

1 Systèmes Linéaires

Exercice 1 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier votre solution.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 3x + 6y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 * L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte que la demande totale soit satisfaite ? Nous considérons ici un exemple très simple d'une économie avec deux secteurs A et B . Supposons que la demande des consommateurs pour ces produits soit respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelle production a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780 respectivement, mais les choses ne sont pas aussi simples que cela. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euros d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euros de biens de B par euros de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateurs et la demande interindustrielle.

Exercice 3 * Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points $(1, -1)$, $(2, 3)$ et $(3, 13)$. Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 4 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p , q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p , q , r ?

Exercice 5 Un magasin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont de P_1 € et P_2 €, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2 , et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2 , sont reliées par les équations

$$D_1 = 70 - 2P_1 + P_2$$

$$D_2 = 105 + P_1 - P_2$$

$$S_1 = -14 + 3P_1$$

$$S_2 = -7 + 2P_2.$$

Les deux articles sont-ils en compétition (comme le sont une Volvo et une BMW) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?

Trouver les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

Exercice 6 * Trouver un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x = 6 + 5t, y = 4 + 3t, z = 2 + t, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 * On considère le système linéaire à 3 inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + uy + vz = b_1 \\ ux + y + z = b_2 \end{cases}$$

où u, v, b_1 et b_2 sont des paramètres. **Sans résoudre le système**, répondre aux questions suivantes :

a) Pour quelles valeurs des paramètres pourra-t-on exprimer

i) x et y comme fonctions de z ?

ii) y et z comme fonctions de x ?

iii) z et x comme fonctions de y ?

(Raisonnement sur le système à deux inconnues obtenu en "faisant passer l'une des inconnues au second membre")

b) Comment faut-il choisir les paramètres pour que l'ensemble des solutions du système ne soit pas une droite ?

c) Dans ce dernier cas, comment faut-il choisir les paramètres pour que le système ait des solutions ? Que pouvez-vous dire alors de ses solutions ?

Exercice 8 * Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 4t = 2 \\ y + 3z - 4t = -2 \\ z - 2t = 0 \\ x + y - z + 2t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t + u = 0 \\ y + 3z - 4t + 2u = 0 \\ x + z - 2t + 3u = 0 \\ x + y + 4z - 6t + 5u = 0 \\ 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 * Échelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et encore...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Déterminants

Exercice 10 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives (donner d'abord leur matrice). Trouver leur inverse quand il existe.

i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 5x_2, 5x_1 + 8x_2)$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 + 8x_2)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 9x_3).$$

v) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 8x_3, 2x_1 + 7x_2 + 12x_3).$$

vi) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (22x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 5x_4, 13x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4, 8x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4, 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Pour quelles valeurs des constantes a , b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 16 * Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

- i) Pour quelles valeurs de a , b et c la matrice A est-elle inversible ?
- ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 17 * Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

- i) Pour quelles valeurs de a , b , c , d , e et f la matrice A est-elle inversible ?
- ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?
- iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?
- iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 18 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 19 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 21 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

Exercice 22 Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.
 ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.

Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1} (X - z_i)$.

- iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n .
 iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?
 v) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1, \dots, z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

3 Sommes directes, projections

Exercice 24 On considère dans \mathbb{C}^3 les vecteurs $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, i, 3)$ et $x_3 = (-2, 1, i)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice 25 On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $x_1 = (1, 1, 1, 2)$, $x_2 = (0, 2, 0, 0)$, $x_3 = (1, -1, 2, 2)$ et $x_4 = (1, -1, 2, 3)$.

- Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- Calculer dans la base \mathcal{X} les composantes des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 .
- Calculer dans la base \mathcal{X} les composantes d'un élément quelconque de \mathbb{R}^4 .

Exercice 26 [Partiel] On considère dans \mathbb{R}^3 les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de \mathbb{R}^3 et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 .

Exercice 27 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

- Soit P_0, P_1, \dots, P_n des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E .
- Soit P un polynôme de degré n . Montrer que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E . Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \dots, P^{(n)})$.

Exercice 28 On considère dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (-1, 1, 2, 1)$, $x_3 = (1, 5, 8, 1)$, $y_1 = (0, 3, 5, 1)$, $y_2 = (1, -1, 1, 0)$, $y_3 = (0, 0, 3, 1)$. On désigne par $F = \text{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$ le sous-espace engendré par x_1, x_2 et x_3 et par $G = \text{Vect}\{y_1, y_2, y_3\}$ celui engendré par y_1, y_2 et y_3 . Donner une base des sous-espaces suivants : $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 29 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{C}^3 . On note f l'application linéaire de \mathbb{C}^3 dans lui-même telle que $f(e_1) = (2, 0, 1)$, $f(e_2) = (1, 2i, 1)$, $f(e_3) = (2, \pi, -2)$. Déterminer les images par f de $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -1, 0)$ et $u_3 = (-3, 0, 2)$. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de \mathbb{C}^3 .

Exercice 30 On rappelle que l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur \mathbb{R} par les formules

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \varepsilon^x \cos x & f_2(x) &= \varepsilon^x \sin x \\ f_3(x) &= \varepsilon^{-x} \cos x & f_4(x) &= \varepsilon^{-x} \sin x \end{aligned}$$

- Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.
- Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f' . Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E .

Exercice 31 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E . On définit l'application $f : F \times G \rightarrow E$ par $f(x, y) = x + y$.

- Montrer que f est linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de f .

c) Montrer que l'on a équivalence entre :

1. f est un isomorphisme,
2. $E = F \oplus G$,
3. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d) On suppose que E est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à f .

Exercice 32 On suppose que σ est une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$. Donner un exemple d'une telle application σ différente de $I_{[0,1]}$. On note

$$F = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}); f \circ \sigma = f\}$$

$$G = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}); f \circ \sigma = -f\}$$

Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 33

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \text{ tq } x + y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$.

- a) Vérifier que $F \oplus G = E$.
- b) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et soit $X = (a, b, c)$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 34 Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} \text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q) \\ \text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p) \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Exercice 35 On désigne par \mathcal{I} le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par \mathcal{P} celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice 36 [Partiel] On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $AX = 0$ possède une solution non nulle.

2. Dans ce cas résoudre $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a - c \end{pmatrix}$.

Exercice 37 [Partiel] Trouver l'ensemble des polynômes P de degré au plus trois tels que $P(0) = 1, P(1) = 2, P'(1) = -2, P'(0) = -4$.

Exercice 38 [Partiel] Trouver l'ensemble des matrices A carrée de taille trois vérifiant les deux conditions suivantes.

— Le noyau de A admet pour base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— L'ensemble des solutions de $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 Réduction des endomorphismes

Exercice 39 On considère les deux matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + i.$$

Calculer

$$\begin{aligned} &P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B), \\ &(P + Q)(B), P(B) + Q(B), P(A + B), P(A) + P(B), \\ &P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A). \end{aligned}$$

Exercice 40 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

- si V est un sous-espace stable par f , alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,
- $\text{Ker}P(f)$ et $\text{Im}P(f)$ sont stables par f .

Exercice 41 Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, puis calculer $\chi_A(A)$.
- En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 42 On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus 3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par

$$\phi(P) = XP''(X).$$

- Calculer $Q(\phi)$ où Q est le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$.
- Calculer le noyau et l'image de ϕ .

Exercice 43 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .

Exercice 44 Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\text{Ker}(f^3 - f - \text{Id}) \oplus \text{Ker} f = E$.

2. [a)]

Montrer que $\text{Im} f \subseteq \text{Ker}(f^3 - f - \text{Id})$.

(b) En déduire que $\text{Im} f = \text{Ker}(f^3 - f - \text{Id})$.

Exercice 45 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 46 On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t , montrer que $(t - 1)$ est valeur propre.

b) Déterminer le sous-espace propre associé.

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t - 1)$?

d) En déduire le spectre de A_t .

e) A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 47 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.

2. Exprimer A en fonction de a, b, U et I_4 .

3. En déduire une expression de A^2 en fonction de a, b, U et I_4 .

4. En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a + b)X + (a - b)(a + 3b)$ annule A .

5. Montrer que A est diagonalisable.

6. Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 48 Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 49 Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2 . En déduire un polynôme annulateur de M . M est-elle diagonalisable ?

2 - Diagonaliser M .

Exercice 50 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A .

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A , alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 51 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2i + 2 & 2i + 4 & -i - 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i + 4 & 4i + 8 & -i - 4 \end{bmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de \mathbb{C}^3 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + (-2)^n h$.

Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique ?

Exercice 52 [Partiel] On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $\det(A)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
- Soit P le polynôme $P = X(X - 1)^2$. Calculer $P(A)$. En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker} A \oplus \text{Ker}(A - Id)^2.$$

- En déduire le spectre de A .
- Calculer la dimension et une base des espaces propres de A .
- Bonus : Calculer A^n .

Exercice 53 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A .

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B .

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A .

Exercice 54 Soit

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

telle que $a + d \neq 0$. Montrer que toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifie $M^2N = NM^2$ vérifie aussi $MN = NM$. On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 55 On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a) Déterminer u^2 , en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u .

Exercice 56 Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 57 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 58 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$ et $\text{Vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f .
3. En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 59 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f . En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f .

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F . Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 60 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que

$$\{0\} \subset \text{Ker}A \subset \text{Ker}A^2 \subset \text{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$$

et déterminer les dimensions respectives de $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}A^2$.

2. Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}A^2 \oplus \text{Vect}(e_1)$.

3. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.

4. Montrer que $Ae_1 \in \text{Ker}A^2$, et que $\text{Ker}A^2 = \text{Ker}A \oplus \text{Vect}(Ae_1)$.

5. Montrer que $A^2e_1 \in \text{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\text{Ker}A = \text{Vect}(A^2e_1) \oplus \text{Vect}(e_2)$.

6. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^4 .

7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2) . Calculer $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C .

Exercice 61 [Examen] On considère l'ensemble \mathcal{A} des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.

2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.

3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\text{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\text{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).

4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice 62 Trouver la décomposition de Dunford de la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 [Partiel] On considère l'application linéaire f donnée par

$$\begin{aligned} M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto {}^t M \end{aligned}$$

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

2. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.

Exercice 64 [Partiel] On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer sans faire de calcul que B n'est pas diagonalisable.
2. Calculer la décomposition de Dunford de B .
3. En déduire la valeur de B^n pour tout entier n .