Comment jouer au billard ?

Nicolas Bédaride

Hypothèses

Définition

- *Une seule bille*
- *Pas de trou sur le bord ou d'obstacle dans la table*
- *Pas de frottement*

Définition

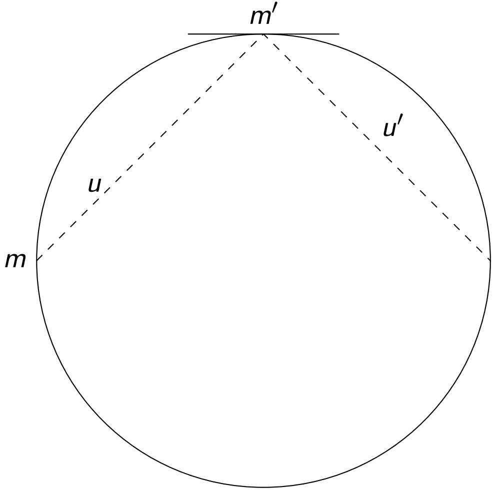
La forme de la table est quelconque:

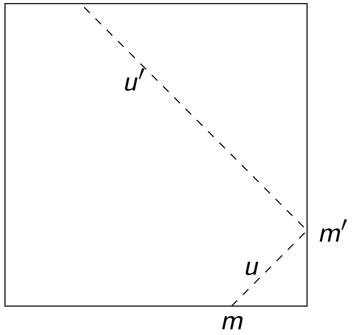
- *Cercle*
- *Ellipse*
- *Polygone*
- *Plus complexe: billard hyperbolique.*

Définition

La définition du billard est alors: On part d'un point du bord m et d'une direction u: On lui associe un couple (m', u') tel que

- m' *est sur le bord*
- (mm') *est parallèle à la direction* u
- u' *est l'image de* u *par la symétrie orthogonale par rapport à la tangente en* m' *au bord.*


m'
u'
u
m


u′
m′
u
m

Interdiction

Il est interdit:

- de partir avec une direction qui est dans le bord de la table.
- d'arriver sur un coin de la table.

On ne perd pas grand chose . . .

On a alors un **système dynamique** (X, T).

$$T : \begin{array}{ccc} \partial P \times [0, 2\pi) & \to & \partial P \times [0, 2\pi) \\ (m, u) & \mapsto & (m', u') \end{array}$$

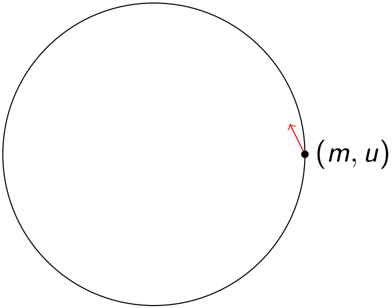
P est la table de billard et ∂P le bord.
On appelle $X = \partial P \times [0, 2\pi)$ **l'espace de phase**.

On a alors un **système dynamique** (X, T).

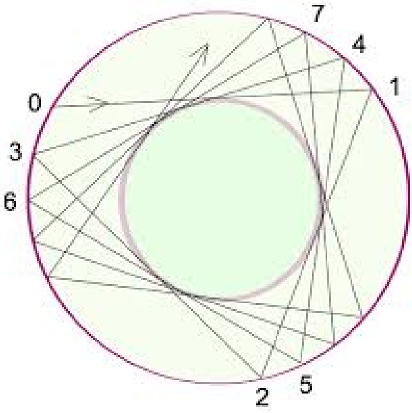
$$T : \begin{array}{ccc} \partial P \times [0, 2\pi) & \rightarrow & \partial P \times [0, 2\pi) \\ (m, u) & \mapsto & (m', u') \end{array}$$

P est la table de billard et ∂P le bord.
On appelle $X = \partial P \times [0, 2\pi)$ **l'espace de phase**.
On a même une mesure invariant $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$.

$$(X, T, \mathcal{B}, \mu)$$


(m, u)

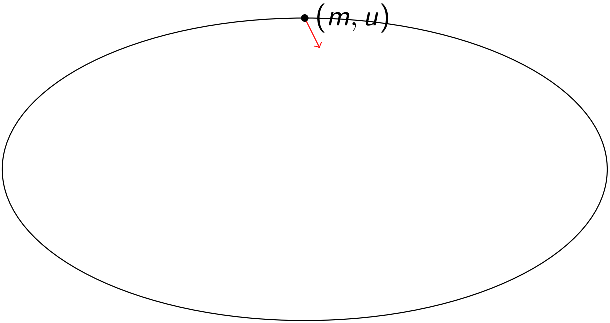
La trajectoire est tangente à un cercle:



Étudier l'orbite revient à étudier

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \to & \mathbb{T} \\ m & \mapsto & m+\theta \end{array}$$

La direction est fixe le long d'une orbite.
La trajectoire est soit périodique soit dense et équirépartie dans le cercle.


(m, u)

La trajectoire est soit:

La trajectoire est soit:

- Tangente à une ellipse

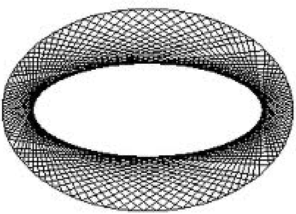
La trajectoire est soit:

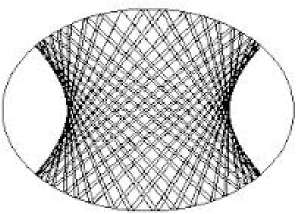
- Tangente à une ellipse
- tangente à une hyperbole

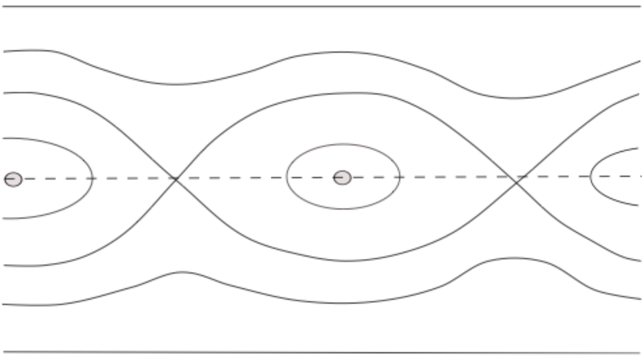
La trajectoire est soit:

- Tangente à une ellipse
- tangente à une hyperbole
- un segment

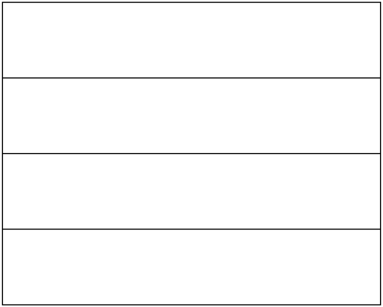
Ce sont des **caustiques**.







Espace des phases pour l'ellipse



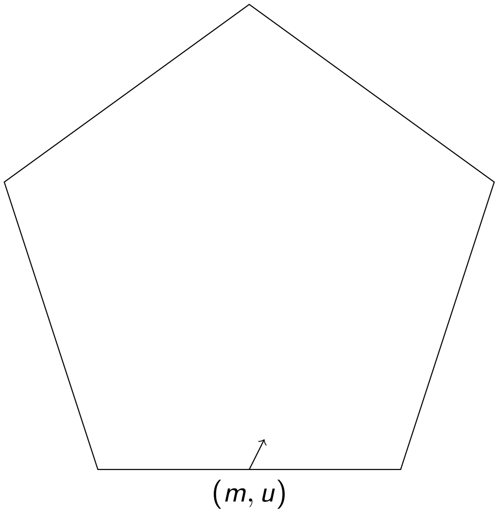
Espace des phases pour le cercle

Conjecture de Birkhoff:

Pour une courbe fermée simple $\mathcal{C}^2$ si T est intégrable alors la courbe est une ellipse.

Conjecture de Birkhoff:

Pour une courbe fermée simple $\mathcal{C}^2$ si T est intégrable alors la courbe est une ellipse.
(X, T) est intégrable s'il existe $f : X \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que chaque ensemble $\{f(m, \theta) = c\}$ est une union finie de points ou de courbes.


(m, u)

Problème

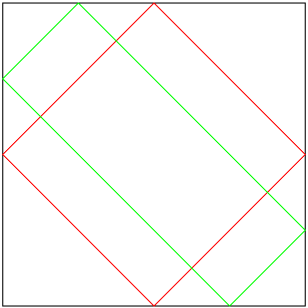
Question

Etant donné une table P peut on trouver un couple (m,u) et un entier n tel que

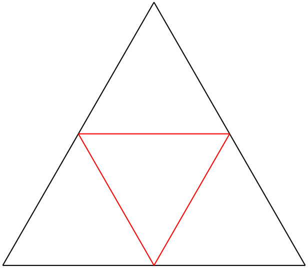
$$T^n(m,u) = (m,u)$$

Cela s'appelle une **trajectoire périodique**.

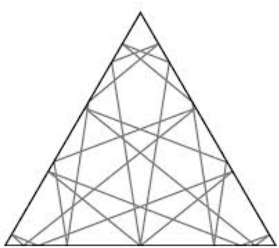
Carré



Triangle équilatéral



Plus compliqué



Théorème (Fagnano)

Dans un triangle aigu on peut toujours trouver une trajectoire périodique.

Théorème (Fagnano)

Dans un triangle aigu on peut toujours trouver une trajectoire périodique.

Théorème (Schwartz 2007)

Dans tout triangle d'angle inférieur à 100 *degrés il existe une trajectoire périodique.*

Théorème (Hooper-Schwartz 2009)

Il existe un voisinage de l'ensemble des triangles isocèles dans lequel tout triangle possède une trajectoire périodique.

Théorème (Hooper-Schwartz 2009)

Il existe un voisinage de l'ensemble des triangles isocèles dans lequel tout triangle possède une trajectoire périodique.

Si P est un polygone, on pose $\ell(P)$ la longueur de la plus petite orbite périodique dans P.

Théorème (Hooper-Schwartz 2009)

Il existe un voisinage de l'ensemble des triangles isocèles dans lequel tout triangle possède une trajectoire périodique.

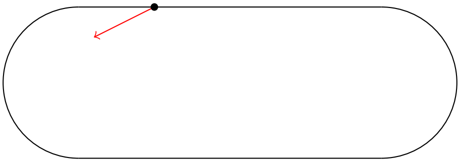
Si P est un polygone, on pose $\ell(P)$ la longueur de la plus petite orbite périodique dans P.

Théorème (Schwartz 2006)

Il existe un voisinage du triangle rectangle $(3, 6)$ *dans lequel* ℓ *n'est pas localement finie.*

Le système (X, T) est ergodique pour la mesure μ si tout ensemble T invariant mesurable est soit de mesure nulle soit son complémentaire est de mesure nulle.

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f \circ T^k(x) = \int_X f(x) d\mu, f \in L^1(X, \mu)$$



Deux segments parallèles et deux demi cercles.

Une trajectoire est soit:

Une trajectoire est soit:

- périodique de période deux.

Une trajectoire est soit:

- périodique de période deux.
- dense.

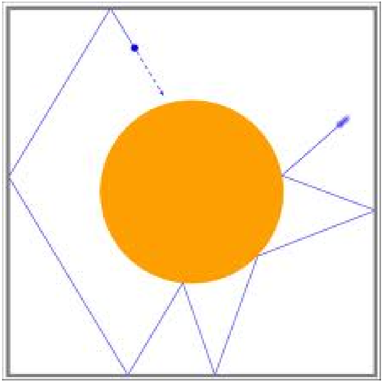
Une trajectoire est soit:

- périodique de période deux.
- dense.

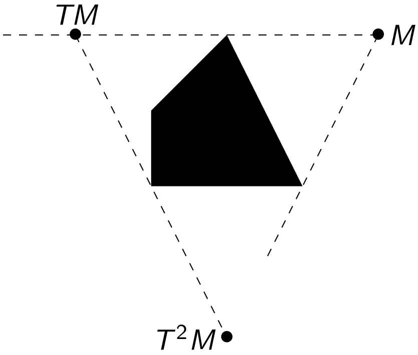
Theorem (Bunimovich)

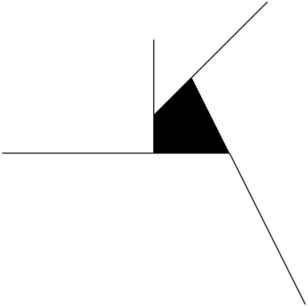
L'application est ergodique et non uniquement ergodique.
Les exposants de Lyapunov sont positifs.

Billard de Sinai:

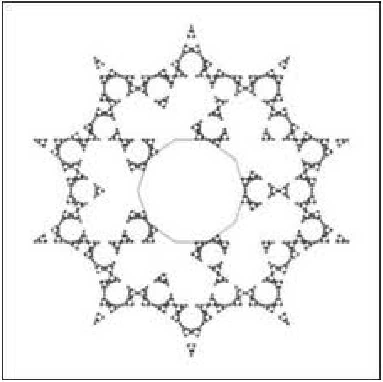


Billard ergodique avec exposant de Lyapunov positif.





$$T : \mathbb{R}^2 \setminus P \to \mathbb{R}^2 \setminus P$$



Orbites de billard dual pour le décagone régulier.

Question

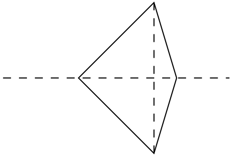
Dynamique du billard dual pour un quadrilatère général ?

Question

Dynamique du billard dual pour un quadrilatère général ?

Théorème (Schwartz)

Existence d'orbite non bornée pour le kite irrationnel.



Références

- **S. Tabachnikov**. Billiards. Panoramas et synthèses.
- **J. Y. Yoccoz**. Billards: conférence.
- **Y. Colin de Verdière**. La dynamique des billards.
- **R. Schwartz**. Programme Mac billiard.

Fin