Aix–Marseille Université 2013-2014

Mathématiques – L2 – MPCI

PLANCHE D'EXERCICES – ALGÈBRE LINÉAIRE 1

1 Systèmes Linéaires

Exercice 1 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier votre solution.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+3y=2 \\ 7x+5y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 3x+6y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=0 \\ 4x+5y=0 \end{cases}$$

Exercice 2 * L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte que la demande totale soit satisfaite ? Nous considérons ici un exemple très simple d'une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ces produits soit respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelle production a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780 respectivement, mais les choses ne sont pas aussi simples que cela. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euros d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euros de biens de B par euros de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateur et la demande interindustrielle.

Exercice 3 * Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 4 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 5 Un magasin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont de P_1€ et P_2€, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2, sont reliées par les équations

$$D_1 = 70 - 2P_1 + P_2$$

$$D_2 = 105 + P_1 - P_2$$

$$S_1 = -14 + 3P_1$$

$$S_2 = -7 + 2P_2.$$

Les deux articles sont-ils en compétition (comme le sont une Volvo et une BMW) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?

Trouver les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

Exercice 6 * Trouver un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x = 6 + 5t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7 * On considère le système linéaire à 3 inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + uy + vz = b_1 \\ ux + y + z = b_2 \end{cases}$$

où u, v, b_1 et b_2 sont des paramètres. **Sans résoudre le système**, répondre aux questions suivantes :

a) Pour quelles valeurs des paramètres pourra-t-on exprimer
   - i) x et y comme fonctions de z ?
   - ii) y et z comme fonctions de x ?
   - iii) z et x comme fonctions de y ?

   (Raisonner sur le système à deux inconnues obtenu en "faisant passer l'une des inconnues au second membre")

b) Comment faut-il choisir les paramètres pour que l'ensemble des solutions du système ne soit pas une droite ?

c) Dans ce dernier cas, comment faut-il choisir les paramètres pour que le système ait des solutions ? Que pouvez-vous dire alors de ses solutions ?

Exercice 8 * Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 4t = 2 \\ y + 3z - 4t = -2 \\ z - 2t = 0 \\ x + y - z + 2t = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t + u = 0 \\ y + 3z - 4t + 2u = 0 \\ x + z - 2t + 3u = 0 \\ x + y + 4z - 6t + 5u = 0 \\ 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 * Échelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et encore...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Déterminants

Exercice 10 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives (donner d'abord leur matrice). Trouver leur inverse quand il existe.

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 5x_2, 5x_1 + 8x_2)$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 + 8x_2)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 9x_3).$$

v) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 8x_3, 2x_1 + 7x_2 + 12x_3).$$

vi) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3 x_{,4}) = (22x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 5x_4, 13x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4, 8x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4, 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 16 * Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 17 * Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e et f la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?

iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 18 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 19 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 21 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

Exercice 22 Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous z_1,..., $z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

v) Soient a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1,..., z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

3 Sommes directes, projections

Exercice 24 On considère dans $\mathbb{C}^3$ les vecteurs $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, \imath, 3)$ et $x_3 = (-2, 1, \imath)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice 25 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, 1, 1, 2)$, $x_2 = (0, 2, 0, 0)$, $x_3 = (1, -1, 2, 2)$ et $x_4 = (1, -1, 2, 3)$.

a) Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

c) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 26 [Partiel] On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \dots, P^{(n)})$.

Exercice 28 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (-1, 1, 2, 1)$, $x_3 = (1, 5, 8, 1)$, $y_1 = (0, 3, 5, 1)$, $y_2 = (1, -1, 1, 0)$, $y_3 = (0, 0, 3, 1)$. On désigne par $F = \mathrm{V}ect\{x_1, x_2, x_3\}$ le sous-espace engendré par x_1, x_2 et x_3 et par $G = \mathrm{V}ect\{y_1, y_2, y_3\}$ celui engendré par y_1, y_2 et y_3. Donner une base des sous-espaces suivants : F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 29 On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On note f l'application linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans lui-même telle que $f(e_1) = (2, 0, 1), f(e_2) = (1, 2\imath, 1), f(e_3) = (2, \pi, -2)$. Déterminer les images par f de $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -1, 0)$ et $u_3 = (-3, 0, 2)$. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 30 On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \varepsilon^x \cos x & f_2(x) = \varepsilon^x \sin x \\ f_3(x) = \varepsilon^{-x} \cos x & f_3(x) = \varepsilon^{-x} \sin x \end{array}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

b) Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 31 Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Montrer que l'on a équivalence entre :

1. f est un isomorphisme,
2. $E = F \oplus G$,
3. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d) On suppose que E est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à f.

Exercice 32 On suppose que σ est une application continue de $[0,1]$ dans lui-même telle que $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$. Donner un exemple d'une telle application σ différente de $I_{[0,1]}$. On note

$$F = \{\, f \in C([0,1],\mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = f \,\}$$
$$G = \{\, f \in C([0,1],\mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = -f \,\}$$

Montrer que $C([0,1],\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 33

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \text{ tq } x + y + 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{V}ect\{(1,0,1)\}$.

a) Vérifier que $F \oplus G = E$.
b) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et soit $X = (a,b,c)$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 34 Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Exercice 35 On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice 36 [Partiel] On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $AX = 0$ possède une solution non nulle.
2. Dans ce cas résoudre $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a - c \end{pmatrix}$.

Exercice 37 [Partiel] Trouver l'ensemble des polynômes P de degré au plus trois tels que $P(0) = 1, P(1) = 2, P'(1) = -2, P'(0) = -4$.

Exercice 38 [Partiel] Trouver l'ensemble des matrices A carrée de taille trois vérifiant les deux conditions suivantes.

– Le noyau de A admet pour base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

– L'ensemble des solutions de $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 Réduction des endomorphismes

Exercice 39 On considère les deux matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + \imath.$$

Calculer

$$P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B),$$

$$(P+Q)(B), P(B) + Q(B), P(A+B), P(A) + P(B),$$

$$P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A).$$

Exercice 40 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

a) si V est un sous-espace stable par f, alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,

b) $\mathrm{Ker} P(f)$ et $\mathrm{Im} P(f)$ sont stables par f.

Exercice 41 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, puis calculer $\chi_A(A)$.

b) En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 42 On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus 3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par

$$\phi(P) = XP''(X).$$

a) Calculer $Q(\phi)$ où Q est le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$.

b) Calculer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 43 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 44 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker} f = E$.
2. [a)]

   Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 45 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 46 On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre.

b) Déterminer le sous-espace propre associé.

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$?

d) En déduire le spectre de A_t.

e) A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 47 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Exprimer A en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
3. En déduire une expression de A^2 en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
4. En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a+b)X + (a-b)(a+3b)$ annule A.
5. Montrer que A est diagonalisable.
6. Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 48 Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 49 Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle diagonalisable ?

2 - Diagonaliser M.

Exercice 50 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A.

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 51 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2\imath + 2 & 2\imath + 4 & -\imath - 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\imath + 4 & 4\imath + 8 & -\imath - 4 \end{bmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + (-2)^n h$. Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique ?

Exercice 52 [Partiel] On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $det(A)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
- Soit P le polynôme $P = X(X-1)^2$. Calculer $P(A)$. En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = KerA \oplus Ker(A - Id)^2.$$

- En déduire le spectre de A.
- Calculer la dimension et une base des espaces propres de A.
- Bonus : Calculer A^n.

Exercice 53 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

Exercice 54 Soit

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

telle que $a + d \neq 0$. Montrer que toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifie $M^2 N = NM^2$ vérifie aussi $MN = NM$. On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 55 On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a)Déterminer u^2, en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 56 Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 57 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 58 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{V}ect(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 59 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 60 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que
$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2 \subset \mathrm{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$$
et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$.
2. Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{V}ect(e_1)$.
3. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.
4. Montrer que $Ae_1 \in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{V}ect(Ae_1)$.
5. Montrer que $A^2e_1 \in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{V}ect(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$.
6. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C.

Exercice 61 [Examen] On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :
$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).
4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice 62 Trouer la décomposition de Dunford de la matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 [Partiel] On considère l'application linéaire f donnée par

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

2. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.

Exercice 64 [Partiel] On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer sans faire de calcul que B n'est pas diagonalisable.
2. Calculer la décomposition de Dunford de B.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout entier n.

5 Espaces préhilbertiens – Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 65 On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ par $\phi(A,B) = tr({}^t\overline{A}B)$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b) Quelle est la norme associée ?

c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

Exercice 66 L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 67 La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice d'un produit scalaire ?

Exercice 68 Soit $E = C([-1,1],\mathbb{C})$, l'espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur $[-1,1]$. Pour chaque $f \in E$, on définit

$$q(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 t^2 e^{-t}\, dt.$$

1 - Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

2 - Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.

Exercice 69 1 - Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

3 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 70 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour} \quad P, Q \in E.$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

b) Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F.

Soit $\pi : E \to E$ la projection orthogonale sur F. Déterminer $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

d) Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice 71 Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, a un vecteur et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, a\rangle + \gamma = 0$.

Exercice 72 [Partiel] On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues définies sur $[0; 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit alors l'application ϕ sur $E * E$ par

$$(f, g) \mapsto \phi(f, g) = \int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

- Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.
- Ecrire l'inégalité de Cauchy Schwarz.
- Les deux fonctions 1 et $\cos$ sont elles orthogonales pour ϕ ?
- Trouver une BON du sous-espace de E engendré par ces deux fonctions.

Exercice 73 L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 74 [Partiel] On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$.

1. Trouver une base orthonormée de P.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur P. Trouver l'expression de $\pi(X)$ où X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice M de π exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice M est elle diagonalisable ?

Exercice 75 [Partiel]

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$ donné par

$$< X, Y >= \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2$$

1. Montrer que $< X, Y >=^t \overline{X}Y$ pour tous vecteur X, Y de $\mathbb{C}^2$.
2. Soit M une matrice de $M_2(\mathbb{C})$, montrer que

$$< MX, Y >=< X,^t \overline{M}Y > .$$

3. Supposons que ${}^t\overline{M}M = Id$, calculer alors $||MX||$.
4. Donner une matrice non diagonale M vérifiant la question précédente.