UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE **FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES**

MA102 — Géométrie et polynômes

Travaux dirigés

2011–2012

Sommaire

---

1. Nombres complexes

Exercice 1. Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2. Ecrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

(1) Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
(2) Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3.

(1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+3i, \quad z_2 = -1-\sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{4}{3}i, \quad z_4 = -2, \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

(2) Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

Exercice 4. Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

Exercice 5. Comment choisir l'entier naturel n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel ? un imaginaire ?

Exercice 6. Montrer que si $|z| \le k < 1$ alors $1-k \le |1+z| \le 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 7. Résoudre l'équation $\exp(z) = \sqrt{3} + 3i$.

Exercice 8. Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$
$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \; ; \; z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \; ; \; 4z^2-2z+1=0 \; ;$$
$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 10. On note $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$.

(1) Mettre j et j^2 sous forme algébrique.
(2) Vérifier que $1+j+j^2=0$.
(3) Factoriser le polynôme z^3-8i.

Exercice 11. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante:

$$z^2-(1+a)(1+i)z+\left(1+a^2\right)i=0,$$

où a est un paramètre réel.

(1) Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication: on pourra déterminer les racines carrées complexes de $-2i(1-a)^2$).
(2) On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

(1) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$?

(2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.

(3) Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = (1-i)\,/\,\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

Exercice 14. Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 15. (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a:

$$(z-1)\left(1+z+z^2+...+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$

et en déduire que, si $z \neq 1$, on a:

$$1+z+z^2+...+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$

(2) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ix}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme:

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + ... + \exp((n-1)ix),$$

et en déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos((n-1)x) \\ Y_n &= \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin((n-1)x). \end{aligned}$$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(1) $z^5 = 1$.
(2) $z^5 = 1 - i$.
(3) $z^3 = -2 + 2i$.
(4) $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 17.

(1) Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.
(2) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
(3) En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 18. Soit ϵ une racine n-ième de l'unité ; calculer

$$S = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1}.$$

Exercice 19.

(1) Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

(2) Donner, sous forme polaire, les solutions dans $\mathbb{C}$ de :

$$z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0.$$

(Indication : poser $Z = z^3$; calculer $(9+i)^2$)

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système:

$$|z-1| \leq 1 \text{ et } |z+1| \leq 1.$$

Exercice 21. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 22 (Triangle équilatéral)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
(2) j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
(3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

(4) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 23 (Sommets d'un carré)**.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} a + ib & = c + id \\ a + c & = b + d. \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des points d'affixes a, b, c, d ?
En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4$.

Exercice 24 (Configuration de points)**.** Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que ...

(1) z, z^2, z^4 sont alignés.
(2) $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle.
(3) $z, \frac{1}{z}, -i$ sont alignés.

Exercice 25 ($a+b+c=1$)**.** Trouver $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc = 1. \end{cases}$

Exercice 26 ($u+v+w=0$)**.** Soient u, v, w trois complexes unitaires tels que $u+v+w=0$. Montrer que $u = jv = j^2w$ ou $u = jw = j^2v$.

Exercice 27 ($z+1/z=2$)**.** Trouver les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$.

Exercice 28 (Symétrique par rapport à une droite)**.** Les points A, B, M ayant pour affixes a, b, z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

Exercice 29 (Orthocentre)**.** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que si deux des rapports $\frac{d-a}{b-c}, \frac{d-b}{c-a}, \frac{d-c}{a-b}$ sont imaginaires purs, alors le troisième l'est aussi.

Exercice 30 (Similitudes dans un triangle)**.** On donne un triangle ABC, un réel positif k et un angle θ. On note S_M la similitude directe de centre M, de rapport k et d'angle θ. Soit C_1 déduit de C par S_A, B_1 déduit de B par S_C, A_1 déduit de A par S_B. Montrer que les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont même centre de gravité.

Exercice 31 (Centre du cercle circonscrit)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, affixes de points A, B, C non alignés. Calculer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABC en fonction de a, b, c.

2. Géométrie

Exercice 32. Soit P un plan muni d'un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs ccordonnées dans R.

(1) Donner un vecteur directeur, la pente et des représentations cartésiennes et paramétriques des droites (AB) suivantes :
  (a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$
  (b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$
  (c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$.
(2) Donner des représentations cartésiennes et paramétriques des droites passant par A et dirigées par $\vec{u}$ avec :
  (a) $A(2,1)$ et $\vec{u}(-3,-1)$
  (b) $A(0,1)$ et $\vec{u}(1,2)$
  (c) $A(-1,1)$ et $\vec{u}(1,0)$.

(3) Donner des représentations paramétriques et cartésiennes (que l'on pourra déduire des paramétriques) des droites définies comme suit :
   (a) passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3,
   (b) passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x,
   (c) passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite $D : 8x + 4y = 3$,
   (d) passant par le point $(1, 0)$ et parallèle à la droite $D : x - y + 5 = 0$.

Exercice 33.

(1) Les trois points A, B et C de P sont-ils alignés ? Si oui donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.
   (a) $A(-3, 3)$, $B(5, 2)$ et $C(2, 1)$,
   (b) $A(1, 1)$, $B(-2, 2)$ et $C(2, 1)$,
   (c) $A(4, -3)$, $B(0, -1)$ et $C(2, -2)$,
   (d) $A(2, -1)$, $B(1, -2)$ et $C(-3, 4)$.

(2) Dans les cas suivant, donner un vecteur directeur de D et déterminer si le point C appartient ou non à D
   (a) $(D) : 3x + 5y + 1 = 0,$ $\qquad C(3, -2)$.
   (b) $(D) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{array} \right.,$ $\qquad C(5, 3)$.

Exercice 34. Dans l'exercice suivant, on considère des couples de deux droites D_1 et D_2 : on doit déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues. Si elles sont sécantes, on déterminera les coordonnées du point d'intersection, et si elles sont parallèles ou confondues on déterminera un vecteur directeur.

(1) $(D_1) : 3x + 5y - 2 = 0$ et $(D_2) : x - 2y + 3 = 0$
(2) $(D_1) : 2x - 4y + 1 = 0$ et $(D_2) : -5x + 10y + 3 = 0$
(3) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - s \\ y = 2 + 3s \end{array} \right.$
(4) $(D_1) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{array} \right.$
(5) $(D_1) : x - 2y + 3 = 0$ et $D_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \end{array} \right.$
(6) $(D_1) : 3x - 2y + 1 = 0$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \end{array} \right.$

Exercice 35. On considère les deux droites du plan $D : 2x - 3y + 4 = 0$ et $D' : x + 3y + 1 = 0$. On considère le point A, intersection des deux droites et le point B de coordonnées $(3, 8)$. Donner une équation de (AB).

Exercice 36. On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x + 2y = 3, (AC) : x + y = 2, (BC) : 2x + 3y = 4$.

(1) Donner les coordonnées des points A, B, C.
(2) Donner les coordonnées des milieux A', B', C' de $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement.
(3) Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 37. On considère les droites $D : x + 2y = 5$ et $D' : 3x - y = 1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $(5, 2)$.

(1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
(2) Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à D passant par B.
(3) Donner une équation cartésienne de la parallèle à D' passant par B.
(4) Soit C le point de coordonnées $(2, -7)$). Donner une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[B, C]$. Δ est-elle parallèle à D ? Et à D' ?

Exercice 38.

(1) On considère la famille des droites $D_\lambda : x + \lambda y + 1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.
   (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$? Si oui donner des équations de ces droites.

(2) On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x + (3-m)y + m + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
   Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x + y - 1 = 0$? Si oui, laquelle?

Exercice 39. On considère les trois points de P : $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

(1) Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
(2) Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
(3) Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

Exercice 40.

(1) Calculer les angles :
   (a) entre les vecteurs $u_1 = (\sqrt{3}, 2)$ et $v_1 = (1, 3\sqrt{3})$,
   (b) entre les vecteurs $u_2 = (1, \sqrt{2})$ et $v_2 = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2} + 2)$,
   (c) du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.
(2) Calculer la distance du point A à la droite D :
   (a) $A(1,1)$ et $D : 2x + y - 1 = 0$
   (b) $A(2,-1)$ et $D : 3x - 2y + 4 = 0$
   (c) $A(3,3)$ et $D : -x + 3y + 2 = 0$.

Exercice 41. Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \alpha$.

Exercice 42. Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA = kMB$.

Exercice 43. On se donne 2 droites D_1 et D_2 ayant comme vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

(1) Perpendiculaire commune à ces deux droites.
   (a) On suppose que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires et on note $\vec{n} := \vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$.
      (i) Montrer que le plan P_1 contenant D_1 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur et le plan P_2 contenant D_2 et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur se coupent en une droite Δ.
      (ii) Montrer que Δ est une perpendiculaire commune à D_1 et D_2 (c'est à dire Δ coupe D_1 et D_2, et est orthogonale à D_1 et à D_2).
      (iii) Montrer que Δ est la seule perpendiculaire commune à D_1 et D_2.
   (b) Comment construire Δ dans le cas où D_1 et D_2 sont parallèlles ?
(2) Distance entre ces deux droites.
   Soit $H_1 := D_1 \cap \Delta$ et $H_2 := D_2 \cap \Delta$.
   Montrer que pour tout $A_1 \in D_1$ et tout $A_2 \in D_2$, on a $d(A_1, A_2) \geq d(H_1, H_2)$.
   $d(H_1, H_2)$ est appelée *distance entre les deux droites* D_1 *et* D_2.
(3) Donner des équations cartésiennes pour Δ et calculer la distance entre les deux droites D_1 et D_2 dans le cas suivant :
   (a) $(D_1) : \begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ -x - 2y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} -x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$
   (b) $(D_1) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

(c) $(D_1) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 2t \end{cases}$

(d) $(D_1) : \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice 44. Soit deux plans $\begin{cases} \pi : & ux + vy + wz + h & = & 0 \\ \pi' : & u'x + v'y + w'z + h' & = & 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que si π et π' sont sécants, tout plan passant par leur droite d'intersection D a une équation du type

$$\lambda(ux + vy + wz + h) + \mu(u'x + v'y + w'z + h') = 0$$

et réciproquement, tout plan ayant une équation de ce type, (pour un couple (λ, μ) donné) passe par D.

(2) Si π et π' sont parallèles, que représente l'ensemble des plans d'équation :

$$\lambda(ux + vy + wz + h) + \mu(u'x + v'y + w'z + h') = 0$$

Exercice 45. Soit les droites D et D' non coplanaires :

$$(D) \begin{cases} x - y + z + 1 & = & 0 \\ 2x + y - z & = & 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (D') \begin{cases} x + 2y + z & = & 0 \\ 2x - 2y - 2z - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Trouver des équations de leur perpendiculaire commune.

Exercice 46. Ecrire l'équation du plan orthogonal à la droite (D_1) d'équation$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et passant par le point $A(1, 1, 1)$.

Exercice 47. Soit C la courbe d'équation $x^2 - xy + y^2 = 0$ dans le plan P rapporté à un repère orthonormé.

(1) La courbe C a-t-elle des points d'intersection avec le rectangle ouvert R dont les sommets sont :

$$\begin{array}{rcl} A & = & (-3, 2) \\ B & = & (4, 2) \\ C & = & (4, -1) \\ D & = & (-3, -1). \end{array}$$

(2) Même question pour le rectangle fermé R' de sommets :

$$\begin{array}{rcl} A' & = & (-1, 4) \\ B' & = & (2, 4) \\ C' & = & (2, 1) \\ D' & = & (-1, 1). \end{array}$$

3. Transformations du plan

Exercice 48. Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$.

Exercice 49 (Équations affines)**.**

(1) Montrer que toute droite du plan admet pour équation complexe : $az+\overline{az}=b$ avec $a\in\mathbb{C}^*, b\in\mathbb{R}$.
(2) Soient $a,b,c\in\mathbb{C}$, a,b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E=\{z\in\mathbb{C}\text{ tq } az+b\overline{z}=c\}$.

Exercice 50. Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on pose $Z=\frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

(1) $|Z|=1$.
(2) $|Z|=2$.
(3) $Z\in\mathbb{R}$.
(4) $Z\in i\mathbb{R}$.

Exercice 51. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes:

(1) $z\mapsto z+3-i$
(2) $z\mapsto 2z+3$
(3) $z\mapsto iz+1$
(4) $z\mapsto (1-i)z+2+i$

Exercice 52. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x,y)\mapsto x+iy=z,$$

où z est l'affixe de M. Soit $f:P\to P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z'=\frac{z-i}{z+i}$.

(1) Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie?
(2) Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert

$$H:=\{M(x,y)\in P\mid y>0.\}?$$

(3) En déduire l'image par f de H.

Exercice 53. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y)\mapsto x+iy=z,$$

où z est l'affixe de M. Soit $g:P\to P$ qui à tout point M d'affixe $z\neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z'=\frac{1-z}{1+z}$.

(1) Calculer $z'+\bar{z'}$ pour $|z|=1$.
(2) En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

Exercice 54. (1) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z}-1)$.
(2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1+z^2$ soient alignées.

Exercice 55.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $(z-2)/(z-1)=i$. On donnera la solution sous forme algébrique.
(2) Soit M,A, et B les points d'affixes respectives $z,1,2$. On suppose que $M\neq A$ et que $M\neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z-2)/(z-1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 56. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y)\mapsto x+iy=z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit g : Prg$P$ qui à tout point M d'fixe $z\neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z'=\frac{1-z}{1+z}$.

(1) Calculer $z'+\bar{z'}$ pour $|z|=1$.
(2) En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

4. Arithmétique

Exercice 57. Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 58. Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 59. Sachant que l'on a $96842 = 256 \times 375 + 842$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 96842 par chacun des nombres 256 et 375.

Exercice 60. Soient $m \geq 1$ et $n \geq 2$ des entiers ; montrer que :
(1) $n - 1 | n^m - 1$;
(2) $(n-1)^2 | n^m - 1$ si et seulement si $n - 1 | m$.

Exercice 61. Soit a un entier relatif quelconque, démontrer que le nombre $a(a^2-1)$ et, plus généralement, $a(a^{2n}-1)$ est divisible par 6.

Exercice 62. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 63. Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y. Application : démontrer, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 64. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 65. Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 7$ soit divisible par 13.

Exercice 66. On considère le nombre $m = 2^n p$, dans lequel n désigne un entier naturel quelconque et p un nombre premier. Dresser la liste des diviseurs de m, y compris 1 et m lui-même, et calculer, en fonction de m et p, la somme S de tous ces diviseurs.

Exercice 67. Calculer le pgcd des nombres suivants :
(1) 126, 230.
(2) 390, 720, 450.
(3) 180, 606, 750.

Exercice 68.
(1) Calculer le ppcm des nombres : 108 et 144 ; 128 et 230 ; 6, 16 et 50.
(2) Montrer que si $a \geq 1$ et $b \geq 1$ sont des entiers de pgcd d et, si on pose $a = da'; b = db'$, le ppcm de a et b est $da'b'$.
(3) Montrer que si a, b, c sont des entiers supérieurs à 1, on a :

$$\text{ppcm}(a, b, c) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a, b), c).$$

Exercice 69. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 70. Si a, b, c, d sont des entiers supérieurs à 1, montrer que l'on a :

$$(a, b, c, d) = ((a, b), (c, d))$$

où (,) désigne le pgcd .

Exercice 71.
(1) Soient a, b, c des entiers relatifs tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, montrer que pour que l'équation

$$ax + by = c$$

ait une solution (x, y) en entiers relatifs x et y, il faut et il suffit que le pgcd de a et b divise c.

(2) Résoudre en entiers relatifs les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1,$$
$$7x - 9y = 6,$$
$$11x + 17y = 5.$$

Exercice 72. Soient a et b deux entiers tels que $a \geq b \geq 1$ et $pgcd(a, b) = 1$.

(1) Montrer que $\mathrm{pgcd}(a + b, a - b) = 1$ ou 2,
(2) Si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\mathrm{pgcd}(a + b, ab) = 1$,
(3) Si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, montrer que $\mathrm{pgcd}(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

Exercice 73. Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 74. Déterminer le pgcd de 99 099 et 43 928. Déterminer le pgcd de 153 527 et 245 479.

Exercice 75. Déterminer l'ensemble de tous les couples (m, n) tels que

$$955m + 183n = 1.$$

Exercice 76. Calculer, en précisant la méthode suivie,

$$a = \mathrm{pgcd}(720, 252) \qquad b = \mathrm{ppcm}(720, 252)$$

ainsi que deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$.

5. Polynômes

Exercice 77. Effectuer la division euclidienne du polynôme $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$. Même exercice lorsque $P = X^4 - 2X\cos(2\varphi) + 1$ et $Q = X^2 - 2X\cos(\varphi) + 1$.

Exercice 78. Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division de P par $X - b$ est -1, $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 79. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X - 1)^2$.

Exercice 80. Pour quelles valeurs de m le polynôme $P = (X + 1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par le polynôme $Q = X^2 + X + 1$?

Exercice 81. Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - X$.

Exercice 82. Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ de façon à ce que le polynôme $aX^{n+1} - bX^n + 1$ soit divisible par le polynôme $(X - 1)^2$. Calculer alors le quotient des deux polynômes.

Exercice 83. Existe-t-il un polynôme P de degré 7 tel que $(X - 1)^4$ divise $P(X) + 1$ et $(X + 1)^4$ divise $P(X) - 1$?

Exercice 84. Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

(1) $P = 1$ par $Q = 1 - X$, à l'ordre n,
(2) $P = 1 + X$ par $Q = 1 + X^2$ à l'ordre 5,
(3) $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{12}$ par $Q = 1 - 2X^2 + X^4$ à l'ordre 5.

Exercice 85. Calculer $\mathrm{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

(1) $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,

(2) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 86. Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Exercice 87. Déterminer $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X^3 + 1)A + (X^2 + X + 1)B = 1$.

Exercice 88. Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(X - 1)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

Exercice 89. Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

(1) Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
(2) Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 90. Soit n un entier positif.

(1) Déterminer le pgcd des polynômes $(X^n - 1)$ et $(X - 1)^n$.
(2) Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que $(X^3 - 1)U + (X - 1)^3 V = X - 1$. En donner un.

Exercice 91. Montrer que les éléments $X^2 + X$, $X^2 - X$, $X^2 - 1$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux, mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux.

Exercice 92. Trouver tous les polynômes U et V de $\mathbf{R}[X]$ tels que $AU + BV$ soit un pgcd de A et B avec $A = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ et $B = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$.

Exercice 93. Calculer le pgcd D des polynômes A et B dŽfinis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

(1) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
(2) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 94.

(1) Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irationnelle.
(2) Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 95. Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme à coefficients entiers premiers entre eux (c'est à dire tels que les seuls diviseurs communs à tous les a_i soient -1 et 1). Montrer que si $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux est une racine rationnelle de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exercice 96. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 97. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

(1) Vérifier que i est racine de P.
(2) En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
(3) Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P = X^4 + X^2 + 1$, $Q = X^{2n} + 1$, $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 98. Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 99. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$.

Exercice 100. Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 101. Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 102. Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Exercice 103. Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

(1) $X^3 - 3$.
(2) $X^{12} - 1$.

Exercice 104. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$$

*　　*

*