

Exercice n°1

On considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $n \geq 1$.

- 1) Soit $n \geq 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$. Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $3 > 1$), on en déduit que $\sum f_n$ converge normalement (et donc simplement) sur $\mathbb{R}$.
- 2) $\forall n \geq 1$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de plus $\sum f_n$ converge uniformément (car normalement) sur $\mathbb{R}$ donc (théorème de continuité des séries de fonctions) $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) $\forall n \geq 1$, f_n est continue sur le segment $[0, \pi]$ et de plus $\sum f_n$ converge uniformément (car normalement) sur $[0, \pi]$ donc (théorème d'intégration des séries de fonctions) $\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx$.

On a donc $\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{-\cos(nx)}{n^4} \right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4}$. Comme $1 - (-1)^n = 0$ si n est pair ($n = 2p$) et $1 - (-1)^n = 2$ si n est impair ($n = 2p - 1$), on en déduit finalement

$$\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^4}$$

- 4) • $\forall n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $f'_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{n^2}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), on en déduit que $\sum f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par suite,

- $\sum f'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$,
- $\sum f_n$ converge simplement en au moins un point de $\mathbb{R}$ (c'est clair d'après 1) !),

donc (théorème de dérivation des séries de fonctions) $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est dérivable (et même de classe

C^1) sur $\mathbb{R}$ et on a $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

- 5) On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = f(\frac{\pi}{2}) - f(0)$ soit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3}$. Comme $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ si $n = 2p$ et $\sin(n\frac{\pi}{2}) = (-1)^p$ si $n = 2p + 1$, on a bien finalement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Exercice n°2

Pour tout réel positif x , on définit $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$, $n \geq 0$.

- 1) Soit $x \geq 0$. La série numérique $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ est alternée et on a $\left| (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme d'autre part la suite $\left(\frac{e^{-nx}}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (car pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx}$ et

$\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{e^{-nx}}{n+1}$), le critère spécial à certaines séries alternées (cas particulier du théorème de Abel) permet de conclure que $\sum (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ converge.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

- 2) Soit $a > 0$. $\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{n+1}$. Or $n^2 \frac{e^{-na}}{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n e^{-na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles) donc (critère de Riemann) $\sum \frac{e^{-na}}{n+1}$ converge. Par suite, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

- 3) On a $|f_n(0)| = \frac{1}{n+1}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge donc $\sum f_n$ ne converge pas absolument en 0. La convergence normale entraînant la convergence absolue, 0 ne saurait donc être dans un intervalle où la convergence est normale : la convergence n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.

- 4) Le critère spécial appliqué à la première question affirme aussi que pour tout n de $\mathbb{N}$, la valeur absolue du reste d'ordre n est majorée par la valeur absolue de son premier terme. Cela donne ici, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|R_n(x)| \leq \frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. En conséquence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0, +\infty[} |R_n| = 0$ et la série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.