| | | |
|---|---|---|
| Aix–Marseille Université | | 2018-2019 |
| | Mathématiques – MPCI- | |
| | DURÉE 3H | |

**Exercice 1** On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur cet espace.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de la forme $t \to at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ définit un sous-espace vectoriel $H$ de $E$.
3. Trouver une base orthonormée de $H$.
4. Trouver la projection de $t \to e^t$ sur cet espace.

**Exercice 2** On considère la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice est auto-adjointe pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver les valeurs propres et espaces propres de $M$.
3. Décrire $M$ géométriquement.

**Exercice 3** On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un polynôme annulateur non nul de $A$
2. Montrer que $A$ est inversible, et exprimer son inverse comme un polynôme en $A$.

**Exercice 4** Soit $f$ une fonction décroissante de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ existe alors $\lim_{+\infty} xf(x) = 0$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

**Exercice 5** Calculer les intégrales suivantes après avoir montré la convergence

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$ avec $n \geq 2$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\lambda)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On pourra faire un changement de variable $u = \frac{1}{x}$.

**Exercice 6** Trouver la nature des séries suivantes données par leur terme général.

1. $\frac{\cos(2n)}{n}, n \geq 2$
2. $\displaystyle n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)$
3. $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}), n \geq 1$