Aix–Marseille Université	2018-2019

Mathématiques – MPCI-

ANALYSE-2H

Exercice 1 Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+1-\sqrt{4x^2+1}}{x^2}dx.$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2u}\sin(e^u)du.$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}.$
2. $\displaystyle\int_1^{x} \frac{t+1}{t^2+t+1}dt$ avec $x>1$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} x^2\sin x dx.$

Exercice 3 On considère la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}, n \geq 1.$

1. Montrer que l'intégrale est bien définie.
2. Montrer que $u_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)dt}{n} - \frac{\ln 2}{n}.$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de $u_n - 1$.
5. Que dire de la série de terme général $u_n - 1$?

Exercice 4 Trouver la nature des séries de terme général

1. $\sin(\frac{1}{n}) \times \frac{1}{n}, n \geq 1$
2. $\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$
3. $(\frac{n}{n+2})^{n^2}, n \geq 1$
4. $\frac{\sin 2n}{n}, n \geq 1$

Exercice 5 Trouver la nature des séries données par leur terme général et calculer la somme si possible

1. $\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$
2. $\frac{(n-1)}{n!}$