Aix–Marseille Université 2019-2020

Mathématiques – L2 –S3– MPCI

EXERCICES

Première partie

Algèbre linéaire

1 Systèmes Linéaires

Exercice 1 Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 2 Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 5x & +4y & +3z & = & 2 \\ 6x & +3y & +2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -2z & = & 1 \\ -x & +3y & & = & 0 \\ & -2y & +z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -2z & +4t & = & 2 \\ & y & +3z & -4t & = & -2 \\ & & z & -2t & = & 0 \\ x & +y & -z & +2t & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrrcr} x & +2y & -2z & +4t & +u & = & 0 \\ & y & +3z & -4t & +2u & = & 0 \\ x & & +z & -2t & +3u & = & 0 \\ x & +y & +4z & -6t & +5u & = & 0 \\ & 3y & & +2t & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Échelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et encore...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 5 Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e et f la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?

iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 6 Trouver les décomposition LU des matrices du deuxième exercice.

2 Déterminants

Exercice 7

1. Lister les éléments de S_4.
2. Trouver leurs signatures.
3. Pour chaque élément σ trouver un entier n non nul tel que $\sigma^n = Id$.

Exercice 8 Décomposer en produit de cycles à support disjoints les permutations suivantes

1. $(1234) \circ (34)$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $(12) \circ (13) \circ (14)$

Exercice 9 A une permutation σ de S_n, on associe la matrice M_σ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $det(M_\sigma)$.

Exercice 10 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 15 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 16 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. Montrer que c'est égal à $P(1)P(j)P(j^2)$ ou $P(X) = a + bX + cX^2$.

Exercice 18 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous z_1,..., $z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

v) Soient a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1,..., z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

3 Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que deg $P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

Exercice 22 On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^x \cos x & f_2(x) = e^x \sin x \\ f_3(x) = e^{-x} \cos x & f_3(x) = e^{-x} \sin x \end{array}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

b) Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 23 Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p+q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p+q$.

Exercice 24 On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice 25 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $AX = 0$ possède une solution non nulle.
2. Dans ce cas résoudre $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a-c \end{pmatrix}$.

Exercice 26 On considère une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice de l'application dans cette nouvelle base.

4 Réduction des endomorphismes

Exercice 27 On considère les deux matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + i.$$

Calculer

$$P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B),$$

$$(P+Q)(B), P(B) + Q(B), P(A+B), P(A) + P(B),$$

$$P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A).$$

Exercice 28 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

a) si V est un sous-espace stable par f, alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,

b) $\ker P(f)$ et $\mathrm{I}mP(f)$ sont stables par f.

Exercice 29 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, puis calculer $\chi_A(A)$.

b) En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 30 On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus 3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par

$$\phi(P) = XP''(X).$$

a) Calculer $Q(\phi)$ où Q est le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$.

b) Calculer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 31 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 32 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3 - f - \mathrm{Id}) \oplus \ker f = E$.
   2. [a)]

      Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subseteq \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

(b) En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 33 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 34 On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre.

b) Déterminer le sous-espace propre associé.

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$?

d) En déduire le spectre de A_t.

e) A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 35 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Exprimer A en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
3. En déduire une expression de A^2 en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
4. En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a+b)X + (a-b)(a+3b)$ annule A.
5. Montrer que A est diagonalisable.
6. Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 36 Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 37 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle diagonalisable ?

2 - Diagonaliser M.

Exercice 38 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A.

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 39 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2i+2 & 2i+4 & -i-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i+4 & 4i+8 & -i-4 \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + (-2)^n h$. Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique ?

Exercice 40 [Partiel] On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer $det(A)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?
- Soit P le polynôme $P = X(X-1)^2$. Calculer $P(A)$. En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = KerA \oplus Ker(A - Id)^2.$$

- En déduire le spectre de A.
- Calculer la dimension et une base des espaces propres de A.
- Bonus : Calculer A^n.

Exercice 41 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

Exercice 42 On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a)Déterminer u^2, en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 43 Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 44 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 45 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{V}ect(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 46 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 47 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que
$$\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$$
et déterminer les dimensions respectives de $\ker A$ et $\ker A^2$.
2. Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \mathrm{V}ect(e_1)$.
3. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.
4. Montrer que $Ae_1 \in \ker A^2$, et que $\ker A^2 = \ker A \oplus \mathrm{V}ect(Ae_1)$.
5. Montrer que $A^2e_1 \in \ker A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\ker A = \mathrm{V}ect(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$.
6. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C.

Exercice 48 [Examen] On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :
$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).
4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice 49 Trouver la décomposition de Dunford de la matrice
$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 50 [Partiel] On considère l'application linéaire f donnée par
$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
2. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.

Exercice 51 [Partiel] On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer sans faire de calcul que B n'est pas diagonalisable.
2. Calculer la décomposition de Dunford de B.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout entier n.

Exercice 52 [Partiel] On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = AM \end{array}$$

1. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. L'application f est elle diagonalisable ?

Deuxième partie

Analyse

5 Rappel sur les intégrales

Exercice 53 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 (t^3 + 2t - \cos t)dt, \int_{-1}^1 (t^3 + t^5)dt, \int_0^{2\pi} (\sin t + e^t)dt, \int_0^1 \ln t dt$$

$$\int_0^{2\pi} t \sin t dt, \int_0^3 x e^x dx, \int_{-1}^2 x^2 e^x dx, \int_1^e t^2 \ln t dt$$

Exercice 54 Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.

Exercice 55 Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 56 Calculer les intégrales suivantes en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples

$$\int \frac{dx}{x^2+1} \quad \int \frac{dx}{x^2-4} \quad \int \frac{dx}{(1+x)(x^2+1)} \quad \int \frac{(2x+1)dx}{(1+x+x^2)(x-1)}$$

Exercice 57 Calculer les primitives suivantes par changement de variables.

1. $\int (\cos x)^{12} \sin x dx$
2. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)} dx$.
3. $\int \frac{dx}{3+e^{-x}}$
4. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$
5. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+2t} dt$

6 Intégrales généralisées

Exercice 58 Étudier l'existence des intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1}) dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx$
4. $\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 59 Étudier l'existence des intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx$ suivant les valeurs de $a \geq 0$.
2. $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$

Exercice 60 Déterminer pour quelles valeurs du couple (α, β) de réels, les intégrales suivantes sont convergentes.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}, \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx, \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$$

Exercice 61 Existence et calcul de

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$

Exercice 62 Existence et calcul de

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\cosh x + 3\sinh x + 4} dx$

Exercice 63 Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 64 Étudier l'integrabilité de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}}$.

Exercice 65 Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{(\sqrt{n})^{1+\frac{1}{n}}} \prod_{k=1}^n k^k$.

Exercice 66 Établir la convergence des intégrales

1. **(**)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

2. **(**)** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$
3. **(**)** $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$
4. **(**)** $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\, dx$
5. **(**)** $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\, dx$

Exercice 67 [Partiel] Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$.
2. $\int_1^x \frac{t+1}{t^2+t+1} dt$ avec $x > 1$.
3. $\int_0^1 x^2 \sin x dx$.

7 Séries numériques

Exercice 68 Pour chaque série donnée par son terme général, étudier la convergence.

$$u_n = \frac{1}{2n^2+1} \qquad v_n = \frac{1}{2^n+3^n} \qquad w_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n+1}}$$

$$a_n = \frac{n^2+1}{\ln n\sqrt{n^5+1}} \quad b_n = \frac{\cos^2(n)\sin(\frac{1}{n})}{n+1} \qquad c_n = \frac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}}$$

Exercice 69 Pour chaque série, étudier la convergence et calculer la somme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{4n+2}{n(n^2-1)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

Exercice 70 Montrer que les séries suivantes divergent

$$\sum \sin(n), \sum (\frac{n}{n+1})^n, \sum \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$$

Exercice 71 Nature des séries via un critère :

$$(\frac{n+1}{2n+3})^n \quad (\frac{n}{2n+1})^{n^2} \quad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$\frac{n!}{n^n} \qquad \frac{(\ln n)^n}{n!} \qquad \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

Exercice 72 Nature des séries

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \qquad e^{\frac{1}{n^3}-\sqrt{n}} \qquad 1-\cos(1-\frac{1}{n})$$

$$e-(1+\frac{1}{n})^n \qquad (\frac{n+3}{2n+1})^{n\ln n}$$

Exercice 73 Donner un exemple de suite telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge.

Supposons maintenant que les deux séries convergent, en déduire la convergence pour tout $k \in \mathbb{N}$ de $\sum u_n^k$.

Exercice 74 Montrer que les séries suivantes sont convergentes mais non absolument convergentes

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n^2+n}} \quad \frac{\cos n}{\ln n} \quad \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\cos n}$$

Exercice 75 Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 76 Les séries suivantes convergent : Vrai ou faux et pourquoi ?

1. $\sum \frac{n^2+1}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}}$
2. $\sum \frac{n^2+1}{(\ln n)^2\sqrt{n^6+2n+3}}$
3. $\sum \frac{n^2+1}{(\ln n)^2\sqrt{n^5+2n+1}}$

Exercice 77 Les séries suivantes convergent mais ne sont pas absolument convergentes : Vrai ou faux et pourquoi ?

1. $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^{3/2}}$
2. $\sum \frac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{\cos^3(n)(n+1)}{n^3}$

Exercice 78 [Partiel] On considère la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}, n \geq 1$.

1. Montrer que l'intégrale est bien définie.
2. Montrer que $u_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)dt}{n} - \frac{\ln 2}{n}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de $u_n - 1$.
5. Que dire de la série de terme général $u_n - 1$?

Exercice 79 Soit n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note u_n
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 80 On considère une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire.
2. Calculer sa variance.

Exercice 81 Même exercice avec la loi de Bernoulli de paramètres n, p.

Exercice 82 On considère le jeu suivant : On lance une pièce équilibrée jusqu'à l'apparition du premier pile. S'il apparaît au$n$-ème lancer, on gagne 2^n. Quel doit être l'enjeu demandé par la banque pour ne pas être perdante. On calculera une espérance d'une variable aléatoire.

Exercice 83 On considère deux variables aléatoires discrètes positives indépendantes ayant un moment d'ordre un.

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire produit.
2. En déduire sa variance.

Troisième partie

Espaces euclidiens

8 Rappels sur les espaces euclidiens

Exercice 84 On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\phi(A,B) = tr({}^tAB)$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b) Quelle est la norme associée ?

c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

Exercice 85 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)t^2 dt \quad \text{pour} \quad P, Q \in E.$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

b) Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F.

Soit $\pi : E \to E$ la projection orthogonale sur F. Déterminer $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

d) Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice 86 Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, a un vecteur et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, a\rangle + \gamma = 0$.

Exercice 87 Soit A une matrice symétrique réelle

1. Monter que $A + iId$ est inversible.
2. Supposons qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0$, que dire de A ?

3. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $< AX, X >= 0$, que dire de A ?

Exercice 88 Soit E un espace vectoriel euclidien, $a \in E$ et λ réel. On définit un endomorphisme f par

$$f(x) = x + \lambda < x, a > a$$

Montrer que f est symétrique, déterminer les espace propres et les valeurs propres.

9 Isométries

Exercice 89 L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 90 [Partiel] On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$.

1. Trouver une base orthonormée de P.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur P. Trouver l'expression de $\pi(X)$ où X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice M de π exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice M est elle diagonalisable ?

Exercice 91 Reconnaître les endomorphismes du plan euclidien donnés par leurs matrices dans une base orthonormée :

1. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 92 Soit r une rotation et s une symétrie orthogonale du plan euclidien. Montrer que pour tout i il existe une unique symétrie s_i telle que

$$r = s \circ s_1 = s_2 \circ s.$$

Est il possible que $s_1 = s_2$?

Exercice 93 Soit u un endomorphisme orthogonal de E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$[u(F)]^\perp = u(F^\perp)$$

Exercice 94 On considère dans le plan euclidien la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et s une symétrie orthogonale.

1. Décrire l'ensemble $\{r^n, n \in \mathbb{Z}\}$
2. Que vaut $r \circ s$?
3. Que vaut $s \circ r$?

Exercice 95 Expressions analytiques

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$

5) $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$

Exercice 96 Expression analytique Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée (i, j, k) telle que $R(u) = u$ avec $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $R(i) = k$. Donner son angle de rotation.

Exercice 97 Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

10 Coniques

Exercice 98 Reconnaître les coniques suivantes.

1. $x^2 - 2y^2 + x = 1$
2. $x^2 + y^2 + y = 2$

3. $xy = 3$
4. $y^2 + x + 1 + y = 0$

Exercice 99 Tracer les coniques suivantes

1. $x^2 + y^2 + x + y = 0$
2. $x^2 - y^2 = 2$
3. $y^2 = x + 1 + y$

Exercice 100 Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.

1. Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.
2. Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.
3. Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.

Exercice 101 On considère une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et de foyers F, F'. Soient les deux nombres $r = MF, r' = MF'$ et

$$f(M) = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a)$$

1. Montrer que $r - r' - 2a$ ne peut être nul.
2. En déduire que $f(M) = 0$ si et seulement si $r + r' = 2a$.
3. Calculer $f(M)$.
4. En déduire qu'un point est sur l'ellipse si et seulement si $MF + MF' = 2a$.