DESCRIPTION DES TRAVAUX

L'ensemble de mes travaux se divise principalement en trois parties:

(1) Aspects probabilistes et analytiques du processus de Dunkl radial: cette partie requiert des connaissances en groupes de réflexions réels, en algèbres et groupes de Lie et en combinatoire algébrique.
(2) Matrices aléatoires et probabilités libres: le centre d'intérêt de cette partie est la mesure spectrale du proccessus de Jacobi libre, connu aussi comme le processus de libération par les algébristes d'opérateurs. Son étude nécéssite des outils d'analyse complexe et de la combinatoire des partitions non croisées.
(3) Aspects probabilistes des Laplaciens magnétiques à champ uniforme: cette partie est au carrefour des semi-groupes de diffusion, de la géométrie sous-riemannienne et de l'analyse.
(4) Récemment, je me suis intéréssé à l'étude spectrale d'un opórateur non-normal qui peut-être vu comme la limite (au sens des moments non commutatifs) d'un mineur principal du MB sur le groupe unitaire quand la taille de ce dernier tend vers l'infini.

J'ai aussi d'autres travaux portant sur les grandes déviations, sur les lois stables et sur des processus de Markov construits à partir de paires de Gelfand. Dans la suite du texte, je vais essayer d'expliquer les motivations et les contenus de mes travaux dans un ordre plus ou moins chronologique.

1. Des processus matriciels au Processus de Dunkl

Un processus matriciel X est la donnée d'une matrice dont les coefficients sont des processus stochastiques

$$X = (X_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}.$$

Pour des raisons physiques, il doit présenter des symétries: tel est le cas du célèbre mouvement Brownien (MB) de Dyson défini par une matrice hermitienne dont les coefficients hors-diagonaux sont des MBs complexes et ceux de la diagonale sont des MBs réels, tous les coefficients étant indépendants. La dynamique de ses valeurs propres, disons $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, est décrite par des particules sur la droite réelle qui sont en interaction coulombienne et qui ne se touchent jamais:

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j\neq i} \frac{dt}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où on part de $\lambda_1(0) > \cdots > \lambda_n(0)$, et le premier temps de collision

$$\tau := \inf\{t, \lambda_i(t) = \lambda_j(t)\}$$

est infini presque sûrement. Si on considère l'analogue réel symétrique de ce processus matriciel, alors la dynamique de ses valeurs propres est décrite par une EDS similaire avec un facteur $1/2$ apparaît devant la dérive, et le temps de collision est aussi infini presque sûrement.

Un autre processus matriciel est le processus de Wishart introduit par M.F. Bru au début des années 90. Il est défini comme le carré de la partie radiale d'une matrice dont les coefficients sont des MBs réels indépendants:

$$X := BB^T, \quad B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

La loi marginale à tout temps $t > 0$ de ce processus est ce que les statisticiens appellent la matrice de Wishart au nom de celui qui l'a introduite en 1928. De plus, ses valeurs propres sont solution du système différentiel stochastique suivant:

$$d\lambda_i(t) = 2\sqrt{\lambda_i(t)}\, d\nu_i(t) + \left[n + \sum_{k\neq i} \frac{\lambda_i(t) + \lambda_k(t)}{\lambda_i(t) - \lambda_k(t)}\right] dt, \ 1 \leq i \leq m,$$

défini a priori pour une donnée initiale

$$\lambda_1(0) > \cdots > \lambda_m(0) > 0$$

et jusqu'au temps:

$$S_0 := \inf\{t, \lambda_m(t) = 0\}.$$

De nombreuses propriétés du processus de Wishart ainsi que de ses valeurs propres (relations d'absolue-continuité, loi de Hartman-Watson généralisée, loi de T_0), ont été prouvées par Bru d'une part et par Donati-Doumerc-Matsumoto-Yor d'autre part. Par ailleurs, une remarque intéressante sur le processus des valeurs propres de l'analogue hermitien du processus de Wishart, dit processus de Laguerre, est due à W. König et N. O'Connell: ce processus est le carré (composante par composante) de m processus de Bessel indépendants conditionnés (au sens de Doob) à ne pas se toucher. Cette description, n'étant pas vraie par le processus réel symétrique, conduit à une représentation déterminantale de la densité de son semi-groupe.

À partir de là, la publication [1] issue de ma thèse établit des propriétés du processus de Laguerre analogues à celles du processus de Wishart avec l'avantage d'avoir des formules explicites de la loi de Hartman-Watson généralisée et de la loi de T_0. En effet, ces formules résultent des représentations déterminantales des fonctions hypergéométriques matricielles dans le cas hermitien complexe qui elles même proviennent du développement en séries de ces fonctions symétriques dans la base des polynômes de Schur et de la formule de Hua (une variante de la formule de Cauchy-Binet). Du point de vue de l'analyse harmonique, l'ensemble des matrices hermitiennes définie-positives s'identifie à l'espace homogène $Gl(n, \mathbb{C})/U(n)$ dont l'analyse harmonique a été bien développée par Faraut-Koranyi et Gross-Richards.

2. Processus de Dunkl radial

Si on ne tient pas compte des processus matriciels dont les valeurs propres sont les systèmes de particules évoqués ci-dessus, ces derniers sont des cas particulier de la composante continue du processus de Dunkl. Cette diffusion est connue dans la littérature sous le nom de 'processus de Dunkl radial', et son générateur infinitésimal agit sur les fonctions régulières comme:

$$\mathscr{L}_k = \frac{1}{2}\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \frac{\langle \nabla, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \cdot \rangle}.$$

Dans le membre de droite de cette expression,

- Δ, ∇ sont le Laplacien euclidien et le champ de gradient dans $\mathbb{R}^m$.
- R est un système de racines réduit dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension m, R_+ étant un système positif de R.
- $k : R \mapsto \mathbb{R}_+$ est une fonction (de multiplicité) invariante par l'action du groupe de réflexion W qui agit sur R d'une façon naturelle, donc elle est constante sur chaque orbite.
- Le processus prend ses valeurs dans un cône: la chambre de Weyl positive

$$\overline{C} = \{x \in V, \langle x, \alpha \rangle \geq 0, \, \alpha \in R_+\}.$$

Par exemple, le processus des valeurs propres du MB de Dyson correspond au cas particulier $R = A_{m-1}$ avec une multiplicité $k \equiv 1$, tel est le cas du MB symétrique réel quand $k = 1/2$. Plus généralement, si $k > 0$, alors ce système de particules répulsives a fait l'objet de certains travaux de E. Cépa et D. Lépingle liées aux EDS à dérives singulières. Quant aux racines carrés des valeurs propres des processus de Wishart et de Laguerre, elles correspondent à $R = B_m$ et à des valeurs particulières des multiplicités (k_0, k_1) dépendantes de m, n.

2.1. **Radial Dunkl processes: Existence, uniqueness and hitting time.** En adaptant le formalisme des EDS multivoques développé par Cépa-Lépingle, on a démontré dans ce travail que l'EDS à dérive singulière

$$dY_t = dB_t + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \frac{dt}{\langle \alpha, Y_t \rangle} \alpha \tag{1}$$

a une unique solution forte pour toute fonction k strictement positive et tout point intial $Y_0 \in \overline{C}$. En effet, la fonction

$$x \mapsto - \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) \ln[\langle \alpha, x \rangle]$$

est positive convexe dans le cône $\overline{C}$ et donc l'EDS pénalisée par un processus de bord poussant Y vers l'intérieur du cône admet une unique solution forte. Il nous a alors fallu prouver que sous l'hypothèse $k(\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in R$, la singularité de la dérive et la géométrie du cône suffisent afin de conserver la dynamique Y sans avoir recours au processus de bord.
Ce résultat possède divers corollaires importants. Pour commencer, il étend les résultats d'existence et d'unicité connus pour les valeurs propres des processus de Wishart et de Laguerre pour une classe plus large des paramètres et même partant d'un point du bord de $\overline{C}$. Ensuite, démontre la conjecture suivante de Gallardo-Yor: le nombre de sauts effectués par un processus de Dunkl (non radial) pendant un intervalle de temps fini est fini presque sûrement. Finalement, soit

$$T_0 := \inf\{t, Y_t \in \partial C\},$$

le premier temps d'atteinte du bord de C par Y. Dans sa thèse de doctorat, O. Chybiryakov a démontré (au moyen de martingales) que si la fonction de multiplicité k prend au moins une valeur $k_0 < 1/2$, alors $T_0 < \infty$ presque sûrement. En utilisant l'EDS (1) et un théorème de comparaison pour les solutions d'EDS partant de deux points différents, on donne dans [13] une courte preuve de ce réultat.

2.2. **β-Jacobi processes.** Ici, on adapte l'approche du travail précédent à une version trigonométrique du processus de Dunkl radial, dîte processus β-Jacobi. Notre motivation vient du fait que, pour des valeurs particulières des paramètres dont dépend ce processus, il coïncide avec les valeurs propres des processus de Jacobi matriciels réel et complexe introduits et étudiés par Y. Doumerc dans sa thèse. D'un point de vue géométrique, nous démontrons moyennant un changement de variables spatial que le processus obtenu prend ses valeurs dans la cellule de Weyl positive associée au système de racines affine du type BC. Cependant, la propriété de h-processus n'est vraie que quand le système de racines est de type C car dans ce cas, la fonction h définie par

$$h(\phi) = \prod_{i=1}^{m} \sin(2\phi_i) \prod_{1\leq i<j\leq m} \sin(\phi_i - \phi_j)\sin(\phi_i + \phi_j)$$

est sous-harmonique pour le Laplacien euclidien de $\mathbb{R}^m$. On en déduit alors, en vertu des résultats de Pinsky sur la convergence des processus tués aux bords de domaines simplement connexes et bornés, que ce h-processus a la même loi que celle de m MBs indépendants conditionnés à rester dans la cellule de Weyl du type C. Venant aux propriétés trajectorielles, on améliore les résultats d'existence et d'unicité obtenus par Y. Doumerc dans les cas particuliers des valeurs propres des processus de Jacobi réel symétrique et complexe hermitien. Rappelons que dans ce dernier cas, les valeurs propres s'interprètent comme une transformée de Doob de m processus de Jacobi réels indépendants. Ainsi, on a pu exprimer la densité du semi-groupe à l'aide des polynômes de Jacobi déterminantaux. Plus généralement, la densité du semi-groupe du processus β-Jacobi s'exprime à l'aide des polynômes de Jacobi multivariés définis par Michel Lassalle à l'aide des polynômes de Jack.

2.3. **First hitting time of the boundary of the Weyl chamber by a radial Dunkl process.** . Dans ce travail, on calcule la loi de T_0, plus exactement $\mathbb{P}_x(T_0 > t)$, quand $x \in C$ et pour les systèmes de racines est du type $R = A_{m-1}, B_m, D_m$. La queue de répartition est alors déterminé à partir des relations d'absolu-continuité entre les lois des processus de Dunkl ayant des paramètres différents. Cela nous ramène au calcul de l'intégrale suivante:

$$\int_C e^{-|y|^2/2} D_k^W(x,y) \prod_{\alpha\in R_+} \langle \alpha, y\rangle dy \tag{2}$$

où D_k^W est la fonction de Bessel généralisée. De fait, deux difficultés majeures se présentent: la première est que le domaine C est du type

$$\{y_1 > y_2 \cdots > y_m\}, \quad \{y_1 > y_2 \cdots > y_m > 0\}, \{y_1 > y_2 \cdots > |y_m|\}.$$

La seconde est que D_k^W est une fonction hypergéométrique multivariée définie à l'aide des polynômes de Jack. Afin de calculer (3), on démontre alors que, vue comme une fonction de $x \in \overline{C}$, elle est une fonction propre de l'opérateur

$$\mathscr{L}_k - \sum_{i=1}^{m} x_i \partial_i$$

associée à la valeur propre $m + |R_+|$. De plus, elle est analytique et W-invariante, et sa valeur en $x = 0$ est donnée par l'intégrale de Selberg-McDonald:

$$\int_C e^{-|y|^2/2} \prod_{\alpha \in R_+} \langle \alpha, y \rangle dy. \tag{3}$$

Donc, l'intégrale (3) est entièrement déterminée par le problème spectral et pour chacun des systèmes de racines A_{m-1}, B_m et D_m, on l'exprime à l'aide de fonctions hypergéométriques confluentes multivariées. En particulier, les formules obtenues se réduisent quand $k \equiv 0$ (le processus de Dunkl est dans ce cas un MB réfléchi dans $\overline{C}$) à des déterminants de fonctions hypergéométriques confluentes scalaires. Cependant, on ne sait pas relier dans ce cas ces déterminants aux pfaffiens obtenus par Doumerc-O'Connell par des méthodes combinatoires. Dans la dernière partie de cette publication, on donne une autre méthode de calcul de (3). Cette fois, on se base sur la formule de Mehler-Dunkl et on fait recours aux polynômes de Dunkl-Hermite W-invariants. On obtient ainsi des expressions de $\mathbb{P}_x(T_0 > t)$ sous forme de séries génératrices.

2.4. **Generalized Bessel function of type D.** On a mentionné dans le paragraphe précédent que, pour les systèmes de racines A, B, D, la fonction de Bessel généralisée est une fonction hypergéométrique multivariée. Pour les systèmes A, B, ce résulte a été prouvé par Michel Lassalle et dans le but de notre travail est de déterminer celle correspondant au système D. Pour cela, on utilise le principe du shift qui permet d'obtenir la fonction de Bessel généralisée associée à une fonction de multiplicité k connaissant celle associée au 'Shift' de k par -1 sur une ou plusieurs orbites. En particulier, si k est constante $k \equiv 1$, on retrouve bien les formules déterminantales dues à D. Grabiner et qui étendent la formule de Karlin-McGregor pour les particules Browniennes conditionn ees à ne jamais se toucher aux groupes de Weyl.

2.5. **Radial Dunkl processes associated with dihedral systems.** Ce qui est à la fois particulier et intéressant dans l'étude du processus de Dunkl radial associé aux systèmes diédraux $I_2(n), n \geq 2$ est que sa partie angulaire est un processus de Jacobi unidimensionnel indépendant de son rayon et changé de temps par une horloge de Bessel. Le processus de Dunkl radial est donc entièrement déterminé par sa décomposition polaire puisque on sait déjà que son rayon est un processus de Bessel:

$$Y_t = (|Y_t|, \theta_{A_t}), \quad A_t \triangleq \int_0^t \frac{ds}{|Y_s|^2}. \tag{4}$$

En s'appuyant sur la description de la loi de Hartman-Watson (loi conditionnelle de A_t sachant $|Y_t|$), on peut calculer $\mathbb{P}_x(T_0 > t)$ à partir du temps d'atteinte de $\{0, 1\}$ par le processus de Jacobi réel. En particulier, on retrouve les résultats de Bañuelos-Smits pour le temps de sortie d'un MB plan du cône C. On donne aussi l'expression explicite de la densité du semi-groupe du processus et on en déduit la fonction de Bessel généralisée associée aux systèmes diédraux. Par exemple, pour tout système diédral pair $I_2(2p), p \geq 1$, on a

$$D_k^W(\rho, \phi, r, \theta) = c_{p,k} \left(\frac{2}{r\rho}\right)^{\gamma} \sum_{j \geq 0} I_{2jp+\gamma}(\rho r) P_j^{k_1-1/2, k_0-1/2}(\cos(2p\phi)) P_j^{k_1-1/2, k_0-1/2}(\cos(2p\theta)) \tag{5}$$

où

- $k = (k_0, k_1)$ est la fonction de multiplicité, $\gamma = p(k_0 + k_1)$.
- I_ν est la fonction de Bessel modifiée d'indice ν.
- $P_j^{a,b}$ est le j-ème polynôme de Jacobi orthonormé pour la loi Beta de paramètres $a, b > -1$.

Une formule similaire existe pour les systèmes diédraux impairs $I_2(n)$: on fait la substitution $k_1 = 0, p = n$. Finalement, on a aussi obtenu une représentation en produit mixte du processus de Dunkl moyennant deux processus de Bessel indépendants. Celle-ci repose sur la représentation due à Warren-Yor du quotient de deux processus de Bessel indépendants comme un processus de Jacobi changé de temps. Combiné avec le fait que la puissance d'un processus de Bessel est encore un processus de Bessel changé de temps, on aboutit au résultat suivant:

Soient $k_0, k_1 \geq 0$ et Z_1, Z_2 deux processus de Bessel indépendants de dimensions respectives $d = 2k_1 + 1, d' = 2k_0 + 1$. On pose

$$\tau := \int_0^t \frac{ds}{[Z_1^2(s) + Z_2^2(s)]^{(p-1)/p}}.$$

Alors il existe un processus de Dunkl radial X associé au système dièdral $I_2(2p)$ et tel que X_τ est réalisé comme

$$\left[p(Z_1^2 + Z_2^2)^{1/2p}, \frac{1}{p} \arccos \sqrt{\frac{Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2}}\right].$$

Cette représentation reflète la non commutativité du groupe diédral à travers l'horloge τ qui se réduit à $\tau_t = t$ seulement dans le cas $p = 1$ correspondant au groupe $(\mathbb{Z}_2)^2$. Quant à la loi du temps d'atteinte du bord d'un secteur diédral, on la calcule à partir des relations d'absolue-continuité entre les lois du processus de Jacobi libre et on l'exprime comme une série de polynômes de Jacobi.

2.6. **First hitting time of the boundary of a wedge of angle $\pi/4$ by a radial Dunkl process.** Ici, on considère le système de racines du type B_2 qui correspond à l'angle diédral d'ouverture $\pi/4$. Pour une fonction de multiplicité constante, on donne dans [31] une représentation intégrale de la densité de T_0 qui montre en particulier et clairement sa positivité contrairement à la série de polynômes de Jacobi obtenue précédemment (ou plutôt des polynômes ultrasphb́riques). On exprime alors la transformée de Laplace de cette variable aléatoire à l'aide de la fonction hypergéométrique de Gauss. Cela nous permet d'une part d'obtenir un analogue de l'idendité de Dufresne pour l'inverse de T_0 et d'autre part d'étendre aux processus de Dunkl certaines identités dûes à Vakeroudis et Yor.

2.7. **Reciprocal of the First hitting time of the boundary of dihedral wedges by a radial Dunkl process.** On poursuit l'étude de la loi de T_0 et on généralise les résultats obtenus dans le cas du système B_2 à tous les systèmes diédraux. Dans le cas des systèmes diédraux paires, sa densité s'exprime encore à l'aide de la fonction hypergéométrique confluente et sa transformée de Laplace s'exprime à l'aide d'une fonction de Lauricella. Dans le cas impair, d'autres fonctions hypergéométriques apparaissent comme celle dîte de Fox-Wright.

2.8. **Brownian Motion, Reflection Groups and Tanaka Formula.** Le MB réfléchi dans les chambres de Weyl est un processus de Dunkl radial correspondant à une fonction de multiplicité nulle et n'est autre que la valeur absolue d'un MB réel en rang un. Pour les rangs supérieurs, la projection

$$\pi : V \to \overline{C}$$

de l'espace euclidien V dans la chambre de Weyl fermée $\overline{C}$ s'écrit comme des itérées de projecteurs tous de rang un: les opérateurs de pliage. Dans cette écriture, on associe d'abord à toute racine simple son opérateur de pliage, on choisit ensuite une décomposition arbitraire du mot le plus long du groupe de réflexions W et enfin, la projection π est la composée des opérateurs de pliage associés aux racines simples dans l'ordre dans lequel ces derni`res apparaissent dans la décomposition choisie. Cette écriture est indépendante du choix de la décomposition car les opérateurs de pliage vérifient les relations de tresse du groupe W.

En utilisant la formule de Tanaka pour les semi-martingales réelles, on obtient une EDS du type Tanaka dans laquelle le processus du bord s'écrit comme le temps d'occupation du processus réfléchi au voisinage des facettes constituant la chambre de Weyl. Afin d'obtenir une EDS plus autonome (qui ne dépend que du MB de l'espace euclidien de départ), on utilise l'action fondamentale de W sur V afin de formuler une condition nécéssaire et suffisante pour que le processus de bord dans la direction d'une racine simple donnée s'écrive comme une somme de temps locaux de MBs réels aux voisinages de tous les hyperplans conjugués à celui de cette racine simple. Deux exemples illustrants la validité ou non de cette condition sont considérés: les systèmes diédraux impairs pour lesquels cette condition n'est pas satisfaite car il y a une seule orbite contenant les deux racines simples, et les systèmes diédraux pairs pour lesquels elle est vraie puisque le système de racines possède deux orbites dont chacune contient une et une seule racine simple.

2.9. **Product formula for Jacobi polynomials, spherical harmonics and generalized Bessel function of dihedral type.** Le but de ce travail et deux qui le suivent est de mieux comprendre d'un point de vue géométrique la formule (5). On a alors commencé par regarder le cas le plus simple mais non trivial qui correspond au groupe de Weyl $\mathcal{D}_2(4)$ des symétries préservant le carré. On a également fait appel à la formule produit pour les polynômes de Jacobi de Dijksma-Koornwinder et l'issue de notre analyse est la formule intégrale suivante: si la somme des multiplicités $\gamma = 2(k_0 + k_1)$ est un entier pair, alors

$$D_k^W(\rho, \phi, r, \theta) = \int\int i_{(\gamma-1)/2}\left(\rho r\sqrt{\frac{1+z_{2\phi,2\theta}(u,v)}{2}}\right)\mu^{k_1-1/2}(du)\mu^{k_0-1/2}(dv) \tag{6}$$

où

$$\mu^\nu(du) \propto (1-u^2)^{\nu-1/2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$$

est la loi Beta symétrique de paramètre $\nu > -1$, et

$$z_{\phi,\theta}(u,v) = u\cos\theta\cos\phi + v\sin\theta\sin\phi.$$

Cette simplification considérable inexpliquée était à l'origine du travail suivant dans lequel on comprend mieux la provenance de l'hypothèse 'γ est entier'.

2.10. **Generalized Bessel function associated with dihedral groups.** La stratégie adoptée dans ce papier consiste à chercher une formule compacte de la série suivante:

$$\sum_{j\geq 0}(j+\nu)I_{p(j+\nu)}(R)C_j^\nu(\cos\zeta), \quad \nu = \gamma/p,\ R > 0,\ \zeta \in (0,\pi).$$

Pour $p = 1$, un résultat dû à L. Gegenbauer montre que

$$\sum_{j\geq 0}(j+\nu)I_{(j+\nu)}(R)C_j^\nu(\cos\zeta) = e^{R\cos\zeta}$$

qui souligne une nouvelle fois la commutativité de $(\mathbb{Z}_2)^2$. Pour $p \geq 2$ on a prouvé que si $\nu \geq 1$ est entier alors

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{p\nu}\sum_{j\geq 0}(j+\nu)I_{p(j+\nu)}(R)C_j^\nu(\cos\zeta) = \frac{1}{2^\nu(\nu-1)!}\left[-\frac{1}{\sin\zeta}\frac{d}{d\zeta}\right]^\nu \frac{1}{p}\sum_{s=1}^{p} e^{R\cos[(\zeta+2\pi s)/p]}. \tag{7}$$

La preuve de cette formule variationnelle repose essentiellement sur l'inversion de la transformée de Fourier sur la sphère. En effet, les fonctions zonales de la paire de Gelfand $(SO(d), SO(d-1))$ s'expriment à l'aide des polynômes ulrasphériques $C_j^\nu, j \geq 0$ et la transformée de Fourier sphérique est la composée d'une transformée de Fourier cosinus et d'une transformée d'Abel. Cette composition provient de la représentation du type Mehler des polynômes ultrasphériques et explique la présence de l'opérateur différentiel dans le membre de droite de (7). Signalons au passage qu'une autre preuve (non publiée) de (7) utilise l'identité suivante: si $\nu \geq 1$ est un entier alors

$$\frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}\frac{d^\nu}{dz^\nu}T_{j+\nu}(z) = (j+\nu)C_j^\nu(z).$$

Si $p = 1$, on retrouve le résultat de Gegenbauer et si $p = 2$, on retrouve (6). On peut aussi trouver des formules similaires de D_k^W pour les groupes diédraux $\mathcal{D}_2(p)$ quand p est une puissance de deux. En effet, on a la formule suivante:

$$C_j^\nu(T_2(z)) = \int C_{2j}^{2\nu}(zx)\mu^\nu(dx) \tag{8}$$

où $T_2(z) = 2z^2 - 1$ est le deuxième polynôme de Tchebycheff de première espèce. Ainsi,

$$\sum_{j\geq 0}(j+\nu)I_{2p(j+\nu)}(R)C_j^\nu(\cos\zeta) = \frac{1}{2}\int\sum_{j\geq 0}(2j+2\nu)I_{p(2j+2\nu)}(R)C_{2j}^{2\nu}(x\cos(\zeta/2))\mu^\nu(dx)$$

et l'intégrand n'est autre que la partie paire de la série

$$\sum_{j\geq 0}(j+2\nu)I_{p(j+2\nu)}(R)C_j^{2\nu}(x\cos(\zeta/2)).$$

2.11. **Laplace-type integral representations of the generalized Bessel function and the Dunkl kernel of type $B2$.** Dans de travail, on convertit la représentation intégrale (6) en une transformée du type Laplace, qu'on utilise par la suite pour obtenir une représentation similaire du noyau de Dunkl (voir plus bas). La conversion de (6) repose sur l'écriture de $1 + z_{\phi,\theta}(u, v)$ comme le carré de la norme euclidienne d'un certain vecteur dans le plan et sur une représentation intégrale de la fonction de Bessel modifiée normalisée. Quant à la représentation du type Laplace du noyau de Dunkl, elle s'obtient par le moyen du principe du Shift et un réarrangement des termes.

2.12. **On a Neumann-type series of modified Bessel functions.** un résultat de De Bie, , permet d'exprimer la série dans le membre de gauche de l'égalité (7) comme une fonction hypergéométrique confluente de Horn:

$$\left(\frac{R}{2}\right)^{p\nu} \sum_{j\geq 0}(j+\nu) I_{p(j+\nu)}(R) C_j^{\nu}(\cos\zeta) = \sum_{j_1,\dots,j_p\geq 0} \frac{(\nu)_{j_1}\dots(\nu)_{j_p}}{(p\nu)_{j_1+\dots+j_p}} \prod_{s=1}^{p} \frac{a_s^{j_s}}{j_s!} \tag{9}$$

où

$$a_s := R\cos\left(\frac{\zeta + 2\pi s}{p}\right), \quad 1 \leq s \leq p.$$

Les auteurs arrivent à cette formule d'une manière indirecte en inversant une transformée de Laplace calculée par rapport à une variable auxiliaire. Dans ce travail en commun avec L. Deléaval, on en donne une preuve directe qui repose sur l'identité remarquable suivante satisfaîte par les polynômes ultrasphériques: pour tout $k \geq 0$,

$$\sum_{\substack{m,j\geq 0\\ N=2m+nj}} \frac{n(j+k)\Gamma(nk)}{2^{2m+nj} m! \Gamma(n(j+k)+m+1)} C_j^{(k)}(\cos\xi) = \sum_{\substack{j_1,\dots,j_n\geq 0\\ j_1+\dots j_n=N}} \frac{(k)_{j_1}\dots(k)_{j_n}}{(nk)_N} \frac{b_1^{j_1}}{j_1!}\cdots\frac{b_n^{j_n}}{j_n!}, \tag{10}$$

où $b_s := a_s/R$.

2.13. **Dunkl kernel associated with dihedral groups.** Le noyau de Dunkl $(x, y) \mapsto D_k(x, y)$ est l'analogue (et aussi l'extension) du noyau exponentiel pour l'algèbre (commutative) des opérateurs de Dunkl. En rang un, D_k s'exprime à l'aide des fonctions de Bessel. Cependant, pour un système de racines de rang au moins égal à deux, trouver une expression (ou éventuellement une représentation intégrale) relativement simple de ce noyau est le problème le plus difficile de la théorie. Dans [25], on fait un grand pas vers la solution au problème: l'expression qu'on donne de ce noyau pour tout système de racines (réduit) fait intevenir la suite suivante: pour tout $w \in W$,

$$c_m(w) = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots\alpha_m,\in R_+\\ w=\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_m}}} k(\alpha_1)\dots k(\alpha_m), \quad c_0(w) = \delta_{ew}$$

où e est l'élément neutre de W, et on arrive à calculer explicitement les coefficients $c_m(w), m \geq 1, w \in W$ pour tous les systèmes diédraux. De plus, quand R a une seule orbite sous l'action de W, alors k prend une seule valeur et donc $c_m(w)$ compte (à un facteur près k^m) le nombre de factorisations de w en un produit de m réflexions. Du point de vue de la géométrie énumérative, $c_n(w)$ est le nombre de revêtements ramifiés de la sphère de Riemann ayant une ramification à l'infini de profil w et des ramifications simples partout ailleurs (nombre de Hurwitz). Ce nombre peut être calculé en utilisant les caractères irréductibles du groupe W mais la formule est compliqúee. Dans le même travail, on explique comment on peut aussi obtenir D_k associé à un système diédral à partir de la fonction de Bessel généralisée D_k^W (qui n'est autre que la moyenne de D_k sur le groupe W) et on obtient par exemple, à partir de (5), une représentation intégrale de D_k pour le système $I_2(4)$.

2.14. **A Guided tour in the world of radial Dunkl processes.** Cet ouvrage fait l'état de l'art des aspects analytiques et probabilistes des opérateurs de Dunkl. J'ai écrit le dernier chapitre dans lequel je présente des réultats sur l'existence et l'unicité du processus de Dunkl radial en tant que solution d'une EDS singulière, le calcul de la loi du premier temps d'atteinte du bord de la chambre de Weyl, la description de ce processus comme un MB conditionné à rester à l'intérieur de la chambre et enfin le MB réfléchi dans une chambre de Weyl.

3. Probabilités libres

3.1. **Spectral measure of the free unitary Brownian motion: another approach.** *Séminaire de Probabilités XLIV*, **2012. 191-206.** La mesure spectrale du MB unitaire libre a été décrite par P. Biane et son support ne couvre le cercle unité qu'à partir de $t = 4$. La preuve de ce résultat repose sur le calcul stochastique libre, le noyau de Poisson du disque unité et un prolongement analytique de la transformée de Herglotz de la mesure spectrale. Dans la note [18], on retrouve cette description pour les temps $t < 4$ directement et uniquement à partir des moments de la mesure spectrale. On démontre également que celle-ci est le transport d'une mesure complexe sur une unique courbe de Jordan caractérisée par des contraintes géométriques extraites à partir de la fonction transportante. Notre approche montre l'existence d'un point critique sur l'intersection de deux courbes de Jordan et dont son image par la fonction transportante est l'une des extrêmités du support de la mesure spectrale (celui-ci est symétrique par rapport à l'axe des réels). Une approche similaire (non publiée) permet de décrire la loi lognormale libre (c'est la mesure spectrale de l'opérateur limite de la partie radiale d'un MB sur le groupe linéaire complexe).

3.2. **Processus de Jacobi libre.** Les matrices unitaires forment un groupe de Lie compact qui possède un opérateur de Casimir elliptique, propriété qui implique que la solution fondamentale de l'équation de la chaleur correspondante a une densité C^∞ par rapport à la mesure de Haar: c'est le noyau de la chaleur. Ainsi, le MB sur le groupe unitaire est alors défini comme le processus de Lévy multiplicatif partant de la matrice identité et dont la loi au temps $t = 1$ a pour densité le noyau de la chaleur. Cette définition ne présente aucune ambiguïté parce que si Y est un MB unitaire 'gauche' (par rapport aux acroissements) alors $Y^\star$ est un MB unitaire 'droite'. À partir de ce processus, on définit le processus de Jacobi hermitien comme le carré de la partie radiale du processus PYQ où P, Q sont des projecteurs diagonaux:

$$J \triangleq PYQY^\star P.$$

C'est un processus ergodique de loi stationnaire la loi Beta multidimensionnelle. Par ailleurs, les matrices aléatoires indépendantes et dont les lois sont invariantes par conjugaison unitaire convergent (au sens des moments non commutatifs) quand leur taille tend vers l'infini vers des opérateurs 'libres au sens de Voiculescu' dans une algèbre de von Neumann $(\mathscr{A}, \phi)$ avec unité $\mathbf{1}$. Tel est le cas du MB unitaire qui, étant à acroissements indépendants et de lois invariantes par conjugaison unitaire, converge vers le mouvement Brownien unitaire libre. Comme les projecteurs P et Q sont déterministes et de normes bornées, alors en supposant que leur rang est comparable à l'infini à leur taille, le processus de Jacobi Hermitien converge vers ce qu'on appelle le processus de Jacobi libre qu'on notera aussi

$$J \triangleq PYQY^\star P.$$

Cette fois, Y est un MB unitaire libre dans $\mathscr{A}$ qui est libre avec les projecteurs orthogonaux P, Q dont les rangs continus $\phi(P), \phi(Q)$ sont les limites des rangs respectifs des projecteurs matriciels (on peut aussi supposer que $PQ = QP = P$ si $P \leq Q$ et $PQ = QP = Q$ sinon. Il est important ici de mentionner que J est un processus à valeurs dans l'algèbre compressée

$$\left(P\mathscr{A}P, \frac{1}{\phi(P)}\phi\right).$$

et il est clair par construction que les moments

$$m_n(t) := \frac{\phi(J_t^n)}{\phi(P)}$$

de J_t dans l'algèbre compressée convergent quand t tend vers l'infini vers la loi Beta libre déjà étudiée dans la littérature.

3.3. **Free Jacobi processes.** *J. Theor. Proba.* **21 2008, 118-143.** Ce papier est issu de ma thèste et établit des propriétés trajectorielles du processus de Jacobi libre:

$$J := PZYQY^\star Z^\star P$$

où Z est un opérateur unitaire libre avec $\{P, Q\}$ et avec $\{Y, Y^\star\}$. L'introduction de l'opérateur Z, pourtant non générique, est le minimum qu'on puisse faire afin d'assurer l'injectivité de $J_0 = PZQZ^\star P$ et de $P - J_0 = PZ(\mathbf{1} - Q)Z^\star P$ dans $P\mathscr{A}P$ et par continuité celle de J_t et de $P - J_t$ pendant un petit intervalle de temps.

Sous réserve que ceci soit vrai, le calcul stochastique libre et la décomposition polaire de J et de $P-J$ permettent d'établir une EDS libre: il existe un MB libre complexe tel que

$$dJ_t = \sqrt{J_t}dW_t\sqrt{P-J_t} + \sqrt{P-J_t}dW_t^\star\sqrt{J_t} + (\phi(Q)P - J_t)dt$$

jusqu'au temps

$$T := \inf\{t, J_t \,\text{ou}\, P-J_t \,\text{est non injectif}\}.$$

Cette EDS a été le point de départ de l'étude de la mesure spectrale μ_t de J_t: on en a déduit une relation de récurrence non linéaire pour la suite $(m_n(t))_{n\geq 0}$, ou bien de manière équivalente, une équation aux dérivées partielles (EDP) pour la transformée de Cauchy-Stieltjes de μ_t. On a aussi pu déterminer les rangs continus pour lesquels J_t et $P-J_t$ sont injectifs pour tout temps t, sous réserve que J_0 et $P-J_0$ sont inversibles dans $P\mathscr{A}P$. Par ailleurs, l'EDS permet de démontrer que si $\phi(P)=\phi(Q)=1/2$ et si J part à $t=0$ de la loi stationnaire, alors les polynômes

$$e^{kt}T_k(2P-J_t),\ k\geq 0,$$

où T_k est le k-ième polynôme de Tchebycheff de première espèce, sont des martingales libres pour la filtration naturelle du processus. Dans [3], on a étendu le résultat sur les polynômes martingales à une famille plus large de rangs: $\phi(P)\in(0,1], \phi(Q)=1/2$. Les polynômes en question sont des combinaisons linéaires de polynômes de Tchebycheff de deuxième espèce.

3.4. **Spectral distribution of the free Jacobi process.** *Indiana. Univ. Mat. J.* **61, no. 3, 2013. 1351-1368.** Dans ce travail on a étendu d'abord la relation de récurrence évoquée ci-dessus à tout opérateur Z unitaire. En particulier, pour $Z=\mathbf{1}$, on a décrit la mesure spectrale μ_t quand $\phi(P)=1/2$: pour tout temps t, elle coïncide avec celle du 'cosinus' du MB unitaire libre Y dans $\mathscr{A}$ au temps $2t$:

$$\frac{1}{4}[Y_{2t}+Y_{2t}^\star+2\mathbf{1}].$$

Deux preuves de cette description ont été écrites dans [19]: la première, de nature analytique, repose sur la résolution de l'EDP satisfaite par la transformée de Cauchy-Stieltjes de μ_t. En effet, le changement de variables

$$z\mapsto \alpha(z) \triangleq \frac{z}{(1+\sqrt{1-z})^2},\ |z|<1,$$

transforme cette EDP en celle qui caractérise la fonction génératrice des moments de Y_t et on conclut par unicité. La deuxième preuve, de nature combinatoire, est plus intéressante pour la raison simple suivante: elle ramène l'étude du processus de Jacobi libre à celle d'un opérateur unitaire. En effet, on peut écrire

$$\phi[(PY_tQY_t^\star)^n] = \phi[((1+a)(1+\tilde{b}))^n]$$

où $a=2P-\mathbf{1}, b=2Q-\mathbf{1}, \tilde{b}=Y_tbY_t^\star$ et les symétries a et $\tilde{b}$ sont algébriquement libres. L'opérateur unitaire en question est $aY_tbY_t^\star = a\tilde{b}$ et ses moments à l'ordre n apparaissent quand on développe $\phi[((1+a)(1+\tilde{b}))^n]$. Il reste alors à prouver que, si $b=a, \phi(a)=0$, alors la mesure spectrale de $aY_taY_t^\star$ coïncide avec celle de Y_{2t}. Cela découle de la liberté de Y_t et de $aY_t^\star a$ ainsi que de la propriété de Lévy de $(Y_t)_{t\geq 0}$.

3.5. **Spectral distribution of the free Jacobi process associated with one projection.** *Colloquium Mathematicum.* **137, no.2, 2014. 271-296.** . Si $\phi(a)\in(0,1)$, l'étude spectrale de $a\tilde{b}$ se complique et on démontre dans [20] que 1 est une valeur propre de $aY_taY_t^\star, t>0$ avec un poids indépendant du temps et égal à $|\phi(a)|$. Cette fois, le calcul stochastique libre permet d'obtenir une EDP non linéaire pour la transformée de Herglotz de la mesure spectrale ν_t de $aY_taY_t^\star$. L'analyse de cette EDP à l'aide de la méthode des caractéristiques nous mène à l'expression d'un flot le long duquel la transformée de Herglotz à tout instant $t>0$ s'écrit à l'aide de celles correspondants aux temps $t=0$ (état initial) et $t=\infty$ (état stationnaire). Ensuite, on montre que pour tout temps $t>0$, le flot atteint $z=1$ en un réel $z_t\in(0,1)$, ce qui nous permet de conclure que $\nu_t\{1\}=|2\phi(P)-1|$. Dans un premier temps, on en déduit un résultat similaire pour le processus de Jacobi libre: à tout instant $t>0$

$$\mu_t\{1\} = \max(2\phi(P)-1, 0).$$

Dans un second temps, on en déduit que les deux projecteurs P et $Y_tPY_t^\star$ sont en position générale à tout instant $t>0$ (une preuve algébrique de ce résultat est déjà connue). Quant à la masse $\mu_t\{0\}$, elle est proportionnelle à $\nu_t\{-1\}$ et on voit facilement que le flot tend vers -1 quand z tend vers -1^- sur l'axe réel et ceci pour tout $t > 0$. Comme les mesures spectrales stationnaire et initiale du processus $(aY_taY_t^\star)_{t\geq 0}$ ne chargent pas 0, il en est de même pour ν_t à tout instant $t > 0$ ce qui implique que $\mu_t\{0\} = 0, t \geq 0$.

3.6. **Free Jacobi associated with one projection: inverse of the flow.** *Complex Anal. Oper. Theory*. **10, (2016), no.3. 527-543.** On continue l'étude de la mesure spectrale de $PY_tPY_t^\star P$ et cette fois, on détermine à l'aide de la formule d'inversion de Lagrange les coefficients de Taylor de l'inverse du flot (modulo des transformations bi-holomorphes). La formule obtenue montre alors que la perturbation par $\phi(a) \neq 0$ est violente dans le sens où la simplification est très importante quand $\phi(a) = 0$. On donne aussi une représentation intégrale de la première dérivée de cet inverse le long d'une d'une courbe de Jordan $\gamma_{\phi(a)}$ autour de $\phi(a)$. Pour cela, on utilise des séries génératrices de polynômes de Jacobi dans le plan complexe et de polynômes de Laguerre dont le degré et l'argument sont liés.

3.7. **Inverse of the flow and moments of the free Jacobi process associated with one projection. Random Matrices: theory and applications. Vol. 7. No. 2, (2018), 19 pages.** La formule d'inversion de Stieltjes montre que la densité de μ_t est, à un facteur près, égale à la densité de ν_t vue à travers la courbe

$$x \mapsto \alpha\left(\frac{1}{x}\right) := \lim_{y\to 0^+} \alpha\left(\frac{1}{x+iy}\right), x \in (0,1].$$

Ici, on étend analytiquement l'inverse du flot au disque ouvert et on démontre que cette extension est bijective. On donne deux preuves de ce résultat: la première repose sur la théorie générale des équations de Löwner. Dans la deuxième, on décrit l'extension analytique de l'inverse du flot et on utilise l'analyticité de la transformée de Herglotz de ν_t et le fait que $\nu_t\{1\} = |2\phi(P) - 1|$. En particulier, cette extension définit la mesure d'Aleksandrov-Clarck associée au point $z = 1$ et on démontre que cette dernière a une densité essentiellement bornée. On obtient aussi une expression des moments de $aY_taY_t^\star$ de laquelle on en déduit une autre pour les moments du processus de Jacobi libre. Ensuite, on démontre que $z = 1$ n'appartient ni au spectre absolument-continu ni au spectre continu singulier de ν_t pour tout $t > 0$. Ce résultat, en accord avec la décomposition explicite de ν_∞, découle d'une description partielle du domaine d'injectivité du flot. Il reste alors à examiner la nature du bord de l'image du disque par l'extension de l'inverse du flot afin d'en déduire la régularité de cette dernière sur le cercle. Ce problème a été résolu par Tarek Hamdi en toute généralité. Notons à ce propos que l'expression du flot montre qu'il ne peut atteindre en général que le demi-cercle inférieur ce qui est suffisant pour la description de ν_t vu que cette dernière est invariante par conjugaison $z \mapsto \overline{z}$.

3.8. **Star-cumulants of the free unitary Brownian motion.** Si X est une variable aléatoire réelle ayant des moments $(m_n(X))_n$ finis de tout ordre, alors ses cumulants, $(c_n(X))_n$, sont les coefficients du développement de Taylor du logarithme de sa fonction caractéristique. En utilisant la formule de Fàa-Di-Bruno (composition des séries formelles), on peut voir que

$$m_n(X) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} \prod_{V\in\pi} c_{|V|}(X)$$

où $\mathcal{P}_n$ est le treillis des partitions de n et $|V|$ désigne le cardinal d'un bloc V de π. D'une façon équivalente, la formule d'inversion de Möbius implique que

$$c_n(X) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}_n} \mathrm{Mob}(\pi, e) \prod_{V\in\pi} m_{|V|}(X)$$

où Mob est la fonction de Möbius de $\mathcal{P}_n$ et e est la partition $\{1,\ldots,n\}$. Pour un opérateur normal (autoadjoint ou unitaire) dans une algèbre de von Neumann $(\mathscr{A}, \phi)$, on dispose de formules analogues reliant les moments de sa mesure spectrale et ses cumulants libres. En effet, on remplace $\mathcal{P}_n$ par le treillis des partitions non croisées $NC(n)$ et bien sûr, on utilise la fonction de Mobius correspondante dans la formule inverse. Plus généralement, si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ sont non auto-adjoints, on peut définir leurs *cumulants mixtes* par

$$c_n(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{\pi\in NC(n)} \mathrm{Mob}_{NC(n)}(\pi, e) \prod_{V\in\pi} \phi_V(a_1,\ldots,a_n)$$

où $\phi_V(a_1, \ldots, a_n) = \phi(a_{i_1} ... a_{i_p})$ si $V = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_p\}$. Par exemple, si U est unitaire de Haar et $U^\star$ est son adjoint, alors les cumulants mixtes de la famille $\{U, U^\star\}$ sont tous nuls sauf pour les mots alternés de longueurs paires

$$(U, U^\star, \ldots, U, U^\star), \quad (U^\star, U, U^\star, \ldots, U),$$

Pour un opérateur c dont la mesure spectrale est la loi circulaire, on a

$$c_2(c, c^\star) = c_2(c^\star, c) = 1$$

alors que tous les autres cumulants mixtes sont nuls. Ces deux opérateurs font partie de la famille des opérateurs R-diagonaux introduits par Nica et Speicher qui sont ceux dont tout les cumulants mixtes sont nuls sauf les cumulants alternés de longueurs paires. De plus, tout opérateur R-diagonal injectif A a une décomposition polaire $U|A|$ où U est unitaire de Haar et est libre avec $|A|$. Comme d'une part, Y_t converge faiblement vers U quand $t \to \infty$ et d'autre part les cumulants libres $c_n(Y_t)$ sont connus et donnés par

$$c_n(Y_t) = e^{-nt/2} \frac{(-nt)^{n-1}}{n!},$$

on s'est alors intéréssé dans [22] aux cumulants mixtes

$$\kappa_n(Y_t^{\epsilon_1}, \ldots, Y_t^{\epsilon_n})$$

où $n \geq 1$ et $\epsilon_i \in \{1, \star\}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Une autre motivation importante de ce travail vient du fait que le calcul de la limite de

$$e^{t/2}\{\kappa_n(Y_t^{\epsilon_1}, \ldots Y_t^{\epsilon_n}) - \kappa_n(U^{\epsilon_1}, \ldots, U^{\epsilon_n})\}$$

quand $t \to \infty$ fournit une structure infinitésimale pour U. Par ailleurs, on sait déjà (d'après [19]) que la mesure spectrale μ_t de $J_t = PY_PY^\star P$ associé à une projection P de rang $1/2$ coïncide avec celle de l'opérateur

$$\frac{2\mathbf{1} + Y_{2t} + Y_{2t}^\star}{4}.$$

Comme les cumulants sont multilinéaires et comme $\mathbf{1}$ est libre avec tout autre opérateur, alors les cumulants libres de J_t s'écrivent comme la sommes des cumulants $\kappa_n(Y_t^{\epsilon_1}, \ldots, Y_t^{\epsilon_n})$.

Mais la situation s'avère largement plus compliquée que celle de la paire $(U, U^\star)$ et même celle de Y_t tout seul, et nos résultats se résument comme suit. D'abord, la formule moments-cumulants montre que les cumulants mixtes $\kappa_n(\cdots)$ sont des quasi-polynômes en t et e^{-t} et on démontre qu'ils satisfont une relation de récurrence non linéaire. Étant donné un mot

$$Y_t^{\epsilon_1}, \ldots, Y_t^{\epsilon_n}$$

on détermine le degré exact en e^{-t} du polynôme correspondant en fonction du nombre de changement $1 \mapsto \star$ dans le mot. Ensuite, on se concentre sur deux cas particuliers et le premier est celui d'un mot avec un seul changement: comme Y_t et $Y_t^\star$ ont la même mesure spectrale et comme la fonctionnelle κ_n est traciale, on peut toujours supposer que le mot est de la forme

$$\underbrace{Y_t, \ldots, Y_t}_{p}, \underbrace{Y_t^\star, \ldots, Y_t^\star}_{q}, \quad p + q = n.$$

On obtient alors la fonction génératrice de ces cumulants et on retrouve un résultat de T. Lévy quand $p = 0$ (ou $q = 0$). Les cumulants eux-mêmes sont représentés par une intégrale qu'on peut convertir simplement en une somme finie. Le deuxième cas est celui des cumulants alternés

$$\underbrace{Y_t, Y_t^\star, \ldots, Y_t, Y_t^\star}_{2n}$$

pour lesquels le calcul stochastique libre permet d'écrire une EDP pour leur fonction génératrice. La méthode des caractéristiques permet de résoudre cette EDP sous réserve du calcul de l'inverse d'une certaine fonction. Finalement, on détermine la structure infinitésimale citée plus haut pour n'importe quel mot donné: la limite est nulle sauf pour un mot alterné de longueur impaire et est encore codée par les nombres de Catalan.

3.9. **Lagrange inversion formula, Laguerre polynomials and the free unitary Brownian motion.** On donne une expression explicite du cumulants mixte alterné de longueur paire $2n$ et on explique comment en déduire celle du cumulant mixte alterné de longueur impaire $2n+1$. On calcule aussi les coefficients de Taylor des S et R-transformées ainsi que ceux de la fonction de Schur de la mesure spectrale du MB unitaire libre et de sa première itérée. On en déduit alors les premiers coefficients de Verblunsky. Tous ces calculs reposent sur la formule d'inversion de Lagrange et une série génératrice assez remarquable des polynômes de Laguerre.

3.10. **Kanter random variable and free positive stable laws.** Une loi stable positive d'indice $0 < \alpha < 1$ et de coefficient d'asymétrie $\rho = 1$ est la mesure de probabilité μ_α à support dans $(0, \infty)$ et ayant une transformée de Laplace donnée par

$$\int_0^\infty e^{-xy}\mu_\alpha(dy) = e^{-x^\alpha}, \quad x > 0.$$

C'est une mesure absolument continue de densité donnée par

$$f_\alpha(x) = -\frac{1}{\pi x}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\sin(\pi n\alpha)\Gamma(n\alpha+1)\frac{1}{x^{n\alpha}}, \quad x > 0.$$

Un résultat dû implicitement à Chernin et Ibragimov et annoncé par M. Kanter représente l'image de μ_α par l'application $x \mapsto x^{-(1-\alpha)/\alpha}$ comme la loi de

$$\frac{L}{a_\alpha(U)}$$

où U suit la loi uniforme sur $(0, \pi)$, L suit la loi exponentielle de paramètre 1 et est indépendante de U, et

$$a_\alpha(u) = [b_\alpha(u)]^{1/(1-\alpha)}, \quad b_\alpha(u) = [c_\alpha(u)]^\alpha[c_{1-\alpha}(u)]^{(1-\alpha)}, \quad c_\alpha(u) := \frac{\sin(\alpha u)}{\sin(u)}.$$

La variable $a_\alpha(U)$ est connue comme la variable de Kanter et la fonction inverse de a_α code mystérieusement la densité d'une loi stable libre positive. Dans la note [15], on a exprimé la densité de la variable de Kanter à l'aide de la fonction H (dite de Fox) représentée par une intégrale de Barnes sur un chemin de Hankel. Ceci nous a permis d'exprimer aussi sa fonction de répartition, et donc l'inverse de a_α, à l'aide de la fonction H. Ainsi, la densité d'une loi stable positive libre est 'explicite'. La fin de la note explique, moyennant des arguments analytiques complexes, pourquoi la variable de Kanter apparaît à la fois dans les deux contextes classique et libre. Ces résultats ont motivé T. Hasebe et A. Kuznetsov qui ont finalement établi une identité en loi entre les lois stables classique et libre.

3.11. **Familles de Meixner classiques et libres et familles ultrasphériques.** La caractérisation de toutes les familles de polynômes orthogonaux ayant une fonction génératrice donnée est un problème qui a intéressé plusieurs mathématiciens parmi lesquels on trouve J. Meixner. Ce dernier a résolu le problème pour les fonctions génératrices du type exponentiel:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}P_n(x)z^n = A(z)e^{H(z)x}$$

où z appartient à un voisinage de l'origine et H désigne une fonction analytique dans ce voisinage et telle que $H(0) = 0, H'(0) \neq 0$. Bien sûr, l'orthogonalité des polynômes par rapport à une mesure μ implique que

$$[A(z)]^{-1} = \int e^{H(z)x}\mu(dx)$$

quand cette intégrale est finie. On parle alors de la famille de Meixner et cette dernière est ré-apparue dans des contextes différents: problème de régréssion quadratique, familles exponentielles à variance quadratique, polynômes orthogonaux stables par convolution et polynômes martingales pour des processus de Lévy. L'analogue libre de la famille de Meixner a été étudié par M. Anshelevich et cette fois les fonctions génératrices sont du type résolvante:

$$\sum_{n\geq 0}P_n(x)z^n = \frac{1}{u(z)(f(z)-x)}.$$

Il y a, comme c'est le cas de la famille de Meixner, six familles de polynômes orthogonaux et qui apparaissent aussi dans des contextes analogues à ceux évoqués plus haut. Dans [8], on a établi et expliqué les connexions entre les différentes caractérisations des familles de Meixner classique et libre (exponentiel et résolvante). Ensuite, on a encore donné une autre façon d'obtenir ces deux familles. Par exemple, les fonctions H et f qui codent la fonction génératrice du type exponentielle sont des solutions d'équations de Ricatti. La méthode utilisée, relativement élémentaire, a été appliquée dans [10] pour les fonctions génératrices du type ultrasphérique

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda)_n}{n!} P_n^{\lambda}(x) z^n = \frac{1}{u_\lambda(z)(f_\lambda(z)-x)^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Cette fois, des restrictions sur le domaine de z sont à faire afin de donner un sens à la puissance complexe: on trouve alors quatre familles de polynômes orthogonaux si $\lambda \neq 1$ et on conjecture qu'il n'y en a pas d'autres. On en déduit aussi que

$$u_\lambda(z) = \int \frac{1}{(f_\lambda(z)-x)^\lambda} \mu_\lambda(dx)$$

où μ_λ est la mesure d'orthogonalité des P_n^λ (lois Beta) et on remarque que f_λ est l'inverse (au sens de la composition) de la transformée de Cauchy-Stieltjes d'une loi du demi-cercle. À partir de cette remarque, on a obtenu dans [11] quatre exemples de mesures de probabilité μ_λ pour lesquelles

$$\int \frac{1}{(z-x)^\lambda} \mu_\lambda(dx) = \left(\int \frac{1}{(z-x)} \nu_\lambda(dx)\right)^\lambda \tag{11}$$

où ν_λ est encore une mesure de probabilité. Par exemple, si μ_λ est la mesure beta symétrique alors $\nu_\lambda = \nu$ est la mesure de Wigner et c'est le seul exemple obtenu dans [11] vérifiant cette propriété. Dans [28], on a continué à chercher d'autres tels exemples en faisant appel à des mesures qui apparaissent dans la théorie des représentations du groupe symétrique infini. En particulier, l'identité (11) est vraie quand ν est la loi de Poisson libre et μ_λ est le produit de deux lois beta indépendantes sur $[0, 1]$. De plus, si ν est une loi de Bernoulli symétrique alors μ_λ existe (en tant que mesure de probabilité) seulement si $\lambda \geq 1$.

On utilise aussi quelques transformations quadratiques de la fonction hypergéométrique de Gauss afin d'exprimer les transformées de Cauchy-Stieltjes généralisées de certaines lois beta comme des fonctions simples (rationnelles et puissances) de la loi de Wigner. On retrouve ainsi les exemples donnés dans [11]. Enfin, on calcule la transformée de Stieltjes généralisée de la première fonctionnelle des polynômes de Humbert qui se réduit dans sa forme la plus simple à la loi beta symétrique. On se ramène alors à la recherche de la solution de l'équation polynomiale

$$z^d + dz + w = 0, \quad d \geq 2,$$

qui tend vers zéro quand $w \to 0$ et quand $d \geq 3$, l'analogue de (11) prend une forme largement plus compliquée que celle correspondant à $d = 2$.

4. Matrices aléatoires

4.1. **Probabilistic proof of product formulas for Bessel functions.** Soit $p \geq 2$ un entier, la fonction de Bessel sphérique est définie par

$$j_{(p/2)-1}(y) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!(p/2)_n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Si $y = |v| \geq 0, v \in \mathbb{R}^p$, elle est la transformée de Fourier de la mesure uniforme σ sur la sphère unité S^{p-1}. Ce fait combiné à l'absolue-continuité par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^p$ de la convolution de deux mesures uniformes sur deux sphères conduit à la célèbre formule produit

$$j_{(p/2)-1}(x|v|) j_{(p/2)-1}(z|v|) = \int_{\mathbb{R}^p} j_{(p/2)-1}(\xi|v|) \tau_{x,z}(d\xi)$$

où $\tau_{x,z}$ est une mesure de probabilité. Dans [23], on redémontre cette formule produit en utilisant l'indépendance conditionnelle des variables aléatoires. En effet, si N est un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^p$ et si $N = R\Theta$ est la décomposition polaire de N alors

$$\mathbb{E}[e^{i\langle N,v\rangle}|R] = j_{(p/2)-1}(R|v|), p.s.$$

De plus, si $N_1 = R_1\Theta_1$ et $N_2 = R_2\Theta_2$ sont deux vecteurs gaussiens standards et indépendants de $\mathbb{R}^p$ alors N_1 et N_2 sont conditionnellement indépendants par rapport à la tribu engendrée par leurs rayons R_1, R_2. Il en découle que

$$j_{(p/2)-1}(R_1|v|)j_{(p/2)-1}(R_2|v|) = \mathbb{E}[e^{i\langle N_1,v\rangle}|R_1]\mathbb{E}[e^{i\langle N_2,v\rangle}|R_2] = \mathbb{E}[e^{i\langle N_1+N_2,v\rangle}|R_1, R_2].$$

Mais comme N_1+N_2 est encore un vecteur gaussien standard (à une constante près) alors $N_1+N_2 = R_3\Theta_3$ où Θ_3 est uniformément distribuée sur la sphère unité. Comme cette mesure est l'unique mesure de probabilités sur la sphère qui est invariante par rotations, alors on a pu prouver que Θ_3 est indépendant de la tribu engendrée par R_1 et R_2. La formule produit pour la fonction de Bessel sphérique est alors un simple exercice. Cependant, ce qui est remarquable est que cette preuve se généralise sans aucun effort supplémentaire à la fonction de Bessel à une variable matricielle symétrique réelle. Plus précisémment, cette fonction, introduite par C. Herz, est la transformée de Fourier de la mesure uniforme sur la variété de Stiefel $S_{p,m}, p \geq m$ qui s'identifie à l'espace homogène $O(p)/O(p-m)$. Cette identification assure qu'il n' y a aucune autre mesure de probabilité sur $S_{p,m}$ qui est invariante à gauche par l'action de $SO(p)$. De plus, on sait que si $N \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ est une matrice gaussienne standard alors sa partie angulaire est uniformément distribuée sur $S_{p,m}$. Il suffit alors de considérer deux telles matrices standards et indépendantes N_1 et N_2 et de reproduire la preuve écrite pour $m = 1$. Dans ce cas, on voit que la mesure représentative est liée à la loi d'un mineur principal de taille m d'une matrice orthogonale de Haar dans $O(p)$. D'après un résultat de G. Olshanski qu'on peut trouver par exemple dans la thèse de B. Collins, si $p \geq 2m$ alors cette variable aléatoire à valeurs dans la boule matricielle unité dans $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Sa densité est en effet donnée par

$$\det(\mathbf{I}_m - AA^T)^{(p-2m-1)/2}\mathbf{1}_{\{||A||<1\}}$$

et on retrouve bien une formule de changement de variables prouvée par C. Herz. Enfin, on détermine les paramètres p pour lesquels la mesure représentative dans le cas matriciel est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $S_m(\mathbb{R})$. Dans ce cas, la formule produit pour les fonctions de Bessel à deux variables matricielles réelles symétriques découle de la formule d'intégration de Weyl .

4.2. **A stationary process associated with the Dirichlet distribution arising from the complex projective space.** Étant donné un vecteur U_∞ uniformément distribué sur la sphère

$$S^{2N-1} \triangleq \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$$

dans $\mathbb{C}^N$, la loi jointe du vecteur

$$(|U_\infty^1|^2, \ldots, |U_\infty^k|^2), \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

est la loi de Dirichlet dont la densité est donnée par

$$(1 - u_1 - \cdots - u_k)^{N-k-1}\mathbf{1}_\Sigma(u)$$

où Σ est le simplexe standard. Dans [21], motivé par un problème d'information quantique, on détermine la loi jointe de

$$(|U_t^1|^2, \ldots, |U_t^k|^2), \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

où cette fois $(U_t)_{t\geq 0}$ est un MB sur S^{2N-1}. Si $k = 1$, alors il est connu que $|U^1|^2$ est un processus de Jacobi réel car la projection de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère (espace symétrique de rang un) est un opérateur de Jacobi. Plus généralement ($k \geq 1$), on exprime le noyau de la chaleur sur l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{N-1}$ à l'aide des harmoniques sphériques homogènes de degré zéro du groupe unitaire. En utilisant l'expression du noyau reproduisant de l'espace propre d'ordre $n \geq 0$, on obtient une expression du noyau de la chaleur qui est l'analogue complexe de celle de Karlin et McGregor dans le cas réel. Ensuite, on utilise la décomposition de la représentation régulière du groupe unitaire $\mathscr{U}(N)$ sous l'action du sous groupe $\mathscr{U}(N-k+1)$ afin de séparer les variables et la densité de la loi jointe recherchée s'exprime après intégration à l'aide des polynômes de Jacobi sur le simplexe (introduits par Koornwinder).

Par ailleurs, on reprend les calculs faits par Nechita et Pellegrini qui ont établi une EDP pour la transformée de Laplace de la loi jointe de $(|U_t^1|^2, \ldots, |U_t^k|^2)$. Si $k = 1$, on résout une équation récurrente obtenue par ces deux auteurs sur des coefficients apparaissant dans la solution de l'EDP, et on retrouve l'expression obtenue par le précédent calcul direct. Cependant, si $k \geq 2$ alors des intégrations par parties successives montrent que la partie principale (sans mesure stationnaire) de la densité est solution d'une EDP sur le simplexe et on ne dispose pas suffisamment de conditions au bord du simplexe necéssaires à la résolution.

4.3. **Moments du processus de Jacobi Hermitien.** Rappelons que le processus de Jacobi libre est la limite du processus de Jacobi hermitien quand la taille de ce dernier tend vers l'infini. Rappelons aussi que dans [36], nous avons obtenu une expression des moments du processus de Jacobi libre à tout temps $t \geq 0$. Dans [34], on calcule les moments (ou observables) du processus matriciel directement à partir de la densité du semi-groupe de ses valeurs propres. Cette dernière s'exprime à l'aide d'une série de polynômes de Jacobi déterminantaux et on fait appel à la formule intégrale de Cauchy-Binet afin de déterminer les partitions de la série ayant une contribution non nulle après intégration. Il s'avère que celles-ci sont des équerres de poids bornés et on utilise ce fait pour écrire plus simplement les polynômes de Jacobi correspondants. On obtient alors une somme alternée de termes qui se simplifie pour des valeurs particulières des rangs des projecteurs. Ensuite, on calcule l'asymptotique de tous ces termes et on arrive à une forme indéterminée. Lever l'indétermination afin d'avoir une limite finie nécéssite une analyse fine (combinatoire) de la somme alternée et fera l'objet d'un prochain travail.

4.4. **Markov Semi-groups associated with the complex unimodular group $Sl(2, \mathbb{C})$.** Dans une série de papiers, P. Biane montre comment on peut construire en entrelacer deux processus de Markov en restreignant un semi-groupe agissant sur une $C^\star$-algèbre non commutative à deux $C^\star$-sous-algèbres commutatives. Par les exemples qu'il donne est celui des $C^\star$-algèbres du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, de son sous groupe diagonal, et de l'algèbre de Hecke sphérique des fonctions $SU(2)$-biinvariantes. Le semi-groupe non commutatif provient d'une fonction du type positif et infiniment divisible agissant par multiplication sur les fonctions des algèbres mentionnées, et est obtenue comme la dérivée des fonctions sphériques de la série complémentaire paramétrée par $\omega \in [-1, 1]$ en $\omega = 1$. En particulier, P. Biane pose les deux questions suivantes:

(1) Calculer les densités de semi-groupes des deux processus de Markov commutatifs.
(2) Expliquer un lien surprenant entre l'un des deux semi-groupes et le noyau de la châleur du groupe de Heisenberg et notamment l'aire de Lévy.

Dans ce papier, on répond définitivement à la première question et on essaye de répondre à la deuxième. Nos outils sont la formule d'inversion de Fourier, une série génératrice des polynômes de Laguerre, la représentation métaplectique de $Sp(4, R)$.

4.5. **Capacité ergodique d'un canal de Jacobi.** La transmission d'un signal dans un canal peut être modélisée par l'équation

$$y = Hx + n$$

où H est la matrice (complexe) des gains, x, y sont les signaux émis et reçus et n est un bruit aléatoire. En l'absence d'information sur H dans l'émission, la capacité ergodique du canal est donnée par

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\det(I + \rho H^\star H)\right)\right),$$

où $H^\star$ est l'adjoint de H et $\rho \geq 0$ est le rapport signal/bruit (SNR). Quand le canal est une fibre optique avec m_t émetteurs et m_r récepteurs, H peut être choisie comme un coin supérieur gauche de taille $m_t \times m_r$ d'une matrice unitaire de Haar $m \times m, m \geq m_t \vee m_r$. Dans ce cas, $J = H^\star H$ est un élément de l'ensemble de Jacobi complexe. Supposons que $m_r \geq m_t$ et $m \geq m_t + m_r$ alors J et $I_{m_t} - J$ sont inversibles presque sûrement et comme

$$\ln\left(\det(I_{m_t} + \rho J)\right)$$

ne dépend que des valeurs propres $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_t})$ de J, alors

$$\mathbb{E}\left(\ln\left(\det(I_{m_t} + \rho J)\right)\right) = \int_{\lambda \in [0,1]^{m_t}} \sum_{i=1}^{m_t} \ln(1 + \rho\lambda_i)\mathcal{F}_{m_t, m_r, m}(\lambda) d\lambda$$

où $\mathcal{F}_{m_t, m_r, m}(\lambda)$ est leur densité. Cette dernière est invariante par permutation et donc la capacité ergodique peut s'exprimer à l'aide de la densité d'une seule valeur propre (première fonction de corrélation) et ce fait est vrai pour tout modèle matriciel invariant par conjugaison unitaire. Par contre, la fonction de corrélation est donnée par le noyau de Christoffel-Darboux des polynômes de Jacobi ce qui rend les simulations numériques compliquées quand la taille de J devient grande.

Dans [30], on utilise une expression explicite des observables

$$\int_{\lambda\in[0,1]^n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k\right)\mathcal{F}_{a,b,n}(\lambda)d\lambda,\ n\geq 1,$$

on démontre une autre formule de la capacité du canal qui permet de faire des simulations numériques plus précises même quand la taille de J est grande. En plus, notre formule montre que cette capacité s'exprime comme une moyenne sur les valeurs du SNR dans l'intervalle $(0,\rho)$. En utilisant un principe de contraction, on en déduit une formule similaire dans le cas d'un canal de transmission sans fil pour lequel J est une matrice de Wishart complexe.

5. Laplacien magnétique, états cohérents généralisés et mesures de probabilité quasi-infiniment divisibles

5.1. **Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels.** Le Laplacien magnétique H dans $\mathbb{C}$ associé à un champ magnétique constant et normal s'écrit

$$H=-\frac{1}{4}\left((\partial_x+iy)^2+(\partial_y-ix)^2\right)-\frac{1}{2}.$$

Une transformation unitaire (conjugaison par $e^{-|z|^2/2}$) transforme H en l'opérateur de Landau euclidien

$$-\partial_{z\overline{z}}+\overline{z}\partial_{\overline{z}}=(-\partial_z+\overline{z})\partial_{\overline{z}}$$

dont le spectre (discret) est $\mathbb{N}$. L'espace $L^2(\mathbb{C},e^{-|z|^2}dz)$ se décompose alors en une somme orthogonale de sous-espaces propres et ces derniers ont tous une multiplicité infinie. En particulier, le sous-espace propre associé au bas du spectre (premier niveau de Landau) est l'espace de Fock et la famille $(\psi_j(z)=z^j/\sqrt{\pi j!}, j\geq 0)$ en est une base orthonormale (états cohérents). Le noyau reproduisant de l'espace de Fock est simplement $K_0(z,w)=(1/\pi)e^{\langle z,w\rangle}$ et permet de définir la loi de Poisson de paramètre $|z|^2$ comme

$$\mathbb{P}(X_0=j)=\frac{|\psi_j(z)|^2}{K_0(z,z)},\quad j\geq 0.$$

Dand ce papier, on étudie les mesures de Poisson généralisées associées aux niveaux de Landau supérieurs. Celles-ci sont obtenues, par une construction similaire à celle de la mesure de Poisson, à partir des états cohérents généralisés et de leurs noyaux reproduisants. Dans un premier temps, on écrit ces mesures comme une perturbation de la mesure de Poisson par des mesures signées à supports finis. Dans un second temps, on démontre qu'elles ne sont pas infiniment divisibles mais sont plutôt quasi-infiniment divisibles. En effet, quand leurs fonctions caractéristiques ne s'annulent pas (ce qui ajoute une contrainte reliant le paramètre $|z|^2$ et les zéros du polynôme de Laguerre $L_m^{(0)}, m\geq 1$), on démontre qu'elles ont des représentations de Lévy-Kintchine dont les mesures représentatives ont les mêmes propriétés qu'une mesure de Lévy sauf qu'elles sont signées. Donc, en prenant la variation totale de ces quasi-mesures de Lévy, on obtient de nouvelles mesures infiniment divisibles pour lesquelles on calcule aussi les fonctions caractéristiques.

5.2. **Analysis of generalized binomial distributions associated with hyperbolic Landau levels.** Ce papier généralise le précédent au cas du disque hyperbolique. Cette fois, l'opérateur de Landau hyperbolique (dit aussi opérateur de Maass) peut avoir un spectre discret (niveaux de Landau hyperboliques) dès que l'intensité du champ magnétique est assez grande (sinon, son spectre est purement continu comme pour le Laplacien hyperbolique). Pour le niveau de Landau hyperbolique correspondant à l'état fondamental, le sous-espace propre coïncide avec l'espace de Bergmann et les états cohérents permettent de construire une loi binomiale négative. Pour les niveaux supérieurs, on définit une loi binomiale négative généralisée et on calcule sa fonction génératrice des moments. Ensuite, on obtient des résultats analogues à ceux obtenus dans le cas euclidien, et si on considère un disque de rayon R alors on peut retrouver ces derniers en faisant tendre (dans les premiers) la courbure $1/R^2$ vers zéro (principe de contraction). Il est important de signaler que dans les deux cas (euclidien et hyperbolique), les sous-espaces propres associés aux niveaux de Landau supérieurs ne sont pas des espaces de fonctions analytiques mais plutôt poly-analytiques.

5.3. **The hyperbolic-type point process.** Dans ce travail, on définit un processus déterminantal dans le disque unité qui généralize le processus des zéros des séries gaussiennes étudiés par Peres-Virag et Krishnapur. Le noyau définissant ce processus correspond a un sous-espace propre du Laplacien de Maass évoqué ci-dessus et converge faiblement quand la courbure du disque tend vers zéro vers le processus de Ginibre polyanalytique introduit par Shirai. Dans un premier temps, on donne une autre démonstration géométrique du résultat de Shirai relatif au comportement asymptotique de la variance du nombre de particules dans un disque centré à l'origine et de rayon r quand $r \to \infty$. Notre démonstration a l'avantage de s'étendre au cas du disque hyperbolique (le petit disque croit vers le disque hyperbolique) et aussi de retrouver les résultats de Peres-Virag et de Krishnapur.

5.4. **Integral representation of the sub-elliptic heat kernel on the Anti-de Sitter space.** Dans cette note, on redémontre une représentation intégrale obtenuer par Baudoin et Wang du noyau de la chaleur du sous-laplacien associé à la fibration d'Anti de Sitter. Cette fibration est l'analogue de la fibration de Hopf pour la boule hyperbolique et le sous-Laplacien est identifié après une transformation de Fourier partielle par rapport à la fibre (cercle) au Laplacien de Maass généralisé. L'expression du noyau de la chaleur est alors obtenue dans un premier temps comme une série de Fourier dont le coefficient associé au mode $k \in \mathbb{Z}$ est le noyau de la chaleur du Laplacien de Maass avec un champ magnétique uniforme d'intensité $|k|$. Dans un second temps, on retrouve le résultat de Baudoin et Wang à partir de la série de Fourier moyennant la formule sommatoire de Poisson.

5.5. **Densities of generalized stochastic areas and windings arising from Anti de Sitter and Hopf fibrations.** L'aire de Lévy est l'intégrale stochastique de la 1-forme différentielle:

$$\omega := xdy - ydx$$

sur un chemin Brownien plan. En plus, ω est la partie horizontale de la forme de contact naturelle associée au groupe de Heisenberg H^3 en trois dimensions. Ces deux observations ont permis à F. Baudoin et J. Wang de considérer des aires de Lévy provenant d'autres modèles tels que l'espace d'Anti-de Sitter et la sphere de dimension impaire, vus comme espaces totaux de fibrations au dessus de la boule de Bergman et de l'espace projectif complexe.

En utilisant le théorème de girsanov, Fabrice et Jing calculent les fonctions caractéristiques des aires de Lévy correspondantes sous forme intégrale. Dans ce travail, on calcule les densités de ces variables aléatoires et on retrouve en particulier leurs comportements en temps long. Dans le cas de l'espace d'Anti-de Sitter de dimension complexe égale à un, on exprime la transformée de Mellin de l'aire de Lévy associée à l'aide de la fonction Zeta de Riemann, prouvant ainsi un analogue d'un lien mystérieux dans le cas du groupe de Heisenberg H^3. On calcule aussi les densités des variables 'nombres de tours' des MBs dans le disque hyperbolique et dans la droite projective complexe (sphère de Riemann), définis naturellement comme les diffusions dont les générateurs sont les parties angulaires des Laplaciens-Beltrami de ces deux modèles.

5.6. **The Horizontal Heat Kernel on the Quaternionic Anti-De Sitter Spaces and Related Twistor Spaces.** L'espace d'Anti de Sitter quaternonique est définie d'une manière analogue à celle du cas complexe mais les fibres ne sont plus des cercles mais des quaternions de module un qu'on identifie aux matrices dans $SU(2)$ via les matrices de Pauli (on adopte la multiplication à gauche). C'est un espace qui hérite dans $\mathbb{R}^{4n,4}$ une métrique lorentzienne de signature $(4n, 3)$ et son question par l'action de $SU(2) \approx S^3$ donne une fibration dont la base s'identifie à la boule unité quaternionique. On commence alors par calculer le laplacien horizontal dans les coordonnées de la boule et de la fibre. Ensuite, on en déduit l'expression de ce laplacien en coordonnées cylindriques qui sont la norme Euclidienne de la boule quaternionique et la distance géodésique dans $SU(2)$ par rapport à l'identité. Cette expression montre que la partie radiale est celle du laplacien de la boule quaternionique et que la partie angulaire provient du Laplacien dans $SU(2)$ changé de temps (on a donc un skew-product). Après, on donne par deux méthodes différentes une représentation intégrale du noyau de la chaleur du laplacien horizontal de laquelle on détermine son comportement en temps petit. En particulier, on obtient une relation entre ce noyau de la chaleur et celui du sous laplacien de la fibration d'Anti de Sitter complexe de dimension $4n + 1$. La dernière partie du travail est consacrée au 'twisteur' de l'espace d'Anti de Sitter quaternonique: c'est l'espace pseudo-hyperbolique complexe de signature $(4n, 2)$ obtenue en identifiant un quaternion à deux nombres complexes et en faisant agir le groupe S^1 sur l'espace d'Anti de Sitter au lieu de $SU(2)$. La nouvelle fibration est encore au dessus de la boule unité quaternionique mais les fibres sont des lignes projectives complexes $\mathbb{CP}^1 \approx S^2$. En vertu de la fibration de Hopf $S^3/S^1 \approx S^2$, Le sous-Laplacien correspondant est la projection du sous laplacien de l'espace d'Anti de Sitter quaternionique sur $\mathbb{CP}^1$ et on obtient par des arguments analogues une représentation intégrale de son noyau de la chaleur.

6. Grandes déviations

6.1. **Grandes déviations pour des statistiques de processus de Jacobi.** En restant dans le monde des polynômes univariés, on a démontré dans [7] un principe de grandes déviations, conjecturé dans la thèse de M. Zani, pour des statistiques de processus de Jacobi réel définies à partir des trajectoires du processus. Ce dernier peut être défini comme l'unique solution forte de l'EDS

$$dJ_t = 2\sqrt{1 - J_t^2}dB_t + (aJ_t + b)dt, \quad J_0 \in]-1, 1[$$

pour certains réels a, b. L'estimateur considéré est celui du maximum de vraisemblance et estime le paramètre a avec $b = 0$ (cas ultrasphérique). Le calcul de la fonction génératrice exponentielle de l'estimateur repose sur la densité du semi-groupe du processus qui s'écrit en général comme

$$\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda_n t} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y)\mu(y),$$

où $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$, $P_n^{\alpha,\beta}$ est le $n$ième polynôme de Jacobi (qui est la $n$ième fonction propre du générateur du processus associée à la valeur propre λ_n) et μ étant la loi Beta-mesure stationnaire du processus. Dans un premier temps, on considère le processus de Jacobi réel subordonné par un premier temps d'atteinte d'un MB réel avec drift (la loi marginale au temps t du subordinateur est une loi GIG) et on transforme la densité du semi-groupe à l'aide de la formule de Bateman. Dans un second temps, on passe par des transformées de Laplace inverses de fonctions hyperboliques afin de retrouver une autre expression de cette densité. Enfin, l'expression obtenue dans le cas ultrasphérique et quand $x = 0$ nous a permis de montrer le principe de grandes déviations cherché et donc de prouver la conjecture évoquée au début de ce paragraphe. On utilise une extension du Théorème de Gartner-Ellis dans le cas où la limite normalisée de la fonction génératrice exponentielle est non escarpée.

6.2. **Grandes déviations pour des horloges de processus positifs semi-stable.** Un processus X est semi-stable au sens de Lamperti s'il est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et vérifie la propriété de scaling

$$(bX_{t/b^\alpha}, X_0 = x)_{t\geq 0} \stackrel{L}{=} (X_t, X_0 = bx)_{t\geq 0}$$

pour tout $b > 0$ et un certain $\alpha > 0$ dit indice de stabilité. Lamperti a prouvé que si $X > 0$ p.s., alors il existe un processus de Lévy ξ partant de $\xi_0 = 0$ et tel que

$$X_t = xe^{\xi_{\tau_t}}, \quad x > 0,$$

où

$$\tau_t := \int_0^t \frac{ds}{(X_s)^\alpha}$$

est l'horloge associée à X. Inversement, l'inverse A_t de τ_t est donné par la fonctionnelle exponentielle

$$A_t = x^\alpha \int_0^t e^{\alpha\xi_s} ds = \int_0^{x^\alpha t} e^{\alpha\xi_{s/x^\alpha}} ds$$

et la relation de Lamperti peut se mettre sous la forme

$$\xi_t = \log(X_{A_t}) - \log(x).$$

Ainsi, à tout processus de Lévy ξ partant de $\xi_0 = 0$ ne dérivant pas vers $-\infty$, on peut associer un processus semi-stable au sens de Lamperti à valeurs dans $(0, \infty)$.

Dans [24], on suppose que

$$\limsup_{t\to+\infty} \xi_t = +\infty, \quad \mathbb{E}(\xi_1) \in (0, \infty),$$

et on démontre que $(\tau_t)_{t\geq 0}$ satisfait un PGD à l'échelle $\log t$ et avec une fonction de taux étroitement liée à la transformée de Fenchel-Legendre de l'inverse (au sens de la composition) de l'exposant de Laplace de ξ.

En effet, le calcul de la fonction génératrice des cumulants (qui existe dans un voisinage de l'origine) repose sur une relation d'absolue-continuité entre la loi de X et celle du processus semi-stable qui correspond à la transformation d'Escher de l'exposant de Lévy de ξ. On utilise aussi la loi d'entrée de X en $x = 0$ qui permet entre autres de prouver une LGN pour $(\tau_t)_{t\geq 0}$ et la finitude de certains moments de A_∞.

References

[1] Laguerre processes and generalized Hartman-Watson law. *Bernoulli.* **13**, no.2. 2007, 556-580.

[2] Free Jacobi processes. *J. Theor. Proba.* **21** 2008, 118-143.

[3] Free martingale polynomials for stationary free Jacobi processes. *QP-PQ.* **23**. *Quantum Probab. Relat. Topics.* World Scientific, 2008, 107-119.

[4] First hitting time of the boundary of the Weyl chamber by a radial Dunkl process. *SIGMA.* **4**, 2008.

[5] Generalized Bessel function of type D. *SIGMA.* **4**, 2008.

[6] Cauchy-Stieltjes type generating functions for orthogonal polynomials. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Topics*, **12**, no.1, 2009. (Avec M. Bozejko).

[7] Large Deviations for Statistics of Jacobi Process. *Stocha. Proc. Appl.* **119**, 2009. 518-533. (Avec M. Zani).

[8] Topics on Meixner families. *Banach Center for Publications.* 2009. Proceedings of the International Workshop on Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, Bedlewo, Poland (2008). (Avec M. Bozejko).

[9] Radial Dunkl processes associated with dihedral systems. *Séminaire de Probabilités.* **XLII**, 2009. 153-169.

[10] Ultraspherical type generating functions for orthogonal polynomials. *Probab. Math. Statis.* **29**, No.2. 2009. 281-296.

[11] Generalized Cauchy-Stieltjes Transforms of some Beta distributions. *Communications on Stochastic Analysis.* **3**, No. 2. 2009. 197-210.

[12] Product formula for Jacobi polynomials, spherical harmonics and generalized Bessel function of dihedral type. *Integral Transf. Spec. Funct.* **21**, no.2. 2010, 105-123.

[13] Radial Dunkl processes: Existence, uniqueness and hitting time. *C.R.A.S. Paris. Ser.I.* **347**. 2009.

[14] Harmonic and Stochastic Analysis of Dunkl operators. *Hermann Paris. Eds. P. Graczyk, M. Rösler, M. Yor.* 2010.

[15] Kanter random variable and free positive stable laws. *Elect. Comm. Probab.* **16**, 2011. 137-149.

[16] Generalized Bessel function associated with dihedral groups. *J. Lie Theory.* **22**, 2012. 81-91.

[17] Brownian Motion, Reflection Groups and Tanaka Formula. *Rendi. Sem. Mat. Univ. Padova*, **127**, 2012. 41-55. (Avec D. Lépingle).

[18] Spectral measure of the free unitary Brownian motion: another approach. *Séminaire de Probabilités XLIV*, 2012. 191-206. (Avec T. Hmidi).

[19] Spectral distribution of the free Jacobi process. *Indiana. Univ. Mat. J.* **61**, no. 3, 2013. 1351-1368. (Avec T. Hamdi et T. Hmidi).

[20] Spectral distribution of the free Jacobi process associated with one projection. *Colloquium Mathematicum.* **137**, no.2, 2014. 271-296. (avec T. Hmidi).

[21] A stationary process associated with the Dirichlet distribution arising from the complex projective space. *Annales Math. Blaise. Pascal.* **21**, no.2, 2014.

[22] Star-cumulants of the free unitary Brownian motion. *Adv. Applied Maths.* **69**, 1-45, 2015. (Avec M. Guay-paquet et A. Nica)

[23] Probabilistic proof of product formulas for Bessel functions. *Bernoulli.* 21 (2015), no. 4, 2419-2429. (avec L. Deléaval)

[24] Large deviations for clocks of self-similar processes. *Séminaire de Probabilités XLVII, Hommage à Marc Yor.* 443-466. (Avec A. Rouault et M. Zani).

[25] Dunkl kernel associated with dihedral groups. *J. Math. Anal. Appl.* 432 (2015), no. 2, 928-944. (Avec L. Deléaval et H. Youssfi).

[26] Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels. *Infinite Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. topics.* **18**, (2015), no.4. (Avec Z. Mouayn).

[27] Free Jacobi associated with one projection: inverse of the flow. *Complex Anal. Oper. Theory.* **10**, (2016), no.3. 527-543.

[28] Generalized Stieltjes transforms of compactly supported probability distributions: further examples. *SIGMA.* **12**, (2016), 035, 13 pp

[29] Analysis of generalized binomial distributions associated with hyperbolic Landau levels. *J. Math. Phys.* **57** (2016), no. 7. (Avec H. Chhaiba, Z. Mouayn).

[30] Lagrange inversion formula, Laguerre polynomials and the free unitary Brownian motion. J. Oper. Theory. **78**, no.1, (2017). 179-200.

[31] First hitting time of the boundary of a wedge of angle $\pi/4$ by a radial Dunkl process. *ALEA Lat. Amer. J. Probab. and Math. Stat.* **14** (2017), 139-152.

[32] Laplace-type integral representations of the generalized Bessel function and the Dunkl kernel of type $B2$. (Avec B. Amri). *Moscow Math. J.* **Vol. 17**. No. 2. (2017),1-15.

[33] On a Neumann-type series of modified Bessel functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* **146**, no. 5. (2018), 2149-2161. (avec L. Deléaval).

[34] Moments of the Hermitian Jacobi process. *J. Theor. Probab.* **31** (2018), no. 3, 1759-1778. (Avec L. Deléaval).

[35] Reciprocal of the First hitting time of the boundary of dihedral wedges by a radial Dunkl process. *Markov. Proc. Rel. Fields.* **23**, (2017), 661-678.

[36] Inverse of the flow and moments of the free Jacobi process associated with one projection. Random Matrices: theory and applications. **Vol. 7.** No. 2, (2018), 19 pages. (Avec T. Hamdi).

[37] Integral representation of the sub-elliptic heat kernel on the Anti-de Sitter space. *Archiv der Math* (Basel). **111**, (2018), no. 4. 399-406. (Avec F. Baudoin).

[38] The hyperbolic-type point process. *Journal of the Mathematical Society of Japan.* **Vol. 71**, No. 4, (2019), 1137-1152. (Avec P. Lazag).

[39] Markov Semi-groups associated with the complex unimodular group $Sl(2, \mathbb{C})$. *J. Fourier Anal. Appl.* **Vol. 25**, Issue 5, (2019), 2503-2520.

[40] Densities of generalized stochastic areas and windings arising from Anti de Sitter and Hopf fibrations. *Indag. Maths.* Issue 2, 2020. 204-222.

[41] The Horizontal Heat Kernel on the Quaternionic Anti-De Sitter Spaces and Related Twistor Spaces. *Potential Anal.* **Vol. 52**. Issue 2. (2020), 281-300. (Avec F. Baudoin et J. Wang).

[42] Generalized Bessel functions of dihedral-type and Horn confluent functions. Ramanujan J. Maths. (Avec L. Deléaval).

[43] New Expressions for Ergodic Capacities of Optical Fibers and Wireless MIMO Channels. (Avec A. Nafkha, R. Bonnefoi).