translation. On voit donc que les résultats sont différents suivant la géométrie du domaine fondamental du tore. On peut donc se demander pour une translation fixée quel est le domaine tel que la translation associée possède une complexité minimale.

En dimension un les choses sont plus simples de ce point de vue, puisque les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Mais d'autres questions peuvent se poser. Comme expliqué dans l'introduction, un mot sturmien peut être donné par une demi droite coupant le réseau $\mathbb{Z}^2$. Ainsi il suffit de connaître deux nombres réels pour décrire une suite sturmienne : l'un est la pente de la droite et l'autre est la position du point de départ de la demi droite.

De nombreuses questions liées à la complexité peuvent se poser sur les suites sturmiennes. L'ensemble de tous les mots sturmiens (union sur les pentes) forme un langage, sa complexité a été calculée par Lipatov et elle croît comme un polynôme de degré trois voir [59]. Ce résultat a été retrouvé par de nombreux auteurs via des approches différentes, citons Mignosi ou Berstel-Pocchiola pour une approche de géométrie discrète ou Cassaigne-Hubert-Troubetzkoy pour une approche liée au billard carré, voir [18] et [63], [9]. Géométriquement on peut voir ces problèmes en terme de **géométrie discrète**. Un mot sturmien se représente par une suite de segments unitaires du réseau $\mathbb{Z}^2$ en considérant un mot sturmien comme un pavage de $\mathbb{R}$ par deux droites et en relevant ce pavage dans $\mathbb{R}^2$. Ainsi un mot sturmien est une **droite discrète** d'épaisseur un pour reprendre le vocabulaire de la partie 3, voir figure 1.

4.2 Résultats

On s'intéresse ici à deux types de problèmes : On se donne une translation minimale quelconque, et pour un domaine fondamental fixé du tore, on cherche des propriétés combinatoires

du codage de cette translation associé à ce domaine fondamental. Ceci permet de trouver un minorant absolu de la complexité quelque soit la partition. Cela permet de voir de plus que le domaine fondamental du tore influence sur la complexité. Le but à long terme étant de trouver pour tout vecteur de translation le domaine fondamental qui minimise la complexité. On sait que notre borne sur la complexité est minimale car il existe des directions et des domaines dont le mot associé a cette complexité. Mais ceci est loin de fonctionner pour n'importe quelle direction.

Le deuxième problème concerne une estimation fine sur les mots sturmiens. On se fixe maintenant la pente de la droite, et une longueur, on cherche alors à estimer le nombre de mots de longueur donnée qui apparaissent dans un mot sturmien de pente donnée. Ce problème est équivalent à compter les mots sturmiens de longueur donnée avec une proportion fixe d'une lettre. Ici on note L la longueur et h la proportion de 0 dans le mot sturmien, appelons $s(L, h)$ la quantité cherchée. On obtient une formule de récurrence non linéaire sur $s(L, h)$. Cette formule de récurrence permet d'obtenir la valeur précise pour $h = 2, 3$ et des estimées sur les séries génératrices liées à $s(L, h)$.

4.3 Partition du tore, complexité

Ce travail est en commun avec Jean François Bertazzon.

On considère une translation minimale du tore $\mathbb{T}^k$, et on cherche des partitions du tore telles que la complexité de la translation soit la plus petite possible pour ce codage. On peut parler de complexité de la translation car toutes les orbites sont codées par des mots de même complexité grâce à la minimalité de la translation. Un **domaine fondamental** du tore $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ est un sous ensemble D de $\mathbb{R}^k$, de volume fini, qui pave périodiquement l'espace $\mathbb{R}^k$ par l'action de $\mathbb{Z}^k$. Une **translation par morceaux** $(T, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m)$ est **associée** à la translation de vecteur $\mathbf{a}$ s'il existe m ensembles disjoints en mesure $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$ de $\mathbb{R}^k$ tels que

- $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}_i$ est un domaine fondamental du tore.
- L'application mesurable $T : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ est définie par :

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

- où $\mathbf{n} : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{Z}^k$ est une application mesurable telle que

$$\int_{\mathcal{D}_i} \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathcal{D}_i) \mathbf{r}_i \text{ ou } \mathbf{r}_i \in \mathbb{Q}^k. \quad (4.1)$$

Ceci signifie que l'on étudie ici une application définie sur un domaine de $\mathbb{R}^k$ localement par des translations. Contrairement à la plupart des cas, on ne suppose pas que le nombre de vecteurs de translations est fini. De plus les domaines ne sont pas forcément bornés. On obtient alors

Théorème 12. [BB13] Soit $k \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers, soit $\mathbf{a}$ un vecteur de $\mathbb{R}^k$ tel que la translation par $\mathbf{a}$ sur le tore $\mathbb{T}^k$ soit minimale. Soit $(T, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m)$ une translation par morceaux associée à cette application. Alors la complexité de la translation par morceaux vérifie :

$$\forall n \geq 1, \quad p_k(n) \geq kn + 1.$$

Notons que l'on ne peut pas faire mieux vu l'exemple de la translation conjuguée au sous-shift donné par le point fixe de la substitution de k -bonacci. Mais on ne sait pas pour une translation quelconque trouver un domaine fondamental et un échange de morceaux qui minimise la complexité de la translation.

4.4 Comptage et mots sturmiens

Ce travail est en commun avec Damien Jamet, Jean Luc Remy et Eric Domenjoud.

On note L un entier représentant la longueur des mots. On cherche à estimer $s(L, h)$: le nombre de mots sturmiens de longueur L ayant h zéros. Tout d'abord on étend la définition de $s(L, h)$ à $\mathbb{Z}^2$ en posant :

$$s(L, h) = \begin{cases} s(L, h \bmod L) & \text{si } L > 0, \\ 1 & \text{si } L = 0 \text{ et } h = 0, \\ 0 & \text{si } L < 0 \text{ ou } L = 0 \text{ et } h \neq 0 \end{cases}$$

Théorème 13. [BDJR10]

– Pour tout $L, h \in \mathbb{N}$ satisfaisant $0 \leq h \leq L/2$, on a :

$$s(L, h) = s(L - h - 1, h) + s(L - h, h) - s(L - 2h - 1, h) + s(h - 1, L - 2) + s(h - 1, L - 1).$$

– Soit $L \geq 0$ un entier, alors :

$$s(L, 2) = \left\lfloor \frac{(L + 1)^2 + 2}{6} \right\rfloor.$$

On s'intéresse alors aux séries génératrices $\mathcal{S}_h(X) = \sum_{L \geq 0} s(L, h)X^L$.

Théorème 14. [BDJR10] On a :

- $\mathcal{S}_0(X) = \frac{1}{1-X}$, $\mathcal{S}_1(X) = \frac{X}{1-X^2}$
- et pour tout $h \geq 2$, $\mathcal{S}_h(X) = \frac{\mathcal{F}_h(X)}{(1-X^{h-1})(1-X^h)(1-X^{h+1})}$, avec

$$\mathcal{F}_h(X) = (1 - X^{h-1})(V_{2h,h}X^h - V_{h-1,h}X^{h+1} - X^{2h-1}) + (1 + X)B_h,$$

où on pose

$$V_{n,h} = \sum_{L=0}^{n-1} s(L, h)X^L, \quad B_h = \sum_{r=0}^{h-2} s(h-1, r)X^{r+2h-1}.$$

De plus pour tout $h \geq 2$, il existe

$$u_0, \dots, u_{h-2}, v_0, \dots, v_{h-1}, w_0, \dots, w_h \in \mathbb{Q}$$

tels que pour tout $L \geq 0$ on ait :

$$s(L, h) = \alpha L^2 + \beta L + u_{L \bmod (h-1)} + v_{L \bmod h} + w_{L \bmod (h+1)}$$

avec $\alpha = \frac{1}{h(h^2 - 1)} \sum_{i=1}^{h-1} (h-i)\varphi(i)$ et $\beta = \frac{1}{h(h+1)} \sum_{i=1}^h \varphi(i)$ où φ est la fonction d'Euler.

La preuve se base sur le caractère s-adique des mots sturmiens : c'est à dire qu'ils sont engendrés par un nombre fini de substitutions. Une étude fine de ces substitutions permet d'obtenir la première relation de récurrence. Le reste s'en déduit par des calculs assez longs basés sur les séries formelles.

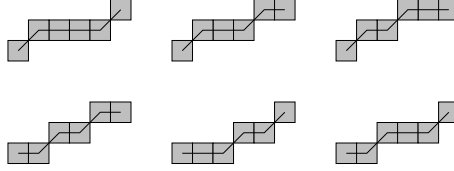


FIGURE 4.2 – Mots de longueur 5 et de hauteur 2.

4.5 Commentaires

Remarquons d'abord que la preuve du résultat sur les mots sturmiens utilise fortement la structure substitutive des mots sturmiens. Ainsi ce type de preuve ne peut s'adapter à un cas non substitutif. D'ailleurs ce résultat a été utilisé par Ambroz-Frid-Masakova et Pelantova pour obtenir un estimé de la complexité globale des échanges de trois intervalles, voir [3]. Ce problème est lié à la géométrie discrète comme expliqué avant, voir la figure 4.2 pour se convaincre. Notons que des estimés semblables existent en dimension plus grande. Dans un travail récent Jamet, Vergnaut et Vuillon (voir [28]) calculent le nombre de configurations de la forme $(2, n)$ présentes dans un plan discret. Ces problèmes de géométrie discrète sont d'ailleurs liés à des problème de pavage par domino et de fonction hauteur.

En ce qui concerne le premier problème, l'inégalité est optimale. Tout le problème est de savoir si pour une translation donnée il existe un domaine fondamental qui donne cette complexité. Très récemment un résultat proche a été montré pour presque tout vecteur a par Berthé-Siegel-Thuswaldner. Ils construisent un fractal de Rauzy associé à la translation tel que la complexité soit linéaire mais on ne sait pas si elle est égale à notre borne. Ce type de

problème est aussi lié aux isométries par morceaux et à certains facteurs nilpotents en théorie ergodique, voir [48].

Enfin un problème assez proche est celui de comprendre la combinatoire d'une rotation du tore $\mathbb{T}^k$, $k \geq 1$ codée comme une trajectoire de billard dans un cube. On connaît bien la complexité de cette application mais on ne comprend pas bien sa combinatoire. De plus l'étude combinatoire semble liée à la notion d'équilibre étudiée récemment pour la substitution de Tribonacci et pour les mots d'Arnoux-Rauzy, voir [11].

Conclusion et perspectives

Nous présentons quelques points qu'il nous semble intéressant d'étudier dans la suite :

- **Échange de polytopes.**

On cherche une compactification des isométries par morceaux de $\mathbb{R}^2$ dans le même esprit que Schwartz. Cela ramène l'étude d'une isométrie par morceaux à une isométrie définie sur un compact quitte à augmenter la dimension de l'espace. Il faut alors étudier des échanges de polytopes. Cela permet peut être de contourner les problèmes pour décrire la dynamique symbolique d'applications où les paramètres sont dans un corps de nombre cubique. Il faut voir si les outils introduits par Schwartz, comme le graphe arithmétique peuvent s'appliquer dans un autre cadre que le billard dual.

- **Espace hyperbolique.**

Étudier les mêmes objets dans d'autres espaces : On pense notamment à l'espace hyperbolique : il peut servir de cadre à une définition du billard et du billard dual. Peu de choses sont connues dans ce cadre. Signalons un article récent qui reprend notre étude sur les orbites périodiques dans le tétraèdre régulier. De plus les substitutions topologiques apparaissent naturellement dans ce cadre via le caractère hyperbolique des complexes cellulaires.

- **Pavages.**

Une piste intéressante semble de considérer à des pavages coupe et projection de type n vers 3. Par exemple que peut on dire pour les pavages par des dominos tridimensionnels formé de trois cubes ? Peut on définir un groupe de Conway pour savoir si une région est pavable ? Ensuite on peut se poser des questions plus dynamiques : Par exemple on peut étudier le sous-shift de type fini formé des pavages planaires lié à l'exemple d'Amman Beenker. Quelle est son entropie topologique ? Peut on appliquer le formalisme thermodynamique à ce système ? Quelle est la topologie de cet espace de pavages ?

- **Dynamique symbolique.**

On a vu que le langage des isométries par morceaux étudiées ici était représenté par un système S-adique. Peut on caractériser les systèmes dynamiques géométriques présentant cette propriété ? Inversement à un système S-adique peut on associer un système dynamique d'origine géométrique ?

Chapitre 5

Bibliographie

- [1] R. Adler, B. Kitchens, and C. Tresser. Dynamics of non-ergodic piecewise affine maps of the torus. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(4) :959–999, 2001.
- [2] J. Aliste-Prieto, D. Coronel, and J. M. Gambaudo. Rapid convergence to frequency for substitution tilings of the plane. *Comm. Math. Phys.*, 306(2) :365–380, 2011.
- [3] P. Ambrož, A. Frid, Z. Masáková, and E. Pelantová. On the number of factors in codings of three interval exchange. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 13(3) :51–66, 2011.
- [4] V. I. Arnold. *Vladimir I. Arnold—collected works. Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Representations of functions, celestial mechanics and KAM theory, 1957–1965, Edited by Alexander B. Givental, Boris A. Khesin, Jerrold E. Marsden, Alexander N. Varchenko, Victor A. Vassilev, Oleg Ya. Viro and Vladimir M. Zakalyukin.
- [5] P. Arnoux, Ch. Mauduit, I. Shiokawa, and J. Tamura. Complexity of sequences defined by billiard in the cube. *Bull. Soc. Math. France*, 122(1) :1–12, 1994.
- [6] P. Ashwin and A. Goetz. Polygonal invariant curves for a planar piecewise isometry. *Transaction of the American Mathematical Society*, 2004.
- [7] Yu. Baryshnikov. Complexity of trajectories in rectangular billiards. *Comm. Math. Phys.*, 174(1) :43–56, 1995.
- [8] J. Bellissard, R. Benedetti, and J.-M. Gambaudo. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. *Comm. Math. Phys.*, 261(1) :1–41, 2006.
- [9] J. Berstel and M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words. *Internat. J. Algebra Comput.*, 3(3) :349–355, 1993.
- [10] J. F. Bertazzon. Fonction complexité associée à une translation ergodique du tore. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 44 (6) :1155–1168, 2012.
- [11] V. Berthe, J. Cassaigne, and W. Steiner. Balance properties of arnoux-rauzy words. *International Journal of Algebra and Computations*, To appear, 2013.
- [12] V. Berthé and V. Delecroix. Beyond substitutive dynamical systems : S-adic expansions. *Arxiv*, 1309.3960v1, 2013.

- [13] M. Boshernitzan and A. Goetz. A dichotomy for a two-parameter piecewise rotation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(3) :759–770, 2003.
- [14] X. Bressaud and G. Poggiaspalla. A tentative classification of bijective polygonal piecewise isometries. *Experiment. Math.*, 16(1) :77–99, 2007.
- [15] S. E. Burkov. Absence of weak local rules for the planar quasicrystalline tiling with the 8-fold rotational symmetry. *Comm. Math. Phys.*, 119(4) :667–675, 1988.
- [16] J. Buzzi. Piecewise isometries have zero topological entropy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5) :1371–1377, 2001.
- [17] J. Cassaigne. Complexité et facteurs spéciaux. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 4(1) :67–88, 1997. Journées Montoises (Mons, 1994).
- [18] J. Cassaigne, P. Hubert, and S. Troubetzkoy. Complexity and growth for polygonal billiards. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(3) :835–847, 2002.
- [19] J. Cassaigne and F. Nicolas. Factor complexity. In *Combinatorics, automata and number theory*, volume 135 of *Encyclopedia Math. Appl.*, pages 163–247. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [20] N. Chevallier. Coding of a translation of the two-dimensional torus. *Monatsh. Math.*, 157(2) :101–130, 2009.
- [21] E. M. Coven and G. A. Hedlund. Sequences with minimal block growth. *Math. Systems Theory*, 7 :138–153, 1973.
- [22] D. Davis, D. Fuchs, and S. Tabachnikov. Periodic trajectories in the regular pentagon. *Mosc. Math. J.*, 11(3) :439–461, 629, 2011.
- [23] N. G. de Bruijn. Algebraic theory of Penrose’s nonperiodic tilings of the plane. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 43(1) :39–52, 53–66, 1981.
- [24] N. G. de Bruijn. Algebraic theory of Penrose’s nonperiodic tilings of the plane. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 43(1) :39–52, 53–66, 1981.
- [25] T. J. Dekker. On reflections in Euclidean spaces generating free products. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 7 :57–60, 1959.
- [26] V. Delecroix. Global complexity of s -adic systems. *Arxiv*, 2013.
- [27] D. Dolgopyat and B. Fayad. Unbounded orbits for semicircular outer billiard. *Ann. Henri Poincaré*, 10(2) :357–375, 2009.
- [28] E. Domenjoud, D. Jamet, D. Vergnaud, and L. Vuillon. Enumeration formula for $(2, n)$ -cubes in discrete planes. *Discrete Appl. Math.*, 160(15) :2158–2171, 2012.
- [29] F. Durand, J. Leroy, and G. Richomme. Do the properties of an S -adic representation determine factor complexity? *J. Integer Seq.*, 16(2) :Article 13.2.6, 30, 2013.
- [30] S. Ferenczi. Rank and symbolic complexity. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(4) :663–682, 1996.

- [31] S. Ferenczi and L. Q. Zamboni. Structure of K -interval exchange transformations : induction, trajectories, and distance theorems. *J. Anal. Math.*, 112 :289–328, 2010.
- [32] T. Fernique and M. Sablik. Local rules for computable planar tilings. In *Proc. 3th International symposium, JAC*, pages 133–141. Electronic Proceeding in Theoretical Computer Science (EPTCS), 2012.
- [33] A. Forrest, J. Hunton, and J. Kellendonk. Topological invariants for projection method patterns. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 159(758) :x+120, 2002.
- [34] F. Gähler and J. Rhyner. Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings. *J. Phys. A*, 19(2) :267–277, 1986.
- [35] G. Gal’perin, T. Krüger, and S. Troubetzkoy. Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards. *Comm. Math. Phys.*, 169(3) :463–473, 1995.
- [36] G. Galperin and D. Zvonkine. Periodic billiard trajectories in right triangles and right-angled tetrahedra. *Regul. Chaotic Dyn.*, 8(1) :29–44, 2003.
- [37] G. A. Gal’perin. The existence of nonperiodic and not everywhere dense billiard trajectories in polygons and polyhedra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275(1) :18–22, 1984.
- [38] D. Genin. Research announcement : boundedness of orbits for trapezoidal outer billiards. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 15 :71–78, 2008.
- [39] A. Goetz. Dynamics of a piecewise rotation. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 4(4) :593–608, 1998.
- [40] A. Goetz. A self-similar example of a piecewise isometric attractor. In *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, pages 248–258. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [41] A. Goetz and A. Quas. Global properties of a family of piecewise isometries. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29(2) :545–568, 2009.
- [42] Ch. Goodman-Strauss. Matching rules and substitution tilings. *Ann. of Math. (2)*, 147(1) :181–223, 1998.
- [43] E. Gutkin and N. Simányi. Dual polygonal billiards and necklace dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 143(3) :431–449, 1992.
- [44] E. Gutkin and S. Tabachnikov. Complexity of piecewise convex transformations in two dimensions, with applications to polygonal billiards on surfaces of constant curvature. *Moscow Mathematics journal*, 6 :673–701, 2006.
- [45] A. Hilion. Arbres, laminations et groupes libres. *Habilitation à diriger des recherches : Université Paul Cézanne*, 2011.
- [46] W. P. Hooper. Renormalization of polygon exchange maps arising from corner percolation. *Invent. Math.*, 191(2) :255–320, 2013.
- [47] W. P. Hooper and R. E. Schwartz. Billiards in nearly isosceles triangles. *J. Mod. Dyn.*, 3(2) :159–231, 2009.

- [48] B. Host, B. Kra, and A. Maass. Complexity of nilsystems and systems lacking nilfactors. *Arxiv 1203.3778*, 2013.
- [49] A. Julien. Complexity and cohomology for cut-and-projection tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(2) :489–523, 2010.
- [50] A. Katok. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard. *Comm. Math. Phys.*, 111(1) :151–160, 1987.
- [51] R. Kenyon and A. Okounkov. Limit shapes and the complex Burgers equation. *Acta Math.*, 199(2) :263–302, 2007.
- [52] R. Kenyon and B. Solomyak. On the characterization of expansion maps for self-affine tilings. *Discrete Comput. Geom.*, 43(3) :577–593, 2010.
- [53] R. Kołodziej. The antibilliard outside a polygon. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 37(1-6) :163–168 (1990), 1989.
- [54] Thang T. Q. Le. Local rules for quasiperiodic tilings. In *The mathematics of long-range aperiodic order (Waterloo, ON, 1995)*, volume 489 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 331–366. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [55] Tu Quoc Thang Le and S. Piunikhin. Local rules for multi-dimensional quasicrystals. *Differential Geom. Appl.*, 5(1) :13–31, 1995.
- [56] L. S. Levitov. Local rules for quasicrystals. *Comm. Math. Phys.*, 119(4) :627–666, 1988.
- [57] L. Li. On Moser’s boundedness problem of dual billiards. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29(2) :613–635, 2009.
- [58] D. A. Lind. The entropies of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4(2) :283–300, 1984.
- [59] E. P. Lipatov. A classification of binary collections and properties of homogeneity classes. *Problemy Kibernet.*, pages 67–84, 1982.
- [60] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski, With a preface by Berstel and Perrin.
- [61] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :169–200, 1982.
- [62] H. Masur and S. Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [63] F. Mignosi. On the number of factors of Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82(1, Algorithms Automat. Complexity Games) :71–84, 1991.

- [64] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62 :1–42, 1940.
- [65] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems. With special emphasis on celestial mechanics*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1973. Hermann Weyl Lectures, the Institute for Advanced Study, Princeton, N. J, Annals of Mathematics Studies, No. 77.
- [66] B.H.R. Neumann. Sharing ham and eggs. *Iota, Manchester university Mathematics students journal*, 1959.
- [67] R. Penrose. Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane. *Math. Intelligencer*, 2(1) :32–37, 1979/80.
- [68] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [69] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France*, 110(2) :147–178, 1982.
- [70] G. Rauzy. Des mots en arithmétique. In *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983)*, volume 84 of *Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. B*, pages 103–113. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984.
- [71] R. M. Robinson. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Invent. Math.*, 12 :177–209, 1971.
- [72] L. Sadun. Exact regularity and the cohomology of tiling spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(6) :1819–1834, 2011.
- [73] R. E. Schwartz. *Outer billiards on kites*, volume 171 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.
- [74] R. E. Schwartz. Outer billiards and the pinwheel map. *J. Mod. Dyn.*, 5(2) :255–283, 2011.
- [75] R. E. Schwartz. Outer billiards on the Penrose kite : compactification and renormalization. *J. Mod. Dyn.*, 5(3) :473–581, 2011.
- [76] R. E. Schwartz. Hyperbolic symmetry and renormalization in a family of double lattice pets. *Arxiv 1209.2390*, 2012.
- [77] R.E. Schwarz. Obtuse triangular billiards i : Near the (2,3,6) triangle. *Journal of Experimental Mathematics*, 15(2), 2006.
- [78] J. E. S. Socolar. Weak matching rules for quasicrystals. *Comm. Math. Phys.*, 129(3) :599–619, 1990.
- [79] B. Solomyak. Eigenfunctions for substitution tiling systems. In *Probability and number theory—Kanazawa 2005*, volume 49 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 433–454. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.

- [80] C. Steiner and R. Winkler. Complexity of Hartman sequences. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 17(1) :347–357, 2005.
- [81] F. Stenman. Periodic orbits in a tetrahedral mirror. *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math.*, 45(2-3) :103–110, 1975.
- [82] S. Tabachnikov. Billiards. *Panor. Synth.*, 1 :vi+142, 1995.
- [83] S. Tabachnikov. On the dual billiard problem. *Adv. Math.*, 115(2) :221–249, 1995.
- [84] S. Tabachnikov. A proof of Culter’s theorem on the existence of periodic orbits in polygonal outer billiards. *Geom. Dedicata*, 129 :83–87, 2007.
- [85] W. P. Thurston. Conway’s tiling groups. *Amer. Math. Monthly*, 97(8) :757–773, 1990.
- [86] F. Vivaldi and A. Shaidenko. Global stability of a class of discontinuous dual billiards. *Comm. Math. Phys.*, 110(4) :625–640, 1987.
- [87] Ya. B. Vorobets, G. A. Gal’perin, and A. M. Stëpin. Periodic billiard trajectories in polygons : generation mechanisms. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(3(285)) :9–74, 207, 1992.

Chapitre 6

Mes articles

- [BB13] N. Bédaride and J. F. Bertazzon. Minoration of the complexity function associated to a translation on the torus. *Monatshefte für Mathematik*, 171 :291–304, 2013.
- [BC11] N. Bédaride and J. Cassaigne. Outer billiard outside regular polygons. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 84(2) :303–324, 2011.
- [BDJR10] N. Bédaride, E. Doménjoud, D. Jamet, and J.-L. Rémy. On the number of balanced words of given length and height over a two-letter alphabet. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 12(3) :41–62, 2010.
- [BF12] N. Bédaride and Th. Fernique. Generalized ammann beenker tilings. *Proceedings of the conference Aperiodic 12*, Cairn Australia, 2012.
- [BF13] N. Bédaride and Th. Fernique. When periodicity enforces aperiodicity. *Arxiv*, 1309.3686, 2013.
- [BH07] N. Bédaride and P. Hubert. Billiard complexity in the hypercube. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(3) :719–738, 2007.
- [BH13] N. Bédaride and A. Hilion. Geometric realizations of two-dimensional substitutive tilings. *Q. J. Math.*, 64(4) :955–979, 2013.
- [BHJ13] N. Bédaride, A. Hilion, and T. Jolivet. Rauzy fractals, topological substitution and discrete planes. *En cours de rédaction*, 2013.
- [BK13] N. Bédaride and I. Kaboré. Piecewise rotations, symbolic dynamics. *Arxiv*, 1306.6150, 2013.
- [BR14] N. Bédaride and M. Rao. Regular simplices and periodic billiard orbits. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(10) :3511–3519, 2014.
- [Bé03] N. Bédaride. Billiard complexity in rational polyhedra. *Regul. Chaotic Dyn.*, 8(1) :97–104, 2003.
- [Bé07a] N. Bédaride. Classification of rotations on the torus $\mathbb{T}^2$. *Theoret. Comput. Sci.*, 385(1-3) :214–225, 2007.

- [Bé07b] N. Bédaride. Entropy of polyhedral billiard. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 19(1) :89–102, 2007.
- [Bé08] N. Bédaride. Periodic billiard trajectories in polyhedra. *Forum Geom.*, 8 :107–120, 2008.
- [Bé09] N. Bédaride. Directional complexity of the hypercubic billiard. *Discrete Math.*, 309(8) :2053–2066, 2009.
- [Bé12] N. Bédaride. A characterization of quasi-rational polygons. *Nonlinearity*, 25(11) :3099–3110, 2012.

Résumé

Dans ce mémoire on aborde l'étude de divers systèmes dynamiques via un codage de ces applications. On se ramène alors à l'étude de la dynamique symbolique associée. On s'intéresse essentiellement à des systèmes d'entropie topologique nulle. On se concentre sur plusieurs types d'isométries par morceaux ainsi que des translations minimale du tore $\mathbb{T}^k$. Un objet clé pour étudier le langage associé est la notion de substitution. On étudie enfin des pavages obtenus soit par la méthode de coupe et projection soit par substitution.

Mots clés : Dynamique symbolique, mot, substitution, isométrie par morceaux, pavage, billard.

Abstract

In this thesis we consider different dynamical systems of zero topological entropy. We use a coding map to study their symbolic dynamics. We focus on systems coming from piecewise isometries and minimal translations on a torus. A key object to study these maps is the notion of substitution or substitutive language. Moreover we begin the study of some tilings obtained either by a substitutive approach or by a cut and project method.

Key words : Symbolic dynamics, word, substitution, piecewise isometry, billiard, tiling.