Aix–Marseille Université 2020-2021

Mathématiques – L2 –S3– MPCI

EXERCICES

Première partie

Algèbre linéaire

1 Systèmes Linéaires

Exercice 1 Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 2 Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 2 \\ 5x & +4y & +3z & = & 2 \\ 6x & +3y & +2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -2z & = & 1 \\ -x & +3y & & = & 0 \\ & -2y & +z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & -2z & +4t & = & 2 \\ & y & +3z & -4t & = & -2 \\ & & z & -2t & = & 0 \\ x & +y & -z & +2t & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrrcr} x & +2y & -2z & +4t & +u & = & 0 \\ & y & +3z & -4t & +2u & = & 0 \\ x & & +z & -2t & +3u & = & 0 \\ x & +y & +4z & -6t & +5u & = & 0 \\ & 3y & & +2t & & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Échelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et encore...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 5 Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e et f la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?

iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 6 Trouver des décompositions LU des matrices associées aux systèmes du deuxième exercice.

2 Déterminants

Exercice 7

1. Lister les éléments de S_4.
2. Trouver leurs signatures.
3. Pour chaque élément σ trouver un entier n non nul tel que $\sigma^n = Id$.

Exercice 8 Décomposer en produit de cycles à support disjoints les permutations suivantes

1. $(1234) \circ (34)$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $(12) \circ (13) \circ (14)$

Exercice 9 A une permutation σ de S_n, on associe la matrice M_σ de terme général

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $det(M_\sigma)$.

Exercice 10 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 15 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 16 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. Montrer que c'est égal à $P(1)P(j)P(j^2)$ ou $P(X) = a + bX + cX^2$.

Exercice 18 Calculer le déterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous z_1,..., $z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

v) Soient a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1,..., z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

3 Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 21 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré $\leq n$.

a) Soit $P_0, P_1, ..., P_n$ des polynômes de E tels que $\deg P_k = k$ (pour $0 \leq k \leq n$). Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de E.

b) Soit P un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de E. Soit $a \in \mathbb{R}$; déterminer les composantes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)$ dans la base $(P, P', \ldots, P^{(n)})$.

Exercice 22 On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est un espace vectoriel pour les opérations usuelles. On considère les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^x \cos x & f_2(x) = e^x \sin x \\ f_3(x) = e^{-x} \cos x & f_3(x) = e^{-x} \sin x \end{array}$$

a) Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes. On note E l'espace vectoriel des combinaisons linéaires de ces quatre fonctions.

b) Montrer que si $f \in E$ alors $f' \in E$. On note d l'application de E dans lui-même qui à chaque f associe f'. Vérifier que d est une application linéaire. Déterminer la matrice de d dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de E.

Exercice 23 * Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :

$$p + q \text{ est un projecteur } \Longleftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Exercice 24 On désigne par $\mathcal{I}$ le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions impaires, et par $\mathcal{P}$ celui des fonctions paires. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$. Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner la décomposition explicite $f = f_i + f_p$ avec $f_i \in \mathcal{I}$ et $f_p \in \mathcal{P}$.

Exercice 25 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

1. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $AX = 0$ possède une solution non nulle.
2. Dans ce cas résoudre $AX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a - c \end{pmatrix}$.

Exercice 26 On considère une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice de l'application dans cette nouvelle base.

4 Réduction des endomorphismes

Exercice 27 On considère les deux matrices suivantes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois polynômes

$$P(X) = X^2 + 3X - 2, Q(X) = X^3 - 2X, R(X) = X^4 + X^2 + i.$$

Calculer

$$P(A), Q(A), R(A), P(B), Q(B), R(B),$$

$$(P + Q)(B), P(B) + Q(B), P(A + B), P(A) + P(B),$$

$$P(AB), P(BA), P(A)P(B), (PQ)(A), (QP)(A), P(A)Q(A), Q(A)P(A).$$

Exercice 28 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

a) si V est un sous-espace stable par f, alors V est un sous-espace stable par $P(f)$,

b) $\ker P(f)$ et I$mP(f)$ sont stables par f.

Exercice 29 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$, puis calculer $\chi_A(A)$.

b) En déduire que A est inversible, calculer son inverse.

Exercice 30 On considère l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes réels de degré au plus 3. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par

$$\phi(P) = XP''(X).$$

a) Calculer $Q(\phi)$ où Q est le polynôme $Q(X) = X^3$.

b) Calculer le noyau et l'image de ϕ.

Exercice 31 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui commutent ($u \circ v = v \circ u$). Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

Exercice 32 Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tel que

$$f^4 = f^2 + f.$$

1. Montrer que $\ker(f^3 - f - \text{Id}) \oplus \ker f = E$.
2. [a)]

   Montrer que Im $f \subseteq \ker(f^3 - f - \text{Id})$.

(b) En déduire que $\operatorname{Im} f = \ker(f^3 - f - \mathrm{Id})$.

Exercice 33 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Si oui, les réduire.

Exercice 34 * On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

a) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre.

b) Déterminer le sous-espace propre associé.

c) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$?

d) En déduire le spectre de A_t.

e) A_t est-elle diagonalisable ?

Exercice 35 Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On considère les matrices :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour cette question uniquement, on suppose que $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Exprimer A en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
3. En déduire une expression de A^2 en fonction de $a,\ b,\ U$ et I_4.
4. En déduire que le polynôme $Q = X^2 - 2(a+b)X + (a-b)(a+3b)$ annule A.
5. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
6. Déterminer une matrice $D \in M_4(\mathbb{C})$ diagonale et une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Exercice 36 Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{C}$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Exercice 37 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

1 - Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M. M est-elle diagonalisable ?

2 - Diagonaliser M.

Exercice 38 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

— $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$

— $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de A.

2 - Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 39 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2i+2 & 2i+4 & -i-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i+4 & 4i+8 & -i-4 \end{pmatrix}.$$

1 - Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2 - Montrer qu'il existe deux endomorphismes g, h de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + (-2)^n h$. Quelles sont les matrices de g et h dans la base canonique ?

Exercice 40 [Partiel] On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Calculer $det(A)$. Que peut-on en déduire sur le spectre de A ?

— Soit P le polynôme $P = X(X-1)^2$. Calculer $P(A)$. En déduire l'égalité

$$\mathbb{R}^4 = KerA \oplus Ker(A - Id)^2.$$

— En déduire le spectre de A.

— Calculer la dimension et une base des espaces propres de A.

— Bonus : Calculer A^n.

Exercice 41 * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$. On pourra raisonner sur les espaces propres.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

(La matrice M est un produit de Kronecker des matrices A et B).

Exercice 42 On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = X^n P(1/X)$.

a)Déterminer u^2, en déduire que u est diagonalisable.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de u.

Exercice 43 Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

b) Montrer que M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 44 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice 45 Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\text{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \text{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{V}ect(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
3. En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 46 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

1 - Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

2 - On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.

c) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.

d) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(f^{r-1}(x), \ldots, f(x), x)$.

Exercice 47 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que
$$\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$$
et déterminer les dimensions respectives de $\ker A$ et $\ker A^2$.
2. Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \mathrm{V}ect(e_1)$.
3. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.
4. Montrer que $Ae_1 \in \ker A^2$, et que $\ker A^2 = \ker A \oplus \mathrm{V}ect(Ae_1)$.
5. Montrer que $A^2e_1 \in \ker A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\ker A = \mathrm{V}ect(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$.
6. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B.

Exercice 48 [Examen] On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :
$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.
3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).
4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice 49 Trouver la décomposition de Dunford de la matrice
$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 50 [Partiel] On considère l'application linéaire f donnée par
$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
2. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.

Exercice 51 [Partiel] On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer sans faire de calcul que B n'est pas diagonalisable.
2. Calculer la décomposition de Dunford de B.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout entier n.

Exercice 52 [Partiel] On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & f(M) = AM \end{array}$$

1. Montrer qu'une base de $M_2(\mathbb{R})$ est donnée par les quatre matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. L'application f est elle diagonalisable ?

Deuxième partie

Analyse

5 Rappel sur les intégrales

Exercice 53 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^1 (t^3 + 2t - \cos t)dt, \int_{-1}^1 (t^3 + t^5)dt, \int_0^{2\pi} (\sin t + e^t)dt, \int_0^1 \ln t dt$$
$$\int_0^{2\pi} t \sin t dt, \int_0^3 xe^x dx, \int_{-1}^2 x^2 e^x dx, \int_1^e t^2 \ln t dt$$

Exercice 54 * Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.

Ce sont les intégrales de Wallis.

Exercice 55 Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx$ puis $\int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 56 Calculer les intégrales suivantes en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} \quad \int \frac{dx}{x^2 - 4} \quad \int \frac{dx}{(1 + x)(x^2 + 1)} \quad \int \frac{(2x + 1)dx}{(1 + x + x^2)(x - 1)}$$

Exercice 57 Calculer les primitives suivantes par changement de variables.

1. $\int (\cos x)^{12} \sin x dx$
2. $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)} dx.$
3. $\int \frac{dx}{3+e^{-x}}$
4. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$
5. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}+2t} dt$

6 Rappel sur les DLS

Exercice 58 Pour chaque fonction établir un développement limité en zéro à l'ordre n :

$$a) f(x) = e^x, n = 5 \quad b) f(x) = \ln(1+x^2), n = 6 \quad c) f(x) = \sin(2x) + \cos^2(x), n = 7$$

$$d) e^{3x} \sin(2x), n = 4 \quad e) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}, n = 4 \quad f) f(x) = \tan x, n = 5$$

$$g) \frac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}, n = 3 \quad h) (1+x)^{\frac{1}{x}}, n = 3 \quad i) \sqrt{1-x}, n = 3$$

Exercice 59 Pour a réel on définit la fonction $f(x) = \arctan(\frac{x+a}{1-ax})$.

1. Soit n un entier non nul, déterminer un développement limité en zéro de f' à l'ordre $n-1$.
2. En déduire un développement limité de f en zéro à l'ordre n.

Exercice 60 Calculer les limites suivantes

$$a) \lim_0 \frac{\sinh x}{\sin x} \quad b) \lim_0 \frac{\sin(3x)}{3x - \frac{3}{2}\sin(2x)} \quad c) \lim_0 \frac{1-\cos x + \ln\cos(x)}{x^4}$$

$$d) \lim_0 \frac{2\tan x - \sin(2x)}{x - x\cos(3x)} \quad e) \lim_0 (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad f) \lim_0 \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln\cos(3x)}$$

$$g) \lim_0 \left(\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}\right) \quad h) \lim_0 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \quad i) \lim_{+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$$

Exercice 61 Calculer le développement limité en a à l'ordre n des fonctions suivantes

$$a) x^2 \ln x, a = 1, n = 4 \quad b) \sqrt{x+2}, a = 0 n = 3 \quad c) \sin(x), a = \pi/4, n = 3$$

$$d) \ln(\sin x) a = \pi/, n = 3 \quad e) x^3 + 3x + 4, a = 4, n2$$

Exercice 62 Calculer les limites en utilisant un équivalent :

$$a) \lim_0 \frac{\sin x - x}{x^3} \quad b) \lim_0 \frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$c) \lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} \quad d) \lim_0 \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$$

Exercice 63 Montrer qu'il existe k réel tel que $\sin\ln(1+x) - \ln(1+\sin x) \sim_0 kx^4$.

Exercice 64 Trouver un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de a

$$a) x^8 + 3x^2 + x + 1, a = 0 \quad b) x^8 + 3x^2 + x + 1, +\infty$$
$$c) x^8 + 3x^2 + x + 1, a = 3 \quad d) x^7 + \sqrt{x} + \ln^2(x) + e^x + e^{2x}, +\infty$$

Exercice 65

1. Trouver un développement limité en zéro à l'ordre deux de $\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
2. Même question à l'ordre trois pour $\frac{\ln \cosh x}{x \ln(1+x)}$
3. Même question pour $\frac{\cos x - 1}{\ln(1+x)\sinh x}$
4. Idem pour $\frac{\ln(1+\sinh x)}{\sin x}$
5. Trouver un équivalent en zéro pour $\frac{e^{\cos x} - e^{\cosh x}}{\cos x - \cosh x}$

7 Intégrales généralisées

Exercice 66 Étudier l'existence des intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} (x + 2 - \sqrt{x^2 + 4x + 1})dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$
3. $\int_0^{+\infty} x^{-\ln x} dx$
4. $\int_0^{\pi/2} (\tan x)^a dx$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 67 Étudier l'existence des intégrales suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \quad (a \geq 0), \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$$

Exercice 68 Déterminer pour quelles valeurs du couple (α, β) de réels, les intégrales suivantes sont convergentes.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1 + x^\beta)}, \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta} dx, \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$$

Exercice 69 Existence et calcul de

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} dx$
4. * $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$

Exercice 70 Existence et calcul de

1. *$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}} dx$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{5\cosh x + 3\sinh x + 4} dx$

Exercice 71 * Trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On pensera à faire une intégration par parties.

Exercice 72 * Étudier l'intégrabilité de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^{1 + \frac{1}{\sqrt{\ln x}}}}$.

Exercice 73 * Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{1}{(\sqrt{n})^{1+\frac{1}{n}}} (\prod_{k=1}^n k^k)^{1/n^2}$.

Exercice 74 Établir la convergence des intégrales

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\ dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8)\ dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\ dx$

Exercice 75 [Partiel] Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$.
2. $\displaystyle\int_1^{x} \frac{t+1}{t^2+t+1} dt$ avec $x > 1$.
3. $\displaystyle\int_0^{1} x^2 \sin x dx$.

8 Séries numériques

Exercice 76 Pour chaque série donnée par son terme général, étudier la convergence.

$$u_n = \tfrac{1}{2n^2+1} \qquad v_n = \tfrac{1}{2^n+3^n} \qquad w_n = \tfrac{n+1}{\sqrt{n^3+2n+1}}$$

$$a_n = \tfrac{n^2+1}{(\ln n)\sqrt{n^5+1}} \quad b_n = \tfrac{\cos^2(n)\sin(\frac{1}{n})}{n+1} \qquad c_n = \tfrac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}}$$

Exercice 77 Pour chaque série, étudier la convergence et calculer la somme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{4n+2}{n(n^2-1)} \quad \sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{(n-1)!}$$

Exercice 78 Montrer que les séries suivantes divergent

$$\sum \sin(n), \sum (\frac{n}{n+1})^n, \sum \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$$

Exercice 79 Nature des séries données par le terme général, via un critère :

$$(\tfrac{n+1}{2n+3})^n \quad (\tfrac{n}{2n+1})^{n^2} \quad \tfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$\tfrac{n!}{n^n} \qquad \tfrac{(\ln n)^n}{n!} \qquad \tfrac{(3n)!}{(n!)^3}$$

Exercice 80 * Nature des séries

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \qquad e^{\frac{1}{n^3}} - \sqrt{n}$$

$$e - (1+\tfrac{1}{n})^n \qquad (\tfrac{n+3}{2n+1})^{n \ln n}$$

Exercice 81 Donner un exemple de suite telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge.

Supposons maintenant que les deux séries convergent, en déduire la convergence pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ de $\sum u_n^k$.

Exercice 82 Montrer que les séries suivantes sont convergentes mais non absolument convergentes

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \frac{\cos n}{\ln n} \qquad \frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\cos n}$$

Montrer que la série suivante diverge

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Exercice 83 Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 84 Les séries suivantes convergent : Vrai ou faux et pourquoi ?

1. $\sum \frac{n^2+1}{\ln n\sqrt{n^6+2n+3}}$
2. $\sum \frac{n^2+1}{(\ln n)^2\sqrt{n^6+2n+3}}$
3. $\sum \frac{n^2+1}{(\ln n)^2\sqrt{n^5+2n+1}}$

Exercice 85 Les séries suivantes convergent mais ne sont pas absolument convergentes : Vrai ou faux et pourquoi ?

1. $\sum \frac{\cos^2(n)}{n^{3/2}}$
2. $\sum \frac{\cos^3(n)}{\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{\cos^3(n)(n+1)}{n^3}$

Exercice 86 [Partiel] On considère la suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}, n \geq 1$.

1. Montrer que l'intégrale est bien définie.
2. Montrer que $u_n - 1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+t^n)dt}{n} - \frac{\ln 2}{n}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
4. En déduire un équivalent de $u_n - 1$.
5. Que dire de la série de terme général $u_n - 1$?

Exercice 87 Soit n un entier supérieur à 3.

1. Montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. On la note u_n
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Montrer que la série de terme général u_n diverge.

Troisième partie

Espaces euclidiens

9 Produit vectoriel

Exercice 88 Soit P un plan vectoriel engendré par U, V et X un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la distance de X à P vaut $\frac{|det(X,U,V)|}{||U\wedge V||}$.

Montrer que la distance de X à la droite $\mathbb{R}U$ vaut $\frac{||X\wedge U||}{||U||}$.

Exercice 89 Montrer que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Montrer la formule suivante

$$(U \wedge V) \wedge W =< U, W > V- < V, W > U$$

Exercice 90 * Soit R une rotation d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle θ. Calculer RX en fonction de u, X en utilisant un produit vectoriel. C'est la formule de Rodrigues.

10 Rappels sur les espaces euclidiens

Exercice 91 On considère l'application ϕ définie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\phi(A, B) = tr(^tAB)$

a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

b) Quelle est la norme associée ?

c) Ecrire l'inégalité triangulaire.

Exercice 92 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ par :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)t^2dt \quad \text{pour} \quad P, Q \in E.$$

a) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E. On notera $\|\cdot\|$ la norme associée.

b) Soit $F = \mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Appliquer le procédé de Schmidt à la base $(1, X)$ de F pour obtenir une base orthonormée (u_0, u_1) de F.

Soit $\pi : E \to E$ la projection orthogonale sur F. Déterminer $\alpha_0,\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\pi(X^2) = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1.$$

c) En déduire la valeur de $\|\pi(X^2)\|^2$.

d) Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 t^2 dt.$$

Exercice 93 Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne, a un vecteur et α, β, γ trois réels. Résoudre $\alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x, a\rangle + \gamma = 0$.

Exercice 94 Soit A une matrice symétrique réelle

1. Monter que $A + iId$ est inversible.
2. Supposons qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0$, que dire de A ?
3. Supposons que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on ait $< AX, X >= 0$, que dire de A ?

Exercice 95 Soit E un espace vectoriel euclidien, $a \in E$ et λ réel. On définit un endomorphisme f par

$$f(x) = x + \lambda < x, a > a$$

Montrer que f est symétrique, déterminer les espace propres et les valeurs propres.

11 Isométries

Exercice 96 L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

1 - Justifier l'existence d'une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

2 - Déterminer une base orthonormale par rapport à laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

Exercice 97 Réduire en base orthonormée les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 98 [Partiel] On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$.

1. Trouver une base orthonormée de P.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur P. Trouver l'expression de $\pi(X)$ où X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer la matrice M de π exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. La matrice M est elle diagonalisable ?

Exercice 99 Reconnaître les endomorphismes du plan euclidien donnés par leurs matrices dans une base orthonormée :

1. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 100 Soit r une rotation et s une symétrie orthogonale du plan euclidien. Montrer qu' il existe deux symétries s_1, s_2 telles que

$$r = s \circ s_1 = s_2 \circ s.$$

Est il possible que $s_1 = s_2$?

Exercice 101 Soit u un endomorphisme orthogonal de E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$[u(F)]^\perp = u(F^\perp)$$

Exercice 102 On considère dans le plan euclidien la rotation r d'angle $\frac{2\pi}{5}$, et s une symétrie orthogonale.

1. Décrire l'ensemble $\{r^n, n \in \mathbb{Z}\}$
2. Que vaut $r \circ s$?
3. Que vaut $s \circ r$?

Exercice 103 Décrire les matrices orthogonales suivantes

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & \sqrt{6} \\ -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -2+\sqrt{3} & 4+\sqrt{3}/2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/2 & -5\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 104 Expressions analytiques

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$

5) $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$

Exercice 105 Expression analytique Déterminer la matrice de la rotation R de $\mathbb{R}^3$ dans une base orthonormée (i, j, k) telle que $R(u) = u$ avec $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $R(i) = k$. Donner son angle de rotation.

Exercice 106 Compléter la matrice $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$ en une matrice orthogonale positive.

Reconnaître l'application de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 107

1. Soit A une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$. Construire une matrice d'anti rotation à partir de celle de A.
2. Soit A une matrice d'antirotation, construire une matrice de rotation à partir de A.

Exercice 108 Soit u un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{R}^n = Ker(u - Id) \oplus Im(u - Id)$$

Les deux sous espaces sont ils orthogonaux ?

Exercice 109 On considère sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire vérifiant

$$< PQ, R >=< P, QR >$$

On considère l'application u définie par $u(P) = P(0)$.

1. Montrer que $Imu^* \subset (Keru)^{\perp}$.
2. Montrer que $(Keru)^{\perp} = \{0\}$.
3. Conclure que u n'a pas d'adjoint.

12 Coniques

Exercice 110 Reconnaître les coniques suivantes.

1. $x^2 - 2y^2 + x = 1$
2. $x^2 + y^2 + y = 2$
3. $xy = 3$
4. $y^2 + x + 1 + y = 0$

Exercice 111 Tracer les coniques suivantes

1. $x^2 + y^2 + x + y = 0$
2. $x^2 - y^2 = 2$
3. $y^2 = x + 1 + y$

Exercice 112 Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.

1. Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.
2. Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.
3. Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.

Exercice 113 On considère une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et de foyers F, F'. Soient les deux nombres $r = MF, r' = MF'$ et

$$f(M) = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a)$$

1. Montrer que $r - r' - 2a$ ne peut être nul.
2. En déduire que $f(M) = 0$ si et seulement si $r + r' = 2a$.
3. Calculer $f(M)$.
4. En déduire qu'un point est sur l'ellipse si et seulement si $MF + MF' = 2a$.