UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE **FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES**

MA302 — Algèbre linéaire 2

Travaux dirigés

2009–2010

Sommaire

1. Sommes directes, projections

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{C}^3$ les vecteurs $x_1 = (1, 0, 1), x_2 = (1, \imath, 3)$ et $x_3 = (-2, 1, \imath)$. Démontrer qu'ils forment une famille libre.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, 1, 1, 2), x_2 = (0, 2, 0, 0), x_3 = (1, -1, 2, 2)$ et $x_4 = (1, -1, 2, 3)$.
a) Vérifier que $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
b) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
c) Calculer dans la base $\mathcal{X}$ les composantes d'un élément quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3 (Partiel)**.** On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer les composantes dans cette base d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.
a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.
b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X + a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

Exercice 5. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (-1, 1, 2, 1)$, $x_3 = (1, 5, 8, 1)$, $y_1 = (0, 3, 5, 1)$, $y_2 = (1, -1, 1, 0)$, $y_3 = (0, 0, 3, 1)$. On désigne par $F = \mathrm{V}ect\{x_1, x_2, x_3\}$ le sous-espace engendré par x_1, x_2 et x_3 et par $G = \mathrm{V}ect\{y_1, y_2, y_3\}$ celui engendré par y_1, y_2 et y_3. Donner une base des sous-espaces suivants: F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 6. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On note f l'application linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans lui-même telle que $f(e_1) = (2, 0, 1), f(e_2) = (1, 2\imath, 1), f(e_3) = (2, \pi, -2)$. Déterminer les images par f de $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -1, 0)$ et $u_3 = (-3, 0, 2)$. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 7. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x & f_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x \\ f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x & f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x \end{array}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

b) Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 8. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit l'application $f : F \times G \to E$ par $f(x, y) = x + y$.

a) Montrer que f est linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) Montrer que l'on a équivalence entre :

(i) f est un isomorphisme,

(ii) $E = F \oplus G$,

(iii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

d) On suppose que E est de dimension finie. Appliquer le théorème du rang à f.

Exercice 9. On suppose que σ est une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $\sigma \circ \sigma = I_{[0,1]}$. Donner un exemple d'une telle application σ différente de $I_{[0,1]}$. On note

$$F = \{\, f \in C([0, 1], \mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = f \,\}$$

$$G = \{\, f \in C([0, 1], \mathbb{R})\,;\ f \circ \sigma = -f \,\}$$

Montrer que $C([0, 1], \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \text{ tq } x + y + 3z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{(1, 0, 1)\}$.

a) Vérifier que $F \oplus G = E$.

b) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et soit $X = (a, b, c)$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 11. Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Exercice 12. On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

2. Réduction des endomorphismes

Exercice 13. On considère les deux matrices suivantes,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
On considère les trois polynômes
$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + \imath.$$
Calculer
$$P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B),$$
$$(P+Q)(B), P(B) + Q(B), P(A+B), P(A) + P(B),$$
$$P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A).$$

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que:
a) si V est un sous-espace stable par f, alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,
b) $\mathrm{Ker}P(f)$ et $\mathrm{Im}P(f)$ sont stables par f.

Exercice 15. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$
a) Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, puis calculer $\chi_A(A)$.
b) En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 16. On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus 3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par
$$\phi(P) = XP''(X).$$
a) Calculer $Q(\phi)$ où Q est le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$.
b) Calculer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 17. Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 18. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que
$$f^4 = f^2 + f.$$
(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}f = E$.

(2) a) Montrer que $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 19. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 20. On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre.

b) Déterminer le sous-espace propre associé.

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$?

d) En déduire le spectre de A_t.

e) A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 21. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

(1) Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.

(2) Exprimer A en fonction de a, b, U et I_4.

(3) En déduire une expression de A^2 en fonction de a, b, U et I_4.

(4) En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a+b)X + (a-b)(a+3b)$ annule A.

(5) Montrer que A est diagonalisable.

(6) Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que:

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 22. Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 23. Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle diagonalisable?

2 - Diagonaliser M.

Exercice 24. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que:

- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A.

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 25. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2\imath + 2 & 2\imath + 4 & -\imath - 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\imath + 4 & 4\imath + 8 & -\imath - 4 \end{bmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + (-2)^n h$. Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique?

Exercice 26 (Partiel)**.** On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $det(A)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
- Soit P le polynôme $P = X(X-1)^2$. Calculer $P(A)$. En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = KerA \oplus Ker(A - Id)^2.$$

- En déduire le spectre de A.
- Calculer la dimension et une base des espaces propres de A.
- Bonus: Calculer A^n.

Exercice 27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

Exercice 28. Soit
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
telle que $a + d \neq 0$. Montrer que toute matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifie $M^2N = NM^2$ vérifie aussi $MN = NM$. On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 29. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a)Déterminer u^2, en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 30. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 31. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 32. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et
$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.

(2) Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{Vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.

(3) En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 33. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 34. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible:

(1) Montrer que

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2 \subset \mathrm{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$$

et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$.

(2) Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$.

(3) Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.

(4) Montrer que $Ae_1 \in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$.

(5) Montrer que $A^2e_1 \in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$.

(6) Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.

(7) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

Exercice 35 (Examen)**.** On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient:

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

(1) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.

(2) Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.

(3) Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).

(4) Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

3. Dualité

Exercice 36. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une forme linéaire non nulle définie sur E est surjective.

Exercice 37. a) Montrez que les trois vecteurs suivant forment une base de $\mathbb{R}^3$.

$$(1, 2, 4); (0, 1, 1); (1, 1, 1).$$

b) Trouvez la base duale.

Exercice 38. Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque $X = (x, y)$ par $f_1(X) = x + y$ et $f_2(X) = x + 2y$.
a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de $[\mathbb{R}^2]^*$.
b) Exprimer f_1 et f_2 à l'aide de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
c) Quelles sont dans la base (f_1, f_2) les composantes des formes linéaires suivantes : $f(X) = x, g(X) = 2x - 3y$ et $h(X) = x - y$.
d) Déterminer la base de $\mathbb{R}^2$ dont (f_1, f_2) est la base duale.

Exercice 39. On note C l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et C_0 le sous-espace des suites qui convergent vers 0.
a) On note Φ l'application de C dans $\mathbb{R}$ qui à chaque suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ associe $\Phi(x) = \lim_n x_n$. Montrer que Φ est une forme linéaire sur C. Quel est son noyau?
b) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ on lui associe la suite $y = (y_k)_{k\geq 1}$ définie par $y_1 = \Phi(x)$ et pour $k = 1, 2, \ldots$ $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$. Montrer que $y \in C_0$. Montrer que l'application $u : C \to C_0$ ainsi définie est un isomorphisme.
c) On désigne par C_{st} le sous-espace de C des suites constantes. Montrer que $C = C_0 \oplus C_{st}$.

Exercice 40. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(x, y, z) = x + 2y + 3z$, $f_2(x, y, z) = -2z$, $f_3(x, y, z) = 2x + 2y + 3z$.
a) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
b) Trouver la base antéduale.

Exercice 41. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires $f_i : P \mapsto \int_0^1 t^i P(t)dt$ pour $i = 0 \ldots 3$.
a) Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
b) Trouver la base antéduale.

Exercice 42. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit les applications ϕ, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de E dans $\mathbb{R}$ par:

$$\phi(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad \phi_1(P) = P(0), \quad \phi_2(P) = P(1), \quad \phi_3(P) = P'(0), \quad \text{pour tout } P \in E.$$

(1) Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.
(2) Déterminer la base (u_1, u_2, u_3) antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).
(3) a) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\phi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3$
    b) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha_i = \int_0^1 u_i(t)dt$.
    c) Calculer α_i pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 43. On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. On rappelle que $\mathcal{U} = (\,1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On considère les quatre formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $\mathbb{R}_3[X]$ par

$$f_1(p) = p(0) \qquad f_2(p) = p(1) \qquad f_3(p) = p'(0) \qquad f_4(p) = p'(1).$$

1 - Déterminer les composantes de chacune des formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 dans la base duale de la base $\mathcal{U}$.

2 - Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $[\mathbb{R}_3[X]]^*$.

3 - Déterminer la base de $\mathbb{R}_3[X]$ dont (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale.

4 - Montrer que l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie, pour chaque p, par

$$\Phi(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), f_4(p))$$

est un isomorphisme.

5 - On note f la forme linéaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ définie, pour chaque p par, $f(p) = \displaystyle\int_0^1 p(t)dt$. Déterminer les composantes de f dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4).

Exercice 44. On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. A chaque $\theta \in [\mathbb{R}[X]]^*$, on associe la suite $\sigma(\theta) = (\theta(X^n))_{n\geq 0}$. Montrer que $\sigma : [\mathbb{R}[X]]^* \to E$ est un isomorphisme.

Exercice 45. Soit un espace vectoriel E et $\phi, \psi \in E^*$ deux formes linéaires non nulles. On suppose que $\mathrm{Ker}\phi \subset \mathrm{Ker}\psi$.

1 - Montrer que $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Ker}\psi$.

2 - Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) = 1$. Montrer que $\psi = \psi(a)\phi$. [On pourra écrire un élément de E comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\phi$ et d'un multiple de a.]

3 - Application - Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\{\phi \in E^* : \phi(x) = 0 \quad \forall x \in H\}$ est une droite de E^*.

Exercice 46. Soit E l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels telles que pour tout n : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie.

b) Soient f_0 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_0(u) = u_0$ et f_1 l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $f_1(u) = u_1 + u_0$. Trouver la base duale de (f_0, f_1).

Exercice 47. On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $tr(A)$ comme la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

a) Montrer que tr est une forme linéaire.

b) Montrez que pour toutes matrices A, B on a $tr(AB) = tr(BA)$.

Exercice 48 (Examen)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2. On considère l'application:

$$\begin{array}{cccc} \langle\ ,\ \rangle : & E^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \to & \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)tdt. \end{array}$$

(1) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(2) Soit $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 - \frac{2}{3}$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de E.

(3) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base (P_1, P_2, P_3) pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E.

(4) Soit ϕ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) la forme linéaire sur E définie par:

$$\phi_i(P) = \langle e_i, P\rangle.$$

Montrer que (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est une base de E^*.

(5) Déterminer la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).

4. Espaces préhilbertiens – Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 49. On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ par $\phi(A, B) = tr({}^t\overline{A}B)$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b) Quelle est la norme associée ?

c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

Exercice 50. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 51. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice d'un produit scalaire ?

Exercice 52. Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{C})$, l'espace vectoriel des fonctions complexes continues définies sur $[-1, 1]$. Pour chaque $f \in E$, on définit

$$q(f) = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 t^2 e^{-t}\, dt.$$

1 - Montrer que q est une forme quadratique définie positive.

2 - Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski.

Exercice 53. 1 - Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

3 - Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 54. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour} \quad P, Q \in E.$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

b) Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F.

Soit $\pi : E \to E$ la projection orthogonale sur F. Déterminer $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

d) Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice 55. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, a un vecteur et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, a\rangle + \gamma = 0$.

Exercice 56. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E.

1 - Montrer que $u^* \circ u$ ne possède que des valeurs propres ≥ 0.

2 - On note λ la plus petite valeur propre et μ la plus grande valeur propre de $u^* \circ u$. Montrer que, pour chaque $x \in E$, on a $\lambda\|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \mu\|x\|^2$.

Exercice 57 (Partiel)**.** On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues définies sur $[0; 2\pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit alors l'application ϕ sur $E * E$ par

$$(f, g) \mapsto \phi(f, g) = \int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

- Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.
- Ecrire l'inégalité de Cauchy Schwarz.
- Les deux fonctions 1 et cos sont elles orthogonales pour ϕ ?
- Trouver une BON du sous-espace de E engendré par ces deux fonctions.

Exercice 58. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 59. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1 - Montrer que si $f = f^*$ et $\forall x \in E : \langle x, f(x)\rangle = 0$ alors $f = 0$.

2 - Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f \circ f^* = f^* \circ f$.

(ii) $\forall x, y \in E : \langle f(x), f(x)\rangle = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle$.

(iii) $\forall x \in E : \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

3 - Si $\dim(E) = 2$ et si $f \circ f^* = f^* \circ f$ alors la matrice de f dans une base orthonormée est soit symétrique, soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

4 - On suppose désormais que $\dim(E) = 3$ et que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

a) Montrer que f a au moins une valeur propre réelle qu'on notera λ. Montrer que E_λ et $E_\lambda^\perp$ sont stables par f et f^*.

b) Montrer que si f n'est pas symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et deux réels a et b (avec $b \neq 0$) tels que $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 60. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien. On désigne par $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit $v \in E$ un vecteur non nul, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par:

$$u(x) = x + \lambda \langle x, v\rangle v \quad \text{pour tout } x \in E.$$

(1) a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Rappeler la caractérisation de l'adjoint de f.

b) Montrer que u est autoadjoint.

(2) a) Soit $x \in E$. Calculer $\|u(x)\|^2$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit un endomorphisme orthogonal.

(3) a) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que le spectre de f est inclus dans l'ensemble $\{-1, 1\}$.

b) On suppose que $u \in \mathcal{O}(E)$ et que $\lambda \neq 0$. Montrer que le spectre de u est l'ensemble $\{-1, 1\}$ si $dimE \geq 2$. Donner une interprétation géométrique de u.

5. Formes quadratiques, formes hermitiennes

Exercice 61 (Formule de polarisation)**.** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E et ϕ une forme hermitienne sur E telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x, x)$. Pour tout $x, y \in E$, développer $q(x + y)$, $q(x - y)$, $q(x + iy)$, $q(x - iy)$. En déduire que la forme hermitienne ϕ est unique, caractérisée par:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) + iq(x - iy) - iq(x + iy))$$

pour tout $x, y \in E$.

Exercice 62. On considère les applications suivantes:

(i) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & 2x^2 + y^2 \end{array}$

(ii) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$

(iii) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & 3xz + y^2 \end{array}$

(iv) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y) & \mapsto & 3x\bar{y} + 3\bar{x}y + |z|^2 \end{array}$

(v) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & xy + yz + zt + tx \end{array}$

(vi) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C} \\ & (x, y, z) & \mapsto & x\bar{x} + |y|^2 + \bar{z}z + \bar{x}y + x\bar{y} - y\bar{z} - \imath\bar{y}z \end{array}$

(vii) $\begin{array}{cccc} q: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & x^2 - 2y^2 + 2xy + yz. \end{array}$

1 - Dans chaque cas, montrer que q est une forme quadratique (pour cela, on explicitera la forme polaire ϕ associée ‡ q).

2 - Donner la matrice M de q dans la base canonique. A partir de M, déterminer le rang de q, déterminer le noyau Ker$q$. Est-ce que Ker$q$ est égal au cône isotrope C_q?

3 - Dans les cas (i) et (ii), on peut faire facilement un dessin: tracer des courbes de niveau $q(x, y) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$; pour $a = 0$, qu'obtient-on? La terminologie *cône* pour le cône isotrope est-elle "bien choisie"? Faire un dessin dans le cas (iii).

4 - Donner une décomposition en carrés de la forme q (on utilisera l'algorithme de Gauss). En déduire la signature de q. Retrouver le rang de q. Déterminer les cas où ϕ est un produit scalaire.

Exercice 63. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1 - Montrer que $q(A) = det(A)$ est une forme quadratique.

2 - Déterminer sa signature.

Exercice 64. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des fonctions polynômiales réelles de degré inférieur ou égal à 2 et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P'(0)P(1)$.

1 - Montrer que q est une forme quadratique sur E.

2 - Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E.

3 - Déterminer $E^{\perp}$. En déduire le rang de q.

4 - Déterminer le cône isotrope C_q de q. Déterminer une base de E formée de vecteurs isotropes. C_q est-il un sous-espace vectoriel de E ?

5 - Déterminer une base q-orthogonale. En déduire la signature de q.

Exercice 65. On considère la forme quadratique:

$$q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+4y-z)^2 + (3x-2y+2z)^2 + (7x+3z)^2. \end{array}$$

Donner la signature et le rang de q.

6. Un peu de géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Exercice 66. On considère les matrices suivantes:

(i) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1 - Dans chaque cas, repérer les propriétés remarquables de la matrice A (est-elle autoadjointe? est-ce une isométrie?).

2 - Lorsque c'est possible, diagonaliser la matrice A dans une base orthonormale.

3 - Dans les cas (ii) et (iii), reconnaître la transformation de $\mathbb{R}^3$ représentée par la matrice A.

Exercice 67. 1 - Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

2 - Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 68. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(1) a) Justifier que A est diagonalisable dans une base orthonormée.

b) Déterminer une matrice $O \in SO_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telles que:

$$A = OD{}^tO.$$

c) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Déterminer et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points X de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation:

$${}^tXAX = 1.$$

(2) La matrice A est-elle la matrice d'un produit scalaire?

Exercice 69. On fixe un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Tracer les courbes d'équations:

(i) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$

(ii) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

(iii) $(2x + 3y)^2 + 4x + 6y - 5 = 0$

Exercice 70. On fixe un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation:

$$mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0.$$

On discutera selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$.

7. Équations différentielles linéaires

Exercice 71. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ \frac{dy}{dt} &= x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ \frac{dz}{dt} &= -x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$$

Donner toutes les solutions qui satisfont $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

Exercice 72. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) Cherchez deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

c) Complétez les en une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Résoudre le système $X' = AX$.

Exercice 73. Transformer chaque équation différentielle (linéaire scalaire du second ordre) suivante en un système différentiel linéaire du premier ordre:

(1) $y'' + 4y' + 3y = 0$,

(2) $y'' - 6y' + 9y = 0$,

(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Résoudre les systèmes ainsi obtenus.

Exercice 74. On considère l'équation différentielle suivante:

$$(E): \quad x^2y'' - 2y = x,$$

et l'équation homogène associée:

$$(E_0): \quad x^2y'' - 2y = 0.$$

a) Déterminer une solution polynômiale y_1 de l'équation (E_0).

b) Calculer le Wronskien de l'équation (E_0).

c) En utilisant y_1 et le Wronskien, déterminer une solution y_2 de l'équation (E_0) linéairement indépendante de y_1.

d) Déterminer une solution particulière y_0 de l'équation (E). On pourra éventuellement utiliser la méthode de la variation de la constante.

e) Donner la solution générale de l'équation (E).