Trajectoires de billard

Nicolas Bédaride
Institut de Mathématiques de Marseille

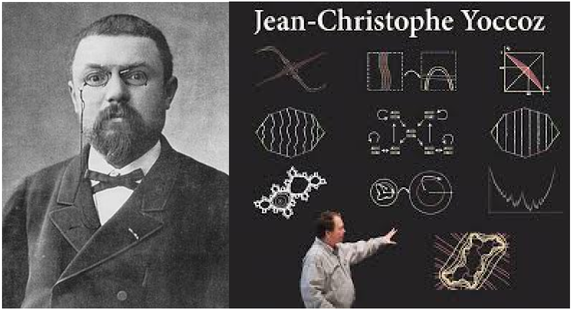


Figure: H. Poincaré et J. C. Yoccoz

Billard= système dynamique

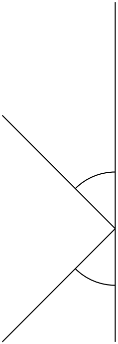
Hypothèses

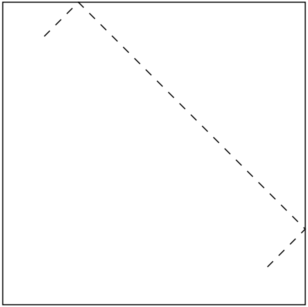
Définition

- *Une seule bille* *pour l'instant*.
- *Elle est assimilée à un point* *pour l'instant*.
- *Pas de trou sur le bord ou d'obstacle dans la table.*
- *Pas de frottement.*

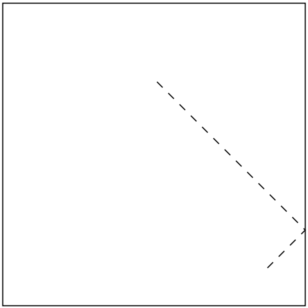
Loi de Descartes

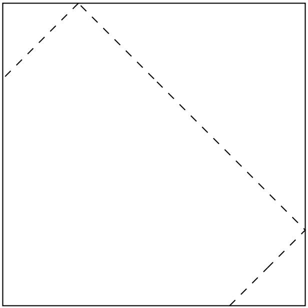
On se déplace dans le billard en ligne droite, et quand on rencontre un bord, la trajectoire rebondit en respectant les angles par rapport au bord.





On peut aussi seulement regarder ce qui se passe sur le bord.

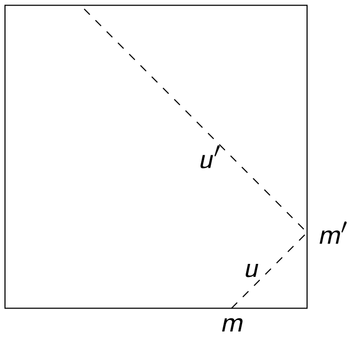




Définition

On part d'un point du bord m et d'une direction u.
On lui associe un couple (m', u') tel que

- m' *est sur le bord*
- (mm') *est parallèle à la direction* u
- u' *est le symétrique de* u *par rapport à la tangente en* m' *au bord.*



u′
m′
u
m

On est passé du **jeu de billard** à l'étude d'une fonction

$$T : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ (m,u) & \mapsto & (m',u') \end{array}$$

L'étude de cette fonction rentre dans les **systèmes dynamiques**.

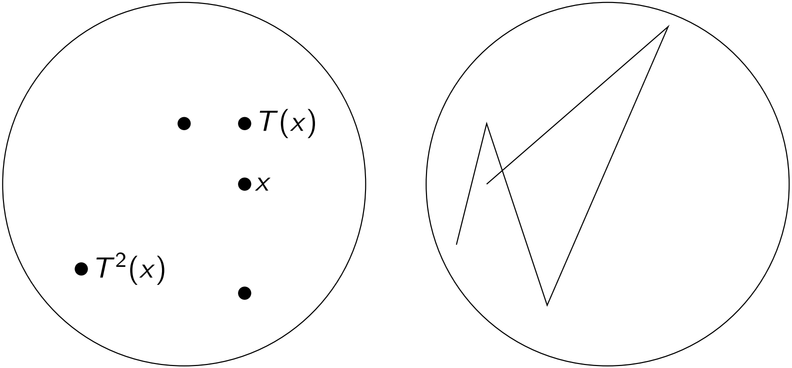
Vocabulaire

Étudier un système dynamique signifie étudier une fonction $T : X \to X$.

Vocabulaire

Étudier un système dynamique signifie étudier une fonction $T : X \to X$.

A partir de $x \in X$, comprendre ou sont $T(x), T(T(x)), \dots T(T(\dots T(x)))$.

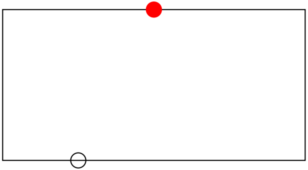


Première question

Comment passer d'un point à un autre en faisant une ou plusieurs bandes ?

Comment passer d'un point à un autre en faisant une ou plusieurs bandes ?

Question proche:
Comment revenir sur le même point ?

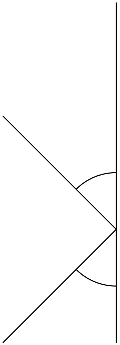


Comment passer de l'un à l'autre en deux, trois ou mille rebonds ?

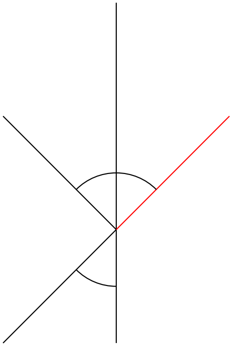
Dépliage

On va expliquer comment trouver de telles trajectoires.

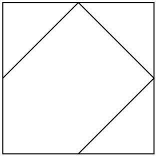
Le bon outil est le **dépliage**.



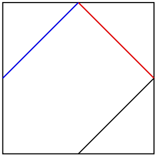
d



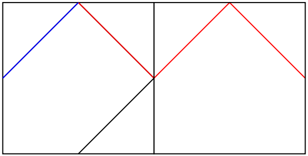
Trajectoire de billard dans un polygone= Droite dans le plan



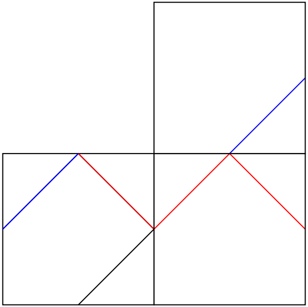
Trajectoire de billard dans un polygone= Droite dans le plan

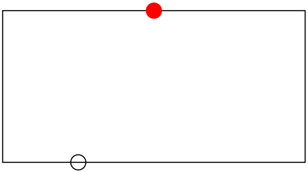


Trajectoire de billard dans un polygone= Droite dans le plan



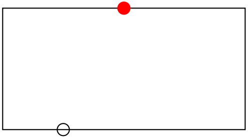
Trajectoire de billard dans un polygone= Droite dans le plan



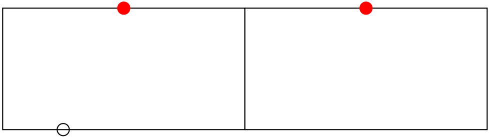


Comment passer de l'un à l'autre en deux rebonds ?

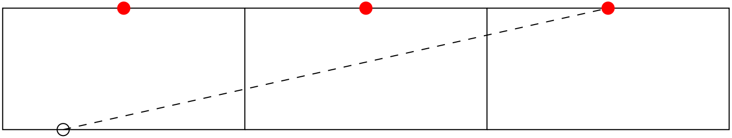
Droite



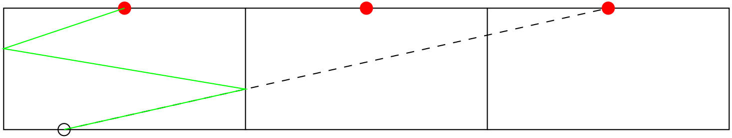
Droite



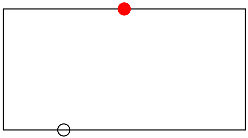
Droite



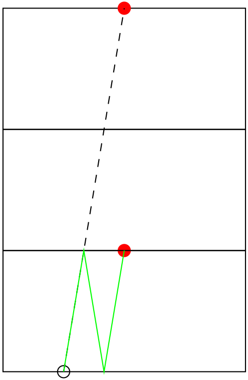
Droite



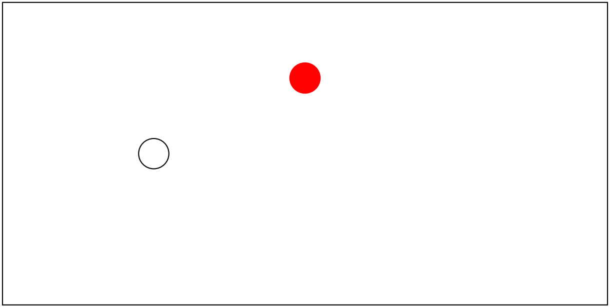
Haut



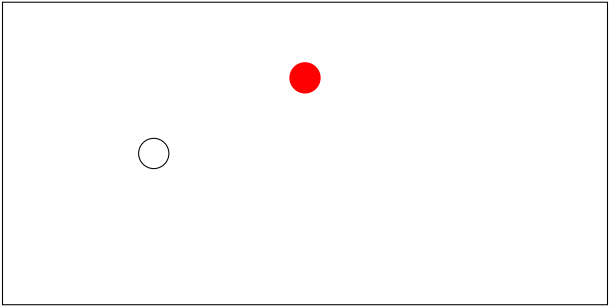
Haut

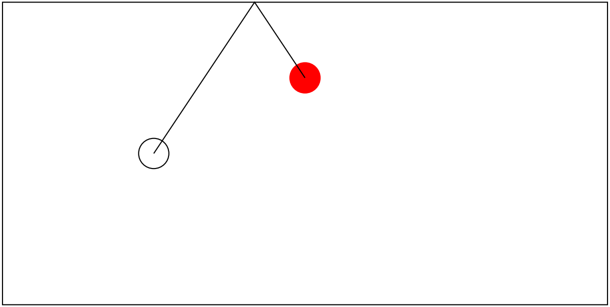


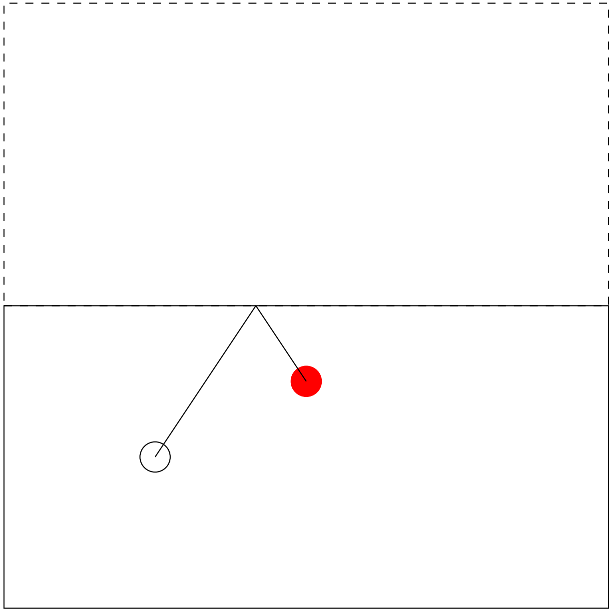
Billes en dehors du bord.

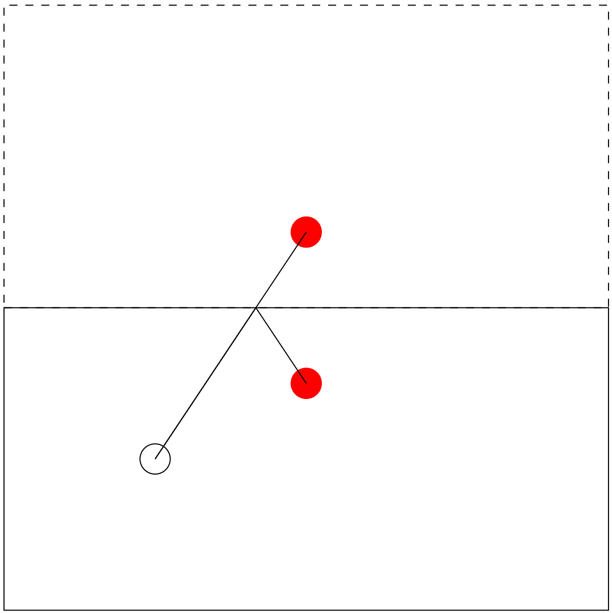


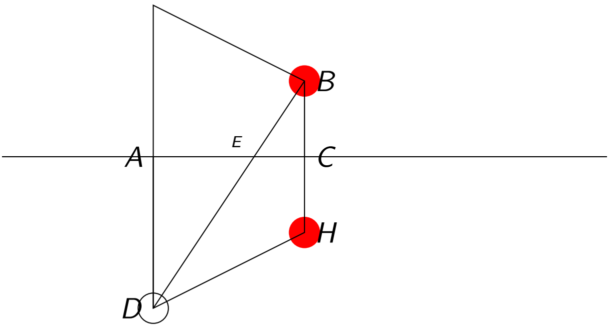
Internet est ton ami







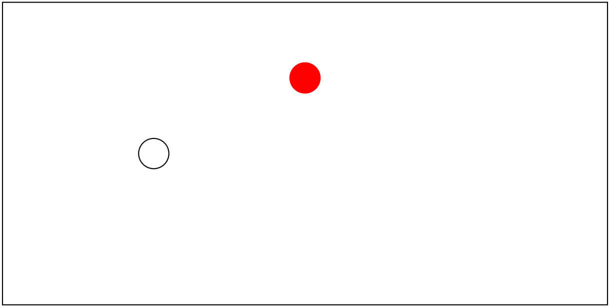




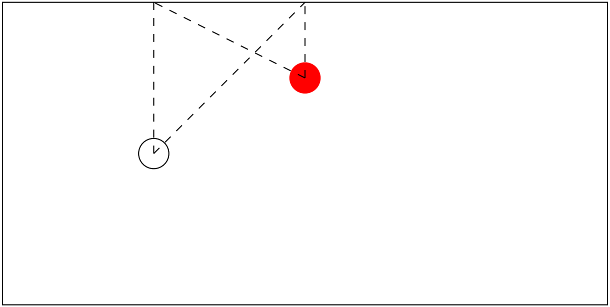
(AD) est parallèle à (BC), donc

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AD}{CB} = \frac{AD}{CH}$$

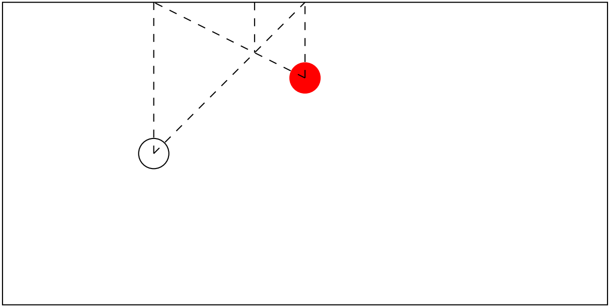
Autre façon de voir le point:



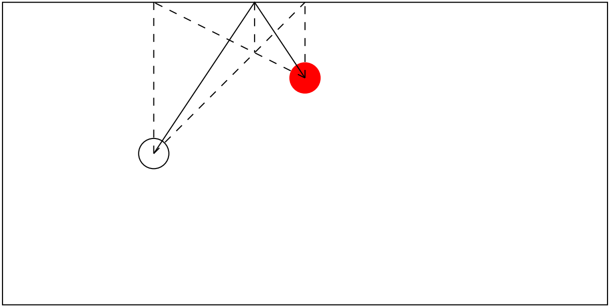
Autre façon de voir le point:



Autre façon de voir le point:



Autre façon de voir le point:



Question très proche:

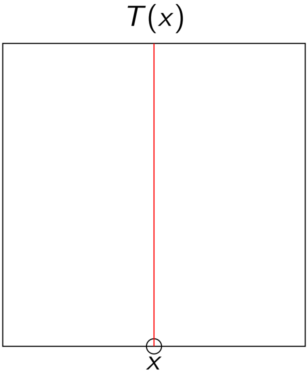
Peut on revenir au même point après rebond ?

Question très proche:

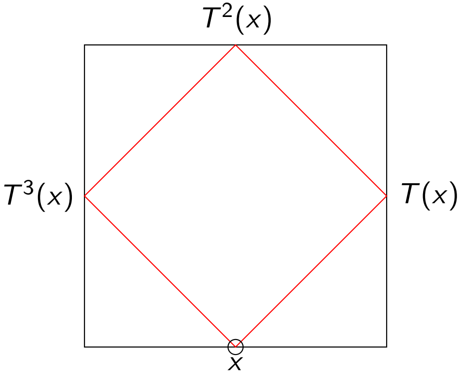
Peut on revenir au même point après rebond ?

Avec n rebonds, cela s'appelle une **trajectoire périodique** de période $n + 1$.

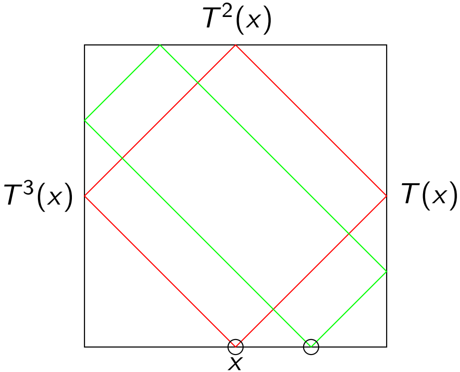
Période 2



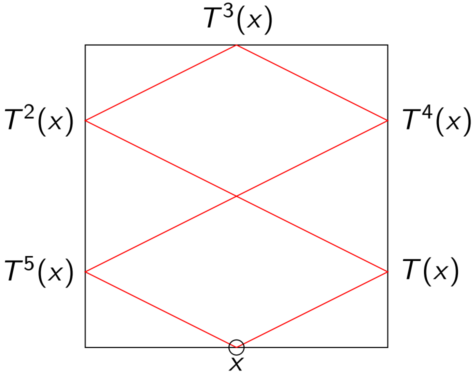
Période 4



Période 4

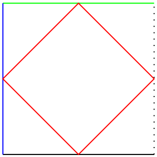


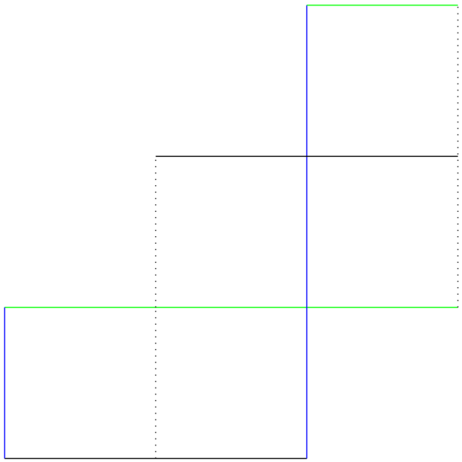
Période 6

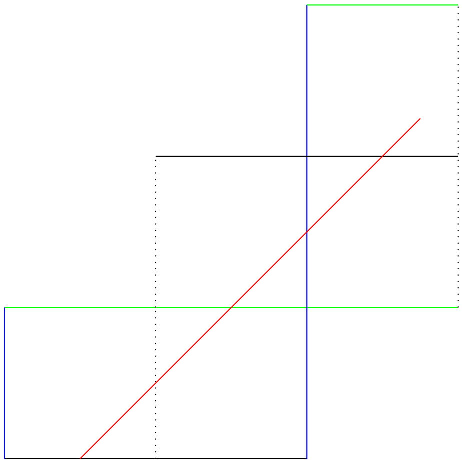


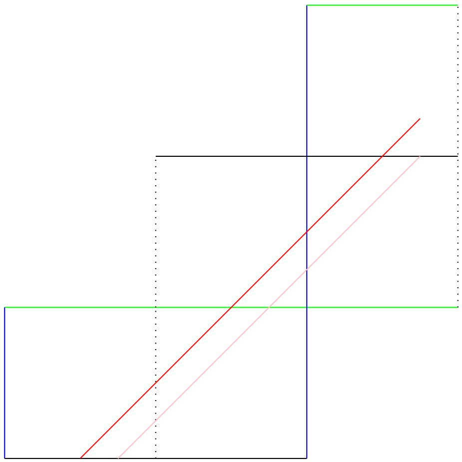
Mais comment on les trouve ?

Encore le dépliage...

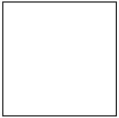


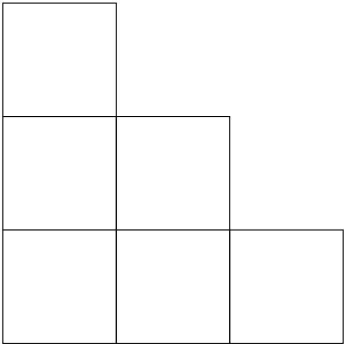


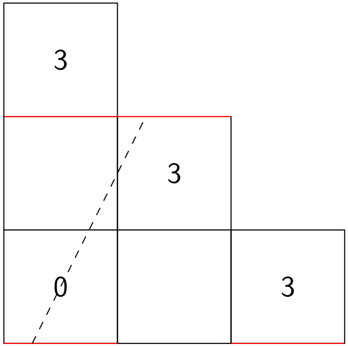


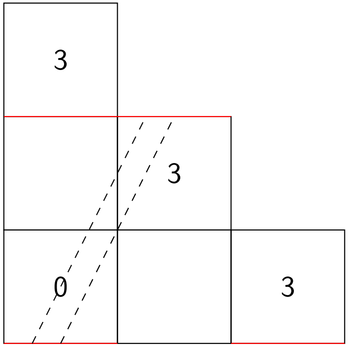


Et la période 3 ?






3
3
0
3


3
3
0
3

Pour vous occuper. . .

Pour vous occuper. . .

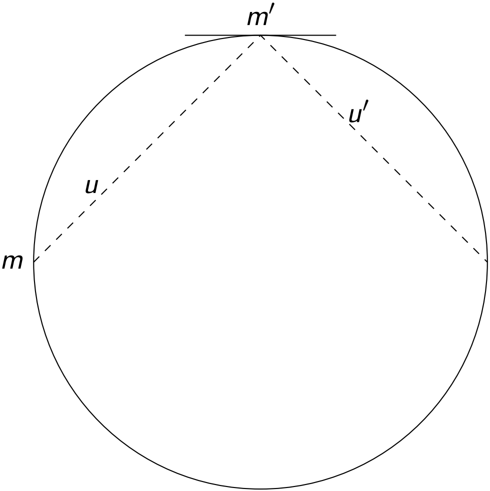
Pouvez vous trouver toutes les trajectoires périodiques dans le carré ?

Deuxième question

Que se passe-t-il si on change la forme de la table ?

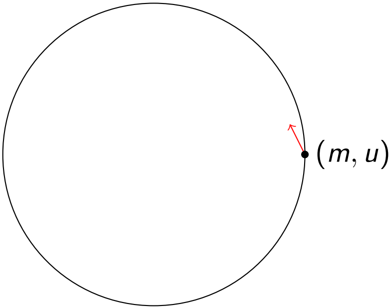
Que se passe-t-il si on change la forme de la table ?

Et si on jouait dans un disque ?

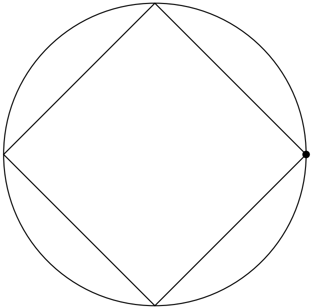


m'
u'
u
m

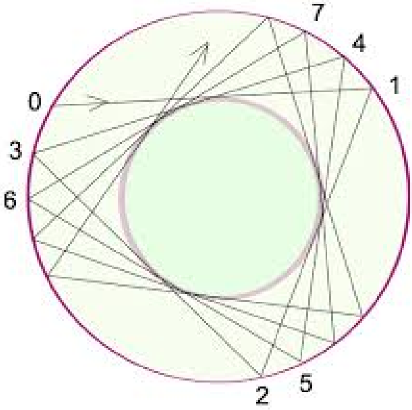
Si on ne vise pas le centre, on ne l'atteint pas.


(m, u)

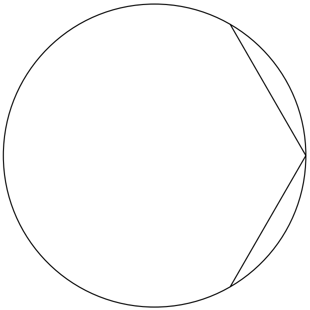
Exemple de trajectoire périodique



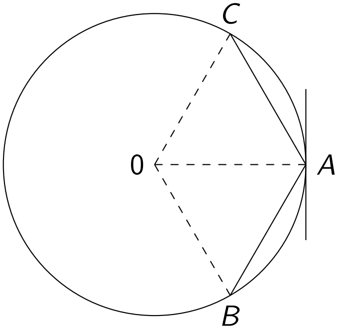
Exemple de trajectoire non périodique



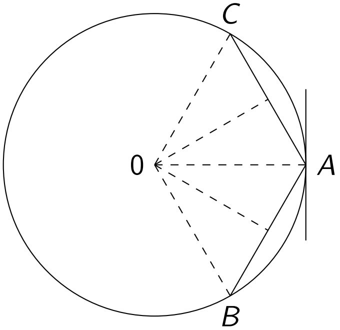
Preuve



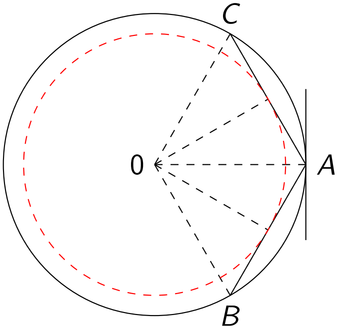
Preuve



Preuve



Preuve



Si on passe par le centre on revient au même point après un rebond.

Si on passe par le centre on revient au même point après un rebond.

Sinon on ne passe jamais par un disque centré à l'origine.

Si on passe par le centre on revient au même point après un rebond.

Sinon on ne passe jamais par un disque centré à l'origine.

Le cercle est une mauvaise table pour jouer.

Si on passe par le centre on revient au même point après un rebond.

Sinon on ne passe jamais par un disque centré à l'origine.

Le cercle est une mauvaise table pour jouer.

Pas pour faire des maths. . .

Troisième question

Comment jouer dans un vrai billard ?

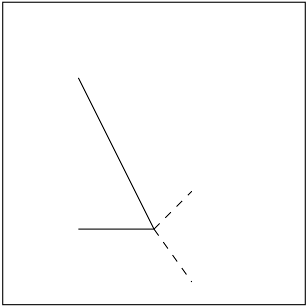
Vrai billard

Vrai billard: Différence avec étude précédente:

- Il y a $n \geq 3$ billes dans un rectangle, et chacune bouge et peut toucher une autre.
- Les billes ne sont pas des points.

Premier problème

Elles rebondissent en suivant les lois de la physique suivant leurs vitesses et leurs directions initiales.



Il faut donc pour chaque bille connaître la position et le vecteur vitesse. Cela fait 4 paramètres. On les regroupe dans un tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

(a_1, b_1) représente la position, et (c_1, d_1) la vitesse.

Il faut donc pour chaque bille connaître la position et le vecteur vitesse. Cela fait 4 paramètres. On les regroupe dans un tableau

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

(a_1, b_1) représente la position, et (c_1, d_1) la vitesse.

Ainsi étudier le billard avec n billes dans le carré revient à étudier une bille dans un objet de grande dimension $(4n)$.

L'objet s'appelle X et un point dedans bouge suivant une fonction T:

$$T : X \to X$$

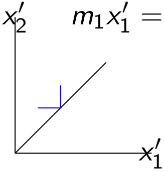
L'objet s'appelle X et un point dedans bouge suivant une fonction T:

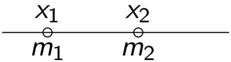
$$T : X \to X$$

On revient aux systèmes dynamiques.

Par exemple étudier 2 points sur une droite de masses m_1, m_2 et de vitesses x_1, x_2 revient à étudier un point, dans une partie du plan, qui rebondit sur une droite.

$$m_1 x_1' = m_2 x_2'$$



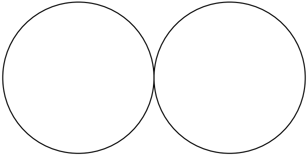


$x_1' = \sqrt{m}_1 x_1, x_2' = \sqrt{m}_2 x_2.$

Deuxième problème

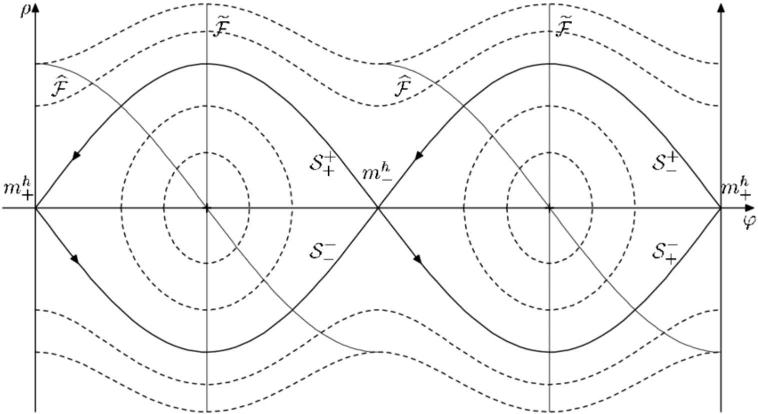
Une bille n'est pas un point.

Changer la forme de la table en une autre plus grosse et plus ronde.



En conclusion pour comprendre le vrai billard, il faut comprendre la dynamique d'un point mais dans un objet plus compliqué qu'un carré.

Espace des phases



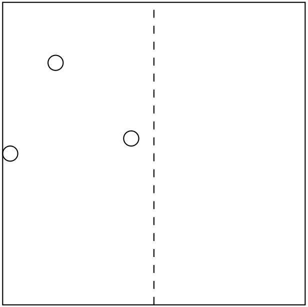
Bonus

Comment se répartissent les billes ?

Bonus

Comment se répartissent les billes ?

Il faut faire de la théorie ergodique.




Hypothèse de Boltzmann

Pour un système composé d'un très grand nombre de particules, elle affirme qu'à l'équilibre, la valeur moyenne d'une grandeur calculée de manière statistique est égale à la moyenne d'un très grand nombre de mesures prises dans le temps.

Théorie ergodique. Birkhoff 1931.

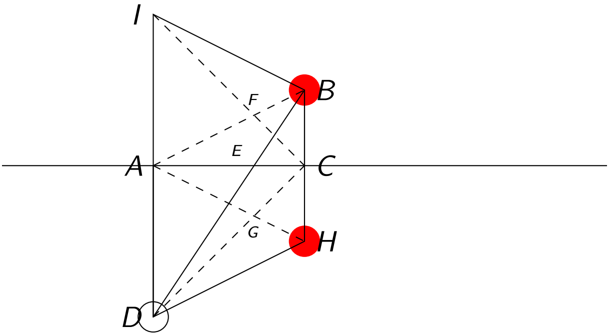
En terme plus mathématiques, une grandeur est une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. L'hypothèse compare alors

$$\limsup_{+\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f \circ T^i(x)$$

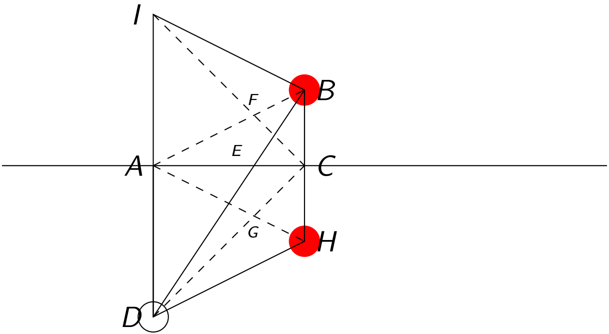
$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu$$

Fin.
Questions ?

Bonus I



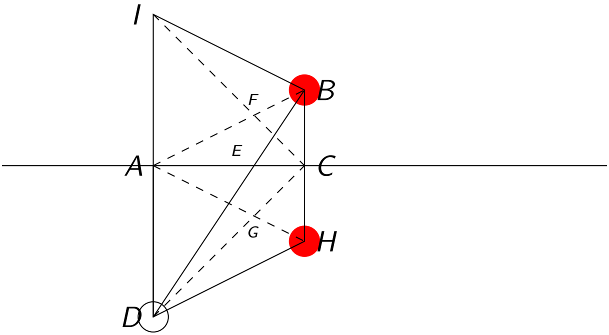
Bonus I



Thalès et symétrie en action

$$(EF) \parallel (BC), \quad (EG) \parallel (BC)$$

Bonus I



Thalès et symétrie en action

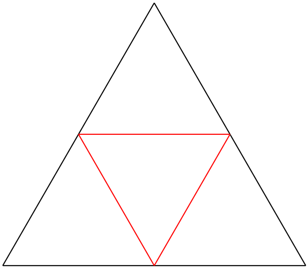
$$(EF) \parallel (BC), \quad (EG) \parallel (BC)$$

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AD}{BC} \quad \frac{AD}{CH} = \frac{GD}{GC}$$

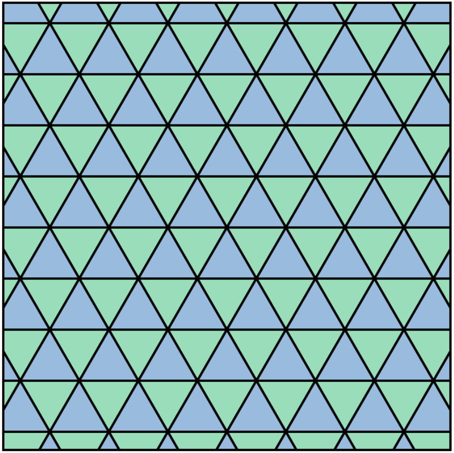
Bonus II

Et dans un triangle ?

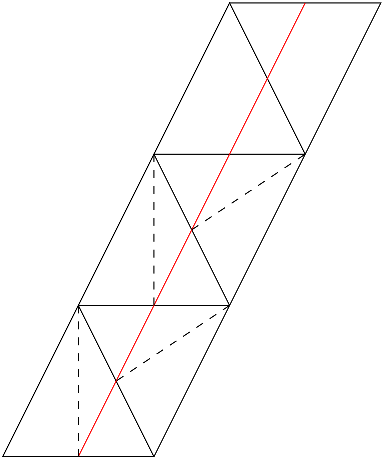
Triangle équilatéral



L'ensemble des dépliages forme un pavage du plan



Triangle équilatéral, dépliage



Et dans un autre triangle ?

Et dans un autre triangle ?

Beaucoup plus compliqué.

Problème de trajectoires périodiques

Dans un triangle équilatéral: dessin précédent.

Problème de trajectoires périodiques

Dans un triangle équilatéral: dessin précédent.

Proposition

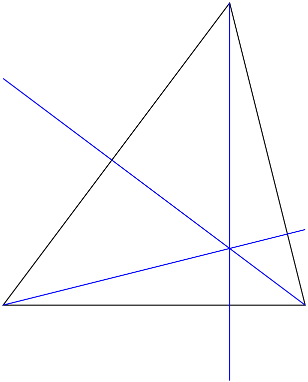
Dans un triangle aigu pour avoir une trajectoire périodique, il suffit de prendre les pieds des hauteurs.

Problème de trajectoires périodiques

Dans un triangle équilatéral: dessin précédent.

Proposition

Dans un triangle aigu pour avoir une trajectoire périodique, il suffit de prendre les pieds des hauteurs.



Dans un triangle obtus ?

Dans un triangle obtus ?

Théorème (Schwartz 2007)

Dans tout triangle d'angle inférieur à 100 *degrés il existe une trajectoire périodique.*