Licence de Mathématiques Partiel du 10 Novembre 2011

Algèbre et géométrie

Durée 2 heures

Tous documents et calculatrices interdits. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1. *On considère les matrices suivantes :*

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Soit G le groupe engendré par A et B.

1. *Montrer que G est un sous groupe de $O_2(\mathbb{R})$.*
2. *Ecrire la matrice B comme produit de deux matrices de symétries orthogonales.*
3. *En déduire des générateurs de G d'ordre deux.*
4. *Montrer que G agit sur $\mathbb{R}^2$ de manière naturelle.*
5. *Décrire l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

Exercice 2. *On considère les matrices suivantes :*

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_\theta \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit G_θ le groupe engendré par A et B_θ.

1. *Montrer qu'il existe θ_0 tel que B_{θ_0} soit d'ordre infini dans $GL_3(\mathbb{R})$.*
2. *Quel est l'ordre de A ?*
3. *Trouver un sous groupe de G_{θ_0} isomorphe à $\mathbb{Z}$.*
4. *Le groupe G_{θ_0} contient il des éléments d'ordre finis ?*
5. *A quoi est isomorphe le groupe engendré par B_{θ_0} ?*

Exercice 3. *Répondre par vrai ou faux en justifiant les réponses*

1. *Dans* S_n *il n'y a pas de sous groupe à deux éléments.*
2. *Le groupe* S_3 *est abélien.*
3. $SL_n(\mathbb{R})$ *est un sous groupe de* $O_n(\mathbb{R})$.
4. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *n'a pas de sous groupe distingué.*