UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE
Faculté des sciences et techniques — **Examen de Licence MIS**
Session de Janvier 2010 — **Module MA302**

Examen

Durée de l'épreuve: 3h

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice I

On considère la matrice:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Diagonaliser A dans une base orthonormée.

3. Montrer que

$$\mathbb{R}^3 = Ker(A - Id)^2 \oplus Ker(A + Id)$$

Exercice II

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Montrer que $(1 + 4X - 8X^2, 4 + 7X + 4X^2, -8 + 4X + X^2)$ forme une base de E.

2. Calculer sa base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*).

3. Montrer que $\varphi : P \mapsto P"(1)$ est une forme linéaire. Exprimer là dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*).

Exercice III

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne.

1. On considère le plan F d'équation

$$2x + 2z - y = 0.$$

   Trouver une base de $F^\perp$.

2. Montrer que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F. Complétez le en une base orthonormée (e_1, e_2) de F.

3. En déduire une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

4. Calculer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan F dans la base (e_1, e_2, e_3).

5. Calculer le projecté orthogonal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur le plan F.

Exercice IV

On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$q(X) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{7x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{9} + \frac{8x_1x_2}{9} - \frac{16x_1x_3}{9} + \frac{8x_2x_3}{9}.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Trouver son rang et son noyau.

3. Calculer la signature de q.

4. Nommer la surface d'équation $q(X) = 1$.

Exercice V

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1. Une matrice symétrique est diagonalisable.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, si $det(A) \neq 0$ alors A est injective.

3. L'endomorphisme $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est un élément de $U_2(\mathbb{C})$.

4. Si $f \in O_3(\mathbb{R})$ et $det(f) = -1$, alors f est une symétrie orthogonale.

5. Une matrice réelle est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

6. Un produit scalaire est une forme hermitienne.

* *

*