

**Rapport scientifique  
présenté à l'Université de Rennes 1**

**Par NIZAR DEMNI**

en vue de l'obtention du diplôme  
d'Habilitation à Diriger des Recherches

Intitulé :

**Aspects analytiques et probabilistes des processus  
de Dunkl et de Jacobi libre**

Soutenue le 2 décembre 2013

devant le jury composé de :

<b>Dominique Bakry</b>	Univ. Paul Sabatier	Rapporteur
<b>Philippe Biane</b>	Univ. Marne la vallée	Examineur
<b>Jean-Christophe Breton</b>	Univ. Rennes 1	Examineur
<b>Thierry Lévy</b>	Univ. Paris 6	Rapporteur
<b>Dimitri Petritis</b>	Univ. Rennes 1	Examineur
<b>Roland Speicher</b>	Univ. Saarbrücken	Rapporteur

A ma femme.

A ma petite Anna.

A mes parents, à mon frère et à ma belle famille.

## REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier vivement Dominique Bakry, Thierry Lévy et Roland Speicher d'avoir pris le temps de lire ce manuscrit et de faire partie du jury. J'ai aussi l'immense plaisir de remercier Philippe Biane pour sa participation au jury et je ne manque pas d'adresser mes sincères amitiés à Jean Christophe Breton et à Dimitri Petritis.

Je voudrai ensuite exprimer ma gratitude à Catherine Donati-Martin qui a dirigé mes premiers pas vers la recherche.

Je remercie également Alexandru Nica, Dominique Lépingle, Luc Deléaval, Mathieu Guay-Paquet, Marguerite Zani, Marek Bozejko, Taoufik Hmidi, Tarek Hamdi et Thierry Cabanal-Duvillard, avec qui j'ai pu partager des idées et des discussions intéressantes.

J'ai bénéficié des lectures attentives de Charles Dunkl qui m'a toujours encouragé et orienté dans mes recherches sur les aspects analytiques et algébriques du processus de Dunkl. J'ai beaucoup apprécié l'hospitalité de sa famille durant mon séjour à l'université de Virginie et sa visite à l'université Rennes qui m'a permis encore une fois de profiter de son talent.

Merci aussi à mes collègues de l'équipe de Théorie ergodique, de l'équipe de processus stochastiques et de l'administration de l'UFR et du laboratoire qui m'ont offert un environnement de travail exceptionnel.

Pour terminer, je remercie particulièrement Piotr Graczyk et les membres l'équipe de Probabilités du LAREMA qui, en de nombreuses occasions, m'ont permis d'exposer mes travaux liés aux processus de Dunkl.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Motivations . . . . .	7
1.2	Survol des travaux issus de la thèse . . . . .	9
1.3	Résultats obtenus après la thèse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Processus de Dunkl radial dans les secteurs diédraux</b>	<b>13</b>
2.1	Densité du semi-groupe et conséquences . . . . .	14
2.2	Processus de Dunkl radial et processus de Bessel . . . . .	15
2.3	Premier temps d'atteinte du bord de la chambre de Weyl . . . . .	16
2.4	Fonction de Bessel généralisée . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Mouvement Brownien réfléchi dans les chambres de Weyl</b>	<b>21</b>
3.1	Définition et EDS du type Tanaka . . . . .	21
3.2	Une autre représentation de la dérive . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Processus de Jacobi libre</b>	<b>25</b>
4.1	MB unitaire libre revisité . . . . .	25
4.2	Processus de Jacobi libre : définitions et rappels . . . . .	26
4.3	Mesure spectrale du processus de Jacobi partant de l'identité . . . . .	27
4.3.1	Le cas $\theta = 1/2$ . . . . .	27
4.3.2	$\theta \in (0, 1]$ : spectre de $PY_tPY_t^*P$ et position générale de $P$ et de $Y_tPY_t^*$ . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Familles de Meixner : vers une déformation des probabilités libres</b>	<b>33</b>
5.1	Familles de Meixner . . . . .	33
5.2	Autres caractérisations : équations de Ricatti . . . . .	33
5.3	Famille ultrasphérique . . . . .	35
5.4	Transformées de Cauchy généralisées : exemples . . . . .	35



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Motivations

Ce texte est une présentation des travaux de recherche effectués depuis le début de ma thèse, consacrés à l'étude des propriétés du processus de Dunkl radial et à quelques problèmes liés aux probabilités libres.

Le processus de Dunkl radial, appellation qu'on donne à la composante continue du processus de Dunkl, est défini à partir d'un système de racines réduit dans un espace euclidien de dimension finie ([Hum]). Il dépend d'un ensemble continu de paramètres positifs dits multiplicités et prend ses valeurs dans un cône fixé par le choix d'un ordre partiel dans le système de racines ([Hum]). Les motivations qui m'ont conduit à l'étude de ce processus sont principalement les suivantes :

- Quand toutes les multiplicités sont nulles, on retrouve le mouvement brownien (MB) réfléchi dans une chambre de Weyl qui est un polyèdre convexe simple. Pour des polyèdres convexes généraux, la propriété de semi-martingale du MB réfléchi est déterminée à partir de la géométrie du polyèdre et des angles de réflexions au bord ([Dai-Will]). L'étude systématique de cette propriété pour ces domaines nécessite des outils sophistiqués et des preuves techniques. Par ailleurs, le premier temps de sortie d'un MB de cônes a intéressé plusieurs mathématiciens et physiciens qui ont eu recours pour calculer sa loi à différentes techniques de nature analytique ([Ban-Smi]) ou combinatoire ([Dou-Oco]).
- On retrouve aussi les valeurs propres de processus matriciels figurant dans la classification d'Atland-Zirnbauer ([Kat-Tan]). Par exemple, les valeurs propres du processus de Laguerre correspondent aux systèmes de racines dit 'du type  $B$ ' et des multiplicités qui dépendent de la dimension et du rang du processus matriciel. Celles-ci se meuvent comme des MBs réels, se repoussant entre elles-mêmes et restant positives. Plus généralement, le processus de Dunkl radial fournit un exemple de systèmes de particules en répulsions dictées par le système de racines. Je souligne au passage que le processus de Dunkl radial correspondant au système de racines dit 'du type  $A$ ' a été étudié en détail dans [BBCL]. En particulier, l'existence et l'unicité forte sont prouvées pour une équation différentielle stochastique (EDS) à dérive singulière et la finitude du premier temps de collision est déterminée selon que la valeur de la multiplicité est plus petite ou plus grande que  $1/2$ .
- Quand toutes les multiplicités sont égales à un, le processus de Dunkl radial coïncide avec le MB conditionné à rester dans une chambre de Weyl. Ce processus peut être obtenu à partir d'un MB partant de l'intérieur de la chambre de Weyl et tué dès qu'il touche son bord. Il faut alors faire appel à l'unique fonction minimale positive associée à la chambre de Weyl afin de conditionner le processus tué à sortir par l'infini. En faisant tendre le point de départ vers le sommet du cône, on obtient la loi du MB conditionné à rester dans la chambre et partant du sommet. Une façon de construire ce dernier processus consiste à appliquer des

transformées de Pitman successives à un MB standard dans l'espace euclidien et ceci le long des hyperplans qui figurent dans une expression réduite quelconque du plus long élément du groupe de réflexions ([Bia-Bou-Oco]). De plus, la loi de ce MB conditionnellement au processus conditionné définit la mesure de Duistermaat-Heckman du groupe de réflexions. À un facteur près, cette mesure représente (pour ces multiplicités) l'opérateur d'entrelacement de Dunkl agissant sur les fonctions invariantes par le groupe de réflexions ([Dun-Xu]). En particulier, sa transformée de Laplace est une fonction de Bessel généralisée au sens de Dunkl. Pour un groupe de Weyl, c'est la mesure image par l'application moments de la mesure orbitale d'un groupe de Lie agissant sur son algèbre de Lie, dont la transformée de Laplace est donnée par la formule d'Harish-Chandra ([Gro-Ric]). Sinon, pour les groupes diédraux par exemple, cette représentation de Laplace montre que la fonction exponentielle est totalement positive ([Gro-Ric]) et permet de démontrer une formule produit pour la fonction de Bessel généralisée dans ce cas.

En ce qui concerne mes travaux liés aux probabilités libres, la majeure partie est consacrée à l'étude du processus de Jacobi libre. Celui-ci peut-être défini comme une limite (au sens des moments non commutatifs) du processus de Jacobi matriciel complexe quand la taille de la matrice tend vers l'infini. En effet, ce dernier a été introduit par Y. Doumerc comme étant la partie radiale d'un coin supérieur gauche du MB dans le groupe des matrices unitaires ([Dou]). De plus, le MB unitaire convenablement normalisé en temps converge vers ce qu'on appelle le MB unitaire libre ([Bia], [Rai]). Ainsi, la compression du MB unitaire par deux projecteurs orthogonaux, dont les rangs normalisés convergent, converge vers la compression du MB unitaire libre par deux projecteurs orthogonaux formant une famille libre avec le MB dans une  $\star$ -algèbre (de von Neumann) muni d'une trace. À partir de là, on peut donner une définition abstraite (sans faire appel aux matrices) du processus de Jacobi libre comme la partie radiale d'une telle compression dans une  $\star$ -algèbre compressée. Ceci étant fait, il est tout à fait naturel de décrire la dynamique 'stochastique libre' de ce processus à partir de l'EDS satisfaite par le MB unitaire libre ([Bia]). Une version plus faible consiste à décrire le spectre de l'opérateur (positif) dans l'algèbre compressée à tout instant  $t$  et même son évolution temporelle. Ceci est d'une importance particulière car les moments du processus de Jacobi libre, à une normalisation près due à la compression, coïncident avec les moments du produit d'un projecteur orthogonal et du projecteur orthogonal image d'un autre (pouvant éventuellement coïncider avec le premier) par le MB unitaire libre agissant par conjugaison. Cette identification et un résultat dû à von Neumann ([vN]) sont des points clés dans l'étude de la position d'un projecteur orthogonal et de l'image d'un autre (éventuellement le même) par conjugaison unitaire libre.

Un autre problème auquel on s'est intéressé est celui de la caractérisation de toutes les familles de polynômes orthogonaux ayant une fonction génératrice du type ultrasphérique. Pourtant de nature analytique, ce problème est motivé par la question suivante : décrire une convolution de mesures positives pour laquelle la limite centrale serait la loi Beta symétrique. Une façon d'attaquer ce problème consiste à répondre à la question suivante : étant donnée une mesure de probabilité, est-il possible d'exprimer sa transformée de Stieltjes généralisée comme une puissance d'une transformée de Stieltjes ordinaire d'une autre mesure de probabilité? Bien sûr, une réponse positive à la deuxième question, quand elle existe, permet de définir analytiquement une déformation de la convolution libre en passant tout simplement et directement par la machinerie analytique décrite par Voiculescu. Cependant, les travaux de certains statisticiens montrent que pour des puissances entières, le passage requis revient à décomposer la première mesure en une combinaison aléatoire convexe de copies indépendantes de la deuxième ([Roo-Sol]). Néanmoins, ce passage est remarquablement autorisé quand on considère la loi Beta symétrique et la loi de Wigner. Il reste alors à chercher d'autres exemples et c'est là où entre en jeu le problème de caractérisation évoqué ci-dessus. On a alors revisité les familles de Meixner classique (fonctions génératrices du type exponentiel) et libre (type résolvente) en cherchant une approche commune à leurs caractérisations.

En effet, ces deux familles incluent les polynômes d’Hermite et de Tchebycheff de deuxième espèce, dont les mesures d’orthogonalité (la loi de Gauss et la loi de Wigner) sont les lois limites centrales des convolutions classique et libre.

## 1.2 Survol des travaux issus de la thèse

Dans [D1], le processus de Laguerre, version complexe du processus de Wishart, est étudié. La première partie de ce travail contient les analogues des résultats obtenus par M.F. Bru dans le cas réel. Quant à la deuxième partie, on y prouve de nouveaux résultats qui sont typiques de la structure complexe. Plus exactement, les fonctions spéciales multivariées intervenant dans les calculs possèdent un développement analytique dans la base des fonctions de Schur (qui sont les caractères des représentations irréductibles du groupe unitaire). En vertu de la formule de Cauchy-Binet, elles s’expriment alors comme un quotient d’un déterminant d’une matrice dont les coefficients sont des fonctions spéciales à une variable réelle, par un déterminant de Vandermonde. En particulier, en dimension 2, on a pu calculer la densité de la loi de Hartman-Watson généralisée et celle de l’inverse du premier temps pour lequel le processus de Laguerre devient singulier.

Ensuite, on s’est intéressé à la loi du premier temps de sortie du processus de Dunkl radial d’une chambre de Weyl ([D4]) : c’est une variable aléatoire finie presque sûrement quand une multiplicité (au moins) prend ses valeurs dans  $[0, 1/2)$  ([Chy]). Procédant de la façon ‘habituelle’, sa queue de répartition est déduite à partir des relations d’absolu-continuité du processus de Dunkl, ce qui amène au calcul d’une certaine intégrale. Cette dernière dépend d’un paramètre et vue comme une fonction de ce paramètre, on prouve qu’elle est l’unique fonction propre invariante par le groupe de réflexion d’un opérateur différentiel qui peut être vu comme la version Ornstein-Uhlenbeck du Laplacien de Dunkl radial. La valeur propre correspondante est la somme de la dimension de l’espace euclidien et du cardinal du système positif. En particulier, la queue de répartition s’exprime à l’aide d’une fonction hypergéométrique multivariée pour les systèmes de racines irréductibles  $A, B, D$ . En particulier, on obtient des représentations déterminantales quand toutes les multiplicités sont nulles. Une autre approche équivalente (développée après la thèse) fait appel aux polynômes d’Hermite-Dunkl invariants par le groupe de réflexions : ce choix est naturel puisque ces polynômes donnent la décomposition spectrale (discrète) de l’opérateur décrit plus haut.

Vient après l’étude du MB conditionné à rester dans une chambre de Weyl. À ce propos, le principe de réflexion dans sa version générale donnée dans [Gra] et le conditionnement au sens de Doob d’un MB tué par la fonction harmonique minimale du cône constituent un cas particulier du principe du ‘Shift’ ([Dun]). Ce principe permet de déduire la fonction de Bessel généralisée associée à une fonction de multiplicité donnée à partir du noyau de Dunkl associée à une fonction de multiplicité décalée de  $-1$  par rapport à la première sur une (ou plusieurs) orbite(s), et de son (ou du produit de leurs) polynôme(s) alterné(s). En particulier, le semi-groupe du MB conditionné s’obtient en faisant un ‘Shift’ de  $+1$  sur toutes les orbites du système de racines partant de multiplicités toutes nulles. Une application judicieuse de ce principe permet de donner l’expression de la fonction de Bessel généralisée de type  $D$  connaissant celle de type  $B$  (la preuve figurant dans [D5] est différente de celle écrite dans ma thèse).

En ce qui concerne le processus de Dunkl, le dernier résultat prouvé dans la thèse est le suivant ([D12]) : si les multiplicités sont toutes strictement positives alors le processus de Dunkl radial est l’unique solution forte d’une EDS à dérive singulière et ceci même partant du bord de la chambre. Ce résultat s’appuie sur la théorie des EDS multivoques développée dans [Cep-Lep]. Il améliore d’autres résultats liés aux valeurs propres des processus de Wishart et de Laguerre et donne une réponse positive à une conjecture de Léonard Gallardo et Marc Yor : la taille des sauts effectués par le processus de Dunkl pendant un intervalle de temps borné est finie presque sûrement. Les mêmes techniques restent valables pour l’étude de particules dans un intervalle ([D13]). Plus précisément,

le processus formé par ces particules prend ses valeurs dans la cellule de Weyl du système de racines non réduit du type  $BC$  (ceci est implicite dans [Bee-Opd]). Il généralise le processus des valeurs propres des processus de Jacobi matriciel réel et complexe. Dans le cas réel et en dimension 1, on retrouve le processus de Jacobi réel. La densité du semi-groupe de ce processus a été transformée dans [Dem-Zan] moyennant un subordonateur généralisé. Cette transformation a permis d'obtenir une nouvelle expression de la densité qui a été l'ingrédient principal dans l'obtention d'un principe de grandes déviations pour des statistiques de processus de Jacobi (conjecturé dans la thèse de Doctorat de M. Zani). Dans le cas complexe, le processus des valeurs propres est une transformée de Doob de processus de Jacobi indépendants et apparaît comme le processus limite d'une chaîne de Markov sur le graphe de Gelfand-Tsetlin ([Gor]).

Finalement, on a défini et commencé l'étude du processus de Jacobi libre dans ([D2]). En utilisant le calcul stochastique libre, on a décrit ce processus comme une solution d'une EDS sous réserve que son spectre discret ne contienne pas  $\{0, 1\}$ . Cette EDS permet également d'imposer des conditions suffisantes pour lesquelles le processus reste injectif éternellement s'il l'est déjà initialement. Dans le cas stationnaire, elle permet aussi d'obtenir une famille de polynômes martingales par rapport à la filtration naturelle du processus. Plus généralement (dans le cas dynamique), on obtient à partir de l'EDS une équation différentielle non linéaire pour les moments du processus. D'une manière équivalente, la fonction génératrice des moments satisfait une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du type transport.

### 1.3 Résultats obtenus après la thèse

Dans [D8], [D11], [D14], l'étude du processus de Dunkl radial se poursuit en se focalisant cette fois sur les groupes diédraux. L'intérêt porté à ces systèmes de racines est dû au fait qu'ils sont de rang 2, qu'ils sont en général non crystallographiques et que la partie angulaire du générateur du processus est l'opérateur de Jacobi (on sait déjà que la partie radiale est un processus de Bessel). Dans un premier temps et moyennant un conditionnement ([D8]), on donne une expression explicite de la densité du semi-groupe : celle-ci se met sous la forme d'un noyau reproduisant avec une fonction de Bessel modifiée et deux polynômes de Jacobi. On en déduit directement la fonction de Bessel généralisée ainsi que les polynômes d'Hermite-Dunkl invariants par le groupe à partir de la formule de Mehler qu'ils vérifient. Ensuite, le processus de Dunkl radial est réalisé à partir de deux processus de Bessel indépendants et d'un changement de temps aléatoire généralisant l'horloge de Bessel. Cette dernière reflète bien la non commutativité du groupe de réflexion car elle devient déterministe seulement quand le groupe est  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . En particulier, le MB conditionné est construit à partir de deux processus de Bessel de dimension 3 et du changement de temps, donnant ainsi une construction différente de celle donnée dans [Bia-Bou-Oco]. La dernière partie de [D8] est consacrée à la loi du temps de sortie du processus de Dunkl radial d'un secteur diédral : elle est calculée à partir de la loi du temps de sortie d'un processus de Jacobi réel de l'intervalle  $[0, 1]$  et de la loi d'une horloge de Bessel. Ceci étant fait, il est à noter que l'approche développée dans [D4] reste valable dans le cas des groupes diédraux et mène aux mêmes résultats.

Dans un second temps, on transforme la fonction de Bessel généralisée en faisant appel à la formule de Dijksma-Koornwinder ([Dij-Koo]). On s'intéresse d'abord au groupe des symétries du carré (groupe diédral d'ordre 8, [D11]) puis on traite le cas général ([D14]). Ainsi on retrouve par exemple, quand le groupe est  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , la fameuse série de L. Gegenbauer (qui découle du théorème d'addition pour les fonctions de Bessel, [Wat]), et quand c'est le groupe des symétries du carré  $S_2 \times (\mathbb{Z}_2)^2$ , une série qui apparaît dans [Kob-Man] en liaison avec une représentation du groupe pseudo-orthogonal  $O(n, 2)$ . Une expression fermée existe dans ces deux cas : une exponentielle dans le premier et une fonction de Bessel modifiée dans le deuxième. Pour un groupe diédral quelconque et quand la somme des multiplicités est un entier, la transformée de Fourier sphérique mène à une somme sur

les éléments du groupe d'exponentielles qu'on dérive autant de fois que la somme des multiplicités<sup>1</sup>. Avec cette formule, on voit clairement que la non commutativité du groupe se traduit par le calcul de l'inverse d'un polynôme de Tchebycheff de première espèce dont le degré est l'ordre du groupe ou bien sa moitié, selon la parité du groupe. En particulier, on retrouve les formules fermées citées plus haut et on examine de près le cas du groupe  $G_2$ . Plus généralement, l'inverse du polynôme de Tchebycheff s'écrit à l'aide de la fonction hypergéométrique de Gauss et la formule de Faa di Bruno permet ainsi de calculer explicitement les dérivées successives.

De retour aux aspects probabilistes du processus de Dunkl radial, l'étude du MB réfléchi a fait l'objet de [Dem-Lep]. Ce cadre correspond aux multiplicités (toutes) nulles et peut donc être vu comme 'l'antipode' de celui étudié dans [D12] (multiplicités toutes strictement positives). De plus, l'action du groupe de réflexion sur l'espace euclidien permet une construction concrète du MB réfléchi dans une chambre de Weyl : il suffit de 'plier' un MB dans l'espace euclidien autant de fois que le nombre des racines positives figurant dans une expression réduite de l'élément le plus long du groupe. Ce pliage est en fait une composition de projecteurs de rang 1 et la formule de Tanaka utilisée successivement permet alors de prouver le résultat principal de [Dem-Lep] : le MB réfléchi dans une chambre de Weyl d'un système de racines est une semi-martingale et les directions de réflexions au bord de la chambre sont celles des racines simples. De même que pour le MB réfléchi en 0, le processus du bord pointant dans la direction d'une racine simple donnée est représenté comme le temps d'occupation du MB réfléchi dans la chambre de Weyl près de la facette de la chambre qui est orthogonale à cette racine. De plus, l'action fondamentale du groupe de réflexion améliore cette représentation. En effet, le processus du bord dans la direction de la racine simple peut s'écrire comme somme de temps locaux de la projection du MB de départ sur toutes les racines positives de son orbite : il faut et il suffit qu'il n'y ait aucune autre racine simple dans l'orbite. Tel est le cas du système de racines du type  $B_2$  mais ce n'est pas le cas du type  $A_2$ .

En ce qui concerne le processus de Jacobi libre, on a d'abord obtenu une famille plus large de polynômes martingales dans le cas stationnaire ([D3]). Pour cela, on utilise l'EDS libre pour les moments du processus de Jacobi libre et on cherche des solutions analytiques autour de 0 d'équations différentielles et qui sont des séries génératrices de polynômes orthogonaux. Ensuite, on a abouti dans [Dem-Ham-Hmi] à l'EDP satisfaite par la fonction génératrice des moments sans aucune contrainte spectrale, contrairement à ce qui a été fait dans [D2] en passant par l'EDS libre. Ainsi, on a pu commencer l'étude du processus de Jacobi libre partant initialement de l'identité de l'algèbre compressée qui n'est autre que le projecteur orthogonal faisant la compression de l'algèbre de départ. Quand son rang vaut  $1/2$ , la résolution de l'EDP mène à la description suivante de la mesure spectrale du processus de Jacobi libre dans l'algèbre compressée : elle coïncide avec celle du 'cosinus' du MB unitaire libre dans l'algèbre de départ, modulo le changement de temps  $t \mapsto 2t$ . On rappelle à ce propos que la description de la mesure spectrale du MB unitaire libre figure dans [Bia], et qu'on y est arrivé dans [Dem-Hmi] directement à partir d'une représentation intégrale de ses moments. Dans la dernière partie de [Dem-Ham-Hmi], on donne une autre preuve menant à la description de la mesure spectrale du processus de Jacobi libre. Celle-ci repose sur une identité algébrique remarquable ramenant l'étude du processus de Jacobi libre à celle d'un processus unitaire. Ce dernier s'écrit comme le produit de la symétrie associée au projecteur et de son image sous l'action du MB unitaire libre par conjugaison. Quand le rang du projecteur vaut  $1/2$ , la symétrie est de moyenne nulle et la mesure spectrale de l'opérateur unitaire au temps  $t$  est celle du MB unitaire libre changé de temps  $t \mapsto 2t$ . Ce dernier fait peut être généralisé pour des temps arbitraires à l'aide du Lemme 3.8 de [Haa-Lar].

Pour des rangs arbitraires du projecteur et motivé par la théorie de libération de Voiculescu ([Col-Kem]), on a eu recours à l'identité algébrique évoquée plus haut dans le but de décrire la mesure spectrale de l'opérateur unitaire à tout instant  $t$  ([Dem-Hmi1]). Dans un premier temps, on

---

1. Une autre preuve non publiée de ce résultat est écrite plus loin.

s'est intéressé à la mesure stationnaire du processus : on sait déjà que c'est la mesure uniforme sur le cercle unité quand le rang vaut  $1/2$  et elle devient supportée par deux arcs disjoints symétriques par rapport à l'axe des réels pour des rangs arbitraires. D'une manière équivalente, les moments de la mesure de Haar sur le cercle sont nuls et ceux de la mesure stationnaire s'expriment en général à l'aide de certains polynômes de Jacobi. Dans un second temps, on traite le cas dynamique et le calcul stochastique libre permet d'écrire une EDP pour la transformée de Herglotz de la mesure spectrale de l'opérateur unitaire. C'est une EDP du type Burgers mais avec un terme source proportionnel au premier moment de la symétrie associée au projecteur. La méthode des caractéristiques montre l'existence d'un flot le long duquel la dynamique spectrale à tout instant  $t$  est décrite uniquement par les transformées de Herglotz de la mesure spectrale à  $t = 0$  (masse de Dirac  $\delta_1$ ) et de la mesure stationnaire ( $t = \infty$ ). Ainsi, on prouve que si le premier moment de la symétrie est non nul, alors 1 est une valeur propre de l'opérateur unitaire à tout instant  $t > 0$ . On en déduit, en faisant appel encore une autre fois à l'identité algébrique, un résultat similaire pour le processus de Jacobi libre quand le rang du projecteur est différent de  $1/2$ . Par conséquent, on prouve par le moyen d'outils analytiques que le projecteur et son image par conjugaison avec le MB unitaire libre sont en position générale pour tout temps  $t$  (voir [Izu-Ued] pour une preuve de nature algébrique). Quant à la masse en  $x = 0$ , on a montré qu'elle est proportionnelle à la masse de la mesure spectrale de l'opérateur unitaire en  $z = -1$  et que cette dernière est nulle. Une fois la partie discrète de la mesure spectrale du processus de Jacobi libre décrite, on a exprimé sa densité à l'aide de l'extension non-tangentielle de la transformée de Herglotz au cercle unité. Malheureusement, on n'a pas pu jusqu'à présent déterminer avec exactitude la décomposition de Lebesgue de cette mesure mais on conjecture qu'elle ne possède pas de partie singulière continue.

Finalement, on a revisité dans [D6], [Boz-Dem] les familles de Meixner libre et classique introduites pour la première fois et respectivement dans [Ans] et [Mei]. Dans [D6], on donne une représentation de la transformée de Voiculescu de toutes les lois constituant la famille Meixner libre. En particulier, on retrouve celle obtenue dans [Boz-Bry] pour les lois infiniment divisibles au sens de la convolution libre et on en obtient une pour la loi binomiale libre. Dans [Boz-Dem], on commence par faire l'état de l'art sur les différentes caractérisations des familles de Meixner libre et classique tout en précisant les liens entre elles. Ensuite, on explique comment on peut caractériser ces familles par le moyen d'équations de Ricatti provenant de la relation de récurrence à trois termes satisfaite par les polynômes orthogonaux et de la forme simple de leurs fonctions génératrices (résolvante et exponentielle respectivement). Avec un peu plus d'effort, cette nouvelle approche s'applique aux fonctions génératrices du type ultrasphérique et cette fois les coefficients de l'équation de Ricatti dépendent bien sûr de cette puissance ([D9]). À des transformations affines près, l'ensemble des solutions comporte trois fonctions génératrices dont deux sont associées à la loi Beta symétrique. De plus, chaque série génératrice peut être réécrite comme une identité dans laquelle la transformée de Cauchy-Stieltjes généralisée d'une loi Beta est une puissance positive d'une transformée de Cauchy-Stieltjes ordinaire d'une mesure de probabilité ([D10]). Mis à part l'exemple générique reliant la loi Beta symétrique et la loi de Wigner, la transformée de Cauchy-Stieltjes généralisée de la deuxième loi symétrique obtenue s'écrit comme une moyenne harmonique du produit de transformées de Cauchy-Stieltjes ordinaires de la loi de Wigner et de la loi de l'arc-sinus. D'autres identités similaires sont obtenues par le moyen d'un calcul direct : la projection de la mesure uniforme sur la sphère unité est liée à la loi de l'arc-sinus et un produit de deux lois Beta indépendantes est lié à la loi de Poisson libre (à une homothétie près).

## Chapitre 2

# Processus de Dunkl radial dans les secteurs diédraux

Les groupes diédraux sont les groupes de symétrie des polygones réguliers dans le plan euclidien. Si le polygone a  $n \geq 3$  côtés, alors le groupe diédral  $\mathcal{D}_2(n)$  est engendré par deux réflexions  $s_1$  et  $s_2$  dont les hyperplans forment un angle diédral d'ouverture  $\pi/n$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer que les sommets du polygone sont les racines  $n$ -ième de l'unité et donc le système diédral  $I_2(n)$  est constitué des vecteurs suivants :

$$\pm i e^{i\pi l/n}, 1 \leq l \leq n.$$

On prendra aussi comme systèmes positif et simple

$$R_+ = \{-i e^{i\pi l/n} := -i e^{i\theta_l}, 1 \leq l \leq n\}, \quad S = \{e^{i\pi/n} e^{-i\pi/2}, e^{i\pi/2}\},$$

et on a  $s_1 : z \mapsto \bar{z}$  et  $s_2 : z \mapsto \bar{z} e^{2i\pi/n}$ . On voit ainsi que si  $n$  est pair, alors l'action de  $\mathcal{D}_2(n)$  sur  $I_2(n)$  a deux orbites alors qu'elle n'en a qu'une si  $n$  est impair. Par conséquent, toute fonction  $\mathcal{D}_2(n)$ -invariante  $k : I_2(n) \rightarrow \mathbb{R}_+$  prend exactement deux valeurs si  $n$  est pair et une seule sinon (une telle fonction est appelée multiplicité). On les notera  $(k_0, k_1)$  et  $k$  respectivement et on supposera quand  $n$  est pair que  $k_1$  correspond à l'orbite formée par les racines dont les hyperplans sont les diagonales du polygone. Étant donné un système diédral  $I_2(n)$  et une fonction multiplicité  $k$ , le processus de Dunkl radial  $X$  associé est la diffusion à valeurs dans

$$\bar{C} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \pi/n]\}$$

et dont le générateur infinitésimal s'écrit (en coordonnées polaires  $y = r e^{i\theta} \in C$ )

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} \left[ \partial_r^2 + \frac{2p(k_0 + k_1) + 1}{r} \partial_r \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial_\theta^2}{2} + p(k_0 \cot(p\theta) - k_1 \tan(p\theta)) \partial_\theta \right]$$

si  $n = 2p, p \geq 2$ , et

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} \left[ \partial_r^2 + \frac{2nk + 1}{r} \partial_r \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial_\theta^2}{2} + nk \cot(n\theta) \partial_\theta \right]$$

si  $n \geq 3$  est impair. Comme on l'a déjà signalée dans l'introduction, la particularité du processus  $X$  est que sa partie angulaire est, à quelques transformations près, un processus de Jacobi réel. En effet, il suffit pour voir cela de faire agir la partie angulaire  $\mathcal{L}_k^\theta$  de  $\mathcal{L}_k$  sur les fonctions  $f : \theta \mapsto f(\cos^2(p\theta))$  ou  $f : \theta \mapsto f(\cos^2(n\theta))$  ensuite de faire un changement de temps  $t \rightarrow t/p^2$  ou  $t \rightarrow t/n^2$ , selon que  $n$  est pair ou impair. On en déduit par exemple que

$$\arg(X) = \frac{1}{p^2} \arccos(J_{p^2 A}), \quad A_t \triangleq \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2},$$

si  $n = 2p$ , où  $J$  est le processus de Jacobi à valeurs dans  $[0, 1]$ , unique solution de l'EDS

$$dJ_t = 2\sqrt{J_t(1-J_t)}dB_t + (d - (d+d')J_t)dt, \quad d, d' \geq 0,$$

où  $B$  est un MB réel standard ([War-Yor]). On remarque aussi que d'un point de vue analytique, on peut se contenter d'étudier les systèmes diédraux pairs et de faire les substitutions

$$p \rightarrow n, k_1 \rightarrow 0, k_0 \rightarrow k$$

afin d'en déduire des résultats analogues pour les systèmes diédraux impairs.

## 2.1 Densité du semi-groupe et conséquences

On rappelle que le semi-groupe du processus  $X$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et que sa densité s'écrit (à une constante de normalisation près) :

$$\frac{1}{t^{\gamma+1}} e^{-(|x|^2+|y|^2)/2t} D_k^W \left( \frac{x}{\sqrt{t}}, \frac{y}{\sqrt{t}} \right) \omega_k^2(y), \quad x, y \in \bar{C},$$

où  $\gamma = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha) = p(k_0 + k_1)$ ,  $\omega_k(y) = \prod_{\alpha \in R_+} \langle \alpha, y \rangle^{k(\alpha)} = r^\gamma \sin(p\theta) \cos(p\theta)$  et  $D_k^W$  est la fonction de Bessel généralisée ([Dun-Xu]). Afin de donner une expression explicite de  $D_k^W$ , on a eu recours à

1. la décomposition spectrale discrète de la partie angulaire  $\mathcal{L}_k^\theta$  de  $\mathcal{L}_k$ , donnée par les polynômes de Jacobi ([Rain]) :

$$\mathcal{L}_k^\theta P_j^{k_0-1/2, k_1-1/2}(\cos(2p\cdot))(\theta) = \lambda_j P_j^{k_0-1/2, k_1-1/2}(\cos(2p\theta)), \quad \lambda_j = -2j(j + k_0 + k_1);$$

2. la loi de Hartman-Watson définie par sa transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}_\rho[e^{\lambda_j p^2 A_t} | |X_t| = r] = \frac{I_{\sqrt{\gamma^2 - 2\lambda_j p^2}}(\rho r/t)}{I_\gamma(\rho r/t)}, \quad A_t \triangleq \int_0^t \frac{ds}{|X_s|^2},$$

où  $X_0 = x = \rho e^{i\phi} \in C$ ,  $I_\nu$  est la fonction de Bessel modifiée d'indice  $\nu \in \mathbb{R}$  ([Wat]) et  $\mathbb{E}_\rho$  est la loi du processus de Bessel  $|X|$ .

En conditionnant  $X$  par le passé de sa partie radiale jusqu'au temps  $t$ , on démontre que :

**Proposition.** *La densité du semi-groupe de  $X$  à l'instant  $t$  s'écrit :*

$$\frac{1}{c_k t} \left( \frac{r}{\rho} \right)^{p(k_0+k_1)} e^{-(\rho^2+r^2)/2t} \sin^{2k_0}(p\theta) \cos^{2k_1}(p\theta) \sum_{j \geq 0} I_{p(2j+k_0+k_1)} \left( \frac{\rho r}{t} \right) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\phi)) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\theta))$$

où  $c_k$  est une constante de normalisation et  $l_0 \triangleq k_0 - 1/2, l_1 \triangleq k_1 - 1/2$ .

**Remarque.** Les valeurs  $k_0 = k_1 = 0$  ( $k_0 = k_1 = 1$ ) correspondent au MB réfléchi dans  $\bar{C}$  (MB conditionné à ne pas toucher  $\partial C$ ).

Une conséquence immédiate est la suivante :

**Corollaire 1.** *La fonction de Bessel généralisée est donnée à une normalisation près par*

$$D_k^W(\rho, \phi, r, \theta) \propto \left( \frac{2}{r\rho} \right)^\gamma \sum_{j \geq 0} I_{2jp+\gamma}(\rho r) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\phi)) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\theta)).$$

Comme autre conséquence, on obtient une expression explicite des polynômes  $(H_\tau^W)_{\tau \in \mathbb{N}^2}$ , parties  $\mathcal{D}_2(n)$ -invariantes des polynômes de Dunkl-Hermite ([Dun-Xu]). Pour ce faire, on part du membre de droite dans la formule suivante (conséquence directe de celle vérifiée par les polynômes de Dunkl-Hermite, [Dun-Xu]) :

$$\sum_{\tau \in \mathbb{N}^m} H_\tau^W(x) H_\tau^W(y) r^{|\tau|} = \frac{1}{(1-r^2)^{\gamma+m/2}} \exp -\frac{r^2(|x|^2 + |y|^2)}{2(1-r^2)} D_k^W \left( x, \frac{r}{1-r^2} y \right), \quad |r| < 1.$$

Ensuite on utilise la formule de Hille-Hardy -formule du type Mehler pour les polynômes de Laguerre  $(L_q^a, a > -1)_{q \geq 0}$  pour conclure que

**Corollaire 2.** *Si  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{N}^2$  alors*

$$H_\tau(x) = H_\tau(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{q!}{\Gamma(2jp + q + \gamma + 1)}} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)^{jp} L_q^{2jp+\gamma} \left(\frac{\rho^2}{2}\right) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\phi)),$$

si  $\tau_1 = 2q, \tau_2 = 2jp, j \geq 0$  et zéro sinon.

## 2.2 Processus de Dunkl radial et processus de Bessel

Dans ce paragraphe, on donne une construction du processus de Dunkl radial  $X$  uniquement à partir de deux processus de Bessel indépendants. Ceci n'est pas un pur hasard mais n'est pas non plus trivial. En effet, le processus de Jacobi réel, qui n'est autre que la partie angulaire de  $X$  à quelques transformations près, possède la représentation en produit mixte suivante ([War-Yor]) : si  $Z_1, Z_2$  désignent deux processus de Bessel indépendants de dimensions  $d, d' \geq 1$  alors il existe un processus de Jacobi  $J$  sur  $[0, 1]$  de paramètres  $(d, d')$  et tel que

$$\frac{Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2} = J \left( \int_0^\cdot \frac{ds}{Z_1^2(s) + Z_2^2(s)} \right).$$

De plus, le processus  $J$  et l'horloge de Bessel à laquelle il est couplé sont indépendants. Par ailleurs, pour tous réels conjugués  $r, q$  et tout processus de Bessel  $R_\nu$  d'indice  $\nu > -1/q$ , il existe un autre processus de Bessel  $R_{\nu q}$  tel que ([Bia-Yor])

$$q^2 R_\nu^{2/q} = R_{\nu q}^2 \left( \int_0^\cdot R_\nu^{-2/r}(s) ds \right). \quad (2.1)$$

En combinant ces deux représentations, on aboutit à la description suivante :

**Proposition.** *Si  $d = 2k_1 + 1, d' = 2k_0 + 1$  et si*

$$\tau := \int_0^t \frac{ds}{[Z_1^2(s) + Z_2^2(s)]^{(p-1)/p}}, \quad p \geq 2,$$

alors il existe un processus de Dunkl radial  $X$  associé à  $\mathcal{D}_2(2p)$  tel que  $X_\tau$  et le processus

$$\left[ p(Z_1^2 + Z_2^2)^{1/2p}, \frac{1}{p} \arccos \sqrt{\frac{Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2}} \right].$$

soient indistinguables.

**Remarque.** La partie radiale de  $X$  est le processus de Bessel provenant de la représentation de Biane-Yor appliquée au processus de Bessel  $\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$ . Ceci montre que  $X$  et  $\tau$  ne sont pas indépendants (si  $p = 1, \tau_t = t$  et le résultat annoncé dans la proposition est trivial).

## 2.3 Premier temps d'atteinte du bord de la chambre de Weyl

Soit  $T_0$  le premier temps d'atteinte de  $\partial C$ . En utilisant l'identification de la partie angulaire à un processus de Jacobi, on a

$$T_0 = \inf\{t > 0, J_{p^2 A_t} \in \{0, 1\}\}.$$

Par conséquent,

$$\{T_0 > t\} = \{T_J > p^2 A_t\}$$

où  $T_J$  est le premier temps d'atteinte de  $\{0, 1\}$  par le processus de Jacobi  $J$ . Mais l'indépendance de  $J$  et de  $A_t$  implique que

$$\mathbb{P}(T_0 > t) = \int \mathbb{P}(T_J > p^2 s) \mathcal{L}_{A_t}(ds).$$

Il reste alors à calculer la loi de  $T_J$ , à partir des relations d'absolu-continuité entre les lois de  $J$  associées à différents paramètres. On obtient par exemple la formule suivante :

**Proposition.** *Soit  $x = \rho e^{i\phi} \in C$  et supposons que  $0 \leq k_0, k_1 \leq 1/2$  (avec au moins une des deux valeurs qui est  $< 1/2$  afin d'assurer que  $T_0 < \infty$  presque sûrement). Alors*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_0 > t) &= \frac{e^{-\rho^2/2t}}{c_k} \left(\frac{\rho}{\sqrt{t}}\right)^{\gamma-2p} \sin^{2l_0}(p\phi) \cos^{2l_1}(p\phi) \\ &\quad \sum_{j \geq 0} S_2(j) \frac{\Gamma(a_j + 1)}{\Gamma(b_j + 1)} \left(\frac{\rho}{\sqrt{2t}}\right)^{2jp} {}_1\mathcal{F}_1\left(a_j + 1, b_j + 1, \frac{\rho^2}{2t}\right) P_j^{l_1, l_0}(\cos(2p\phi)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_2(j) &= \frac{1}{2p} \int_{-1}^1 P_j^{k_1-1/2, k_0-1/2}(s) ds, \\ a_j &= (j+1)p, \quad b_j = p(2j + k_0 + k_1). \end{aligned}$$

et  ${}_1\mathcal{F}_1$  est la fonction hypergéométrique confluyente ([Rain]).

**Remarques.** 1/Si on prend  $k_0 = k_1 = 0$ , on retrouve la loi du temps de sortie du cône  $\bar{C}$  par un MB plan.

2/Le même raisonnement permet d'obtenir des formules similaires quand  $k_0 \geq 1/2, k_1 < 1/2$  ou  $k_0 < 1/2, k_1 \geq 1/2$ .

## 2.4 Fonction de Bessel généralisée

Dans [Gro-Ric], les auteurs ont défini et étudié la propriété de positivité totale de la fonction exponentielle par rapport à un groupe de réflexion fini. Dans le cas des groupes de Weyl, cette propriété découle de la formule d'Harish-Chandra pour les groupes de Lie semi-simples. Plus généralement, il est immédiat de la définition même qu'elle est équivalente à la positivité de la fonction de Bessel généralisée  $D_1^W$ . Ceci est le cas en vertu de la positivité du semi-groupe du processus de Dunkl radial qui n'était pas encore démontrée au moment de la parution de [Gro-Ric]. En particulier, dans le cas des groupes diédraux  $\mathcal{D}_2(n)$ , il a été conjecturé dans [Gro-Ric] que la positivité totale de la fonction exponentielle est équivalente à la positivité de la série

$$\sum_{j \geq 0} I_{n(j+1)}(\rho r) \sin[(j+1)\phi] \sin[(j+1)\theta]$$

pour  $x = \rho e^{i\phi}, y = r e^{i\theta} \in C$ . On déduit alors à partir de l'expression de  $D_1^W$  obtenue dans [D8] que la conjecture est vraie. Même mieux, il a été prouvé dans [Bia-Bou-Oco] que  $D_1^W$  est la transformée

de Laplace d'une mesure de probabilité qui étend la mesure de Duistermaat-Heckman pour les groupes de Weyl aux groupes de réflexion finis. De plus, son support a une description relativement simple dans le cas des groupes diédraux (moyennant des polynômes de Tchebycheff de deuxième espèce) et sa densité est polynomiale par morceaux. Motivé par ces résultats, on a essayé de mieux comprendre la structure analytique de  $D_k^W$  ([D11], [D14]). L'ingrédient principal qu'on a utilisé est la formule produit pour les polynômes de Jacobi ([Dij-Koo]). Ainsi, on a été amené aux deux séries suivantes

$$\sum_{j \geq 0} (\pm 1)^j (j + \nu) I_{p(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta), \quad R \geq 0, \zeta \in [0, \pi].$$

Mais comme  $C_j^\nu(-\cos \zeta) = (-1)^j C_j^\nu(\cos \zeta)$ , on passe d'une série à l'autre en changeant  $\zeta$  en  $\zeta + \pi$  et donc on peut restreindre notre attention à celle où il n'y pas le facteur  $(-1)^j$ . Cette série peut s'interpréter quand  $\nu \triangleq (d-2)/2$ ,  $d \geq 4$  est un entier, comme une série de Fourier d'une fonction sur la sphère euclidienne de  $\mathbb{R}^{2d+2}$ . Une formule d'inversion de cette transformée existe ([Abo-Dha] p.363) et à l'aide du Lemme 2.1 de [D14], on prouve que<sup>1</sup>

**Proposition.** *Si  $\nu \geq 1$  est un entier alors*

$$\sum_{j \geq 0} (j + \nu) I_{p(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta) = \frac{1}{2^\nu (\nu - 1)!} \left[ -\frac{1}{\sin \zeta} \frac{d}{d\zeta} \right]^\nu \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p e^{R \cos[(\zeta + 2\pi s)/p]}$$

et

$$\sum_{j \geq 0} (-1)^j (j + \nu) I_{p(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta) = \frac{1}{2^\nu (\nu - 1)!} \left[ \frac{1}{\sin \zeta} \frac{d}{d\zeta} \right]^\nu \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p e^{R \cos[(\zeta + \pi + 2\pi s)/p]}.$$

**Remarque** (Une autre preuve de la proposition). Quand  $\nu \geq 1$  est un entier, le polynôme ultrasphérique  $C_j^\nu$  et le polynôme de Tchebycheff  $T_{j+\nu}$  sont reliés par l'identité ([Erd-Mag-Ober-Tri])

$$\frac{1}{2^{\nu-1} (\nu - 1)!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} T_{j+\nu}(z) = (j + \nu) C_j^\nu(z),$$

ou bien

$$\frac{1}{2^{\nu-1} (\nu - 1)!} \left[ -\frac{1}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \right]^\nu [T_{j+\nu}(\cos(\cdot))](\zeta) = (j + \nu) C_j^\nu(\cos \zeta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} (j + \nu) I_{p(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta) &= \frac{1}{2^{\nu-1} (\nu - 1)!} \sum_{j \geq 0} I_{p(j+\nu)}(R) \left[ -\frac{1}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \right]^\nu T_{j+\nu}(\cos \zeta) \\ &= \frac{1}{2^{\nu-1} (\nu - 1)!} \left[ -\frac{1}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \right]^\nu \sum_{j \geq -\nu} I_{p(j+\nu)}(R) T_{j+\nu}(\cos \zeta) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle du fait que  $T_{j+\nu}$  est un polynôme de degré  $j + \nu$ . Le Lemme 2.1 de [D14] montre encore une autre fois que

$$\frac{1}{2^{\nu-1} (\nu - 1)!} \left[ -\frac{1}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \right]^\nu \sum_{j \geq 0} I_{pj}(R) \cos(j\zeta) = \frac{1}{2^\nu (\nu - 1)!} \left[ -\frac{1}{\sin \xi} \frac{d}{d\xi} \right]^\nu \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p e^{R \cos[(\zeta + 2\pi s)/p]}.$$

Cette preuve peut être considérée comme une 'duale' de la preuve originale : en effet elle part d'une identité différentielle entre  $C_j^\nu$  et  $T_{j+\nu}$  alors que celle écrite dans [D14] utilise la représentation intégrale de  $C_j^\nu$  suivante ([Abo-Dha] p.356) :

$$\frac{C_j^\nu(\cos \zeta)}{C_j^\nu(1)} = 2^\nu \frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(\nu) \sqrt{\pi}} (\sin \zeta)^{1-2\nu} \int_0^\zeta T_{j+\nu}(\cos t) (\cos t - \cos \zeta)^{\nu-1} dt.$$

1. Il y a une erreur dans l'énoncé du Théorème 1.1 de [D14].

On termine ce chapitre par présenter une façon de calculer les membres de droite des égalités de la proposition précédente et la fonction  $D_k^W$ . D'abord il est clair que si  $p = 1$ , on retrouve :

$$\left(\frac{2}{R}\right)^\nu \sum_{j \geq 0} (j + \nu) I_{(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{R \cos \zeta},$$

un résultat dû à L. Gegenbauer. Si  $p = 2$ , on retrouve un autre résultat dû à T. Kobayashi et G. Mano ([Kob-Man]) :

$$\left(\frac{4}{R^2}\right)^\nu \sum_{j \geq 0} (j + \nu) I_{2(j+\nu)}(R) C_j^\nu(\cos \zeta) = \frac{1}{2\Gamma(2\nu)} i_{\nu-1/2} \left( R \cos \frac{\zeta}{2} \right)$$

où  $i_\nu(z) \triangleq (2/z)^\nu I_\nu(z)/\Gamma(\nu + 1)$ . Dans cette deuxième formule, on voit apparaître

$$\cos(\zeta/2) = T_2^{-1}(\cos \zeta)$$

valable pour  $\zeta \in [0, \pi]$ . Plus généralement,  $T_p$  est inversible dans  $(\cos(\pi/p), 1)$  car on a

$$\frac{dT_p}{dz}(z) = \frac{p}{\sqrt{1-z^2}} \sin(p \arccos(z)) > 0$$

et il en suit que  $\cos(\zeta/p) = T_p^{-1}(\cos \zeta)$ . On peut donc écrire

$$e^{R \cos[(\zeta+2\pi s)/p]} = e^{R[\cos(2\pi s/p)T_p^{-1}(\cos \zeta) - \sin(2\pi s/p)\sqrt{1-T_p^{-2}(\cos \zeta)}]}$$

où on a noté  $T_p^{-2} = (T_p^{-1})^2$ , ce qui implique que

$$\left[ -\frac{1}{\sin \zeta} \frac{d}{d\zeta} \right]^\nu e^{R \cos[(\zeta+2\pi s)/p]} = \left[ \frac{d}{dz} \right]^\nu e^{R[\cos(2\pi s/p)T_p^{-1}(z) - \sin(2\pi s/p)\sqrt{1-T_p^{-2}(z)}]} \Big|_{z=\cos \zeta}.$$

De plus, l'inverse  $T_p^{-1}$  de  $T_p$  se calcule à partir de la représentation suivante (<http://dlmf.nist.gov/15.4.12>) :

$$\cos(\zeta/p) = {}_2F_1 \left( -\frac{1}{p}, \frac{1}{p}; \frac{1}{2}, \frac{1 - \cos \zeta}{2} \right)$$

où  ${}_2F_1$  est la fonction hypergéométrique de Gauss. Plus précisément, on a

$$T_p^{-1}(z) = {}_2F_1 \left( -\frac{1}{p}, \frac{1}{p}; \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2} \right), \quad z \in (\cos(\pi/p), 1).$$

Ainsi, les formules de dérivation de la fonction  ${}_2F_1$  permettent d'écrire

$$\frac{d^j}{dz^j} T_p^{-1}(z) = c_{p,j} {}_2F_1 \left( -\frac{1}{p} + j, \frac{1}{p} + j; \frac{1}{2} + j, \frac{1-z}{2} \right)$$

où  $c_{p,j}$  est une constante, et on peut utiliser la formule de Faa di Bruno afin de calculer les dérivées successives

$$\left[ \frac{d}{dz} \right]^\nu e^{Rh_p(T_p^{-1}(z))}$$

où

$$h_{p,s}(z) \triangleq \cos(2\pi s/p)z - \sin(2\pi s/p)\sqrt{1-z^2}.$$

Finalement, on rappelle (voir par exemple [D14]) que

$$D_k(\rho, r, \phi, \theta) \propto \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{j \geq 0} (2j + \nu) I_{p(2j+\nu)}(\rho r) C_{2j}^\nu(\cos \zeta) (1 - u^2)^{k_1-1} (1 - v^2)^{k_0-1} du dv$$

où on a écrit pour  $(u, v) \in [-1, 1]^2$

$$\cos \zeta = u \cos(p\theta) \cos(p\phi) + v \sin(p\theta) \sin(p\phi), \quad (\phi, \theta) \in (0, \pi/(2p))^2.$$

Par symétrie des deux lois Beta, on a clairement

$$D_k(\rho, r, \phi, \theta) \propto \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{j \geq 0} (j + \nu) I_{p(j+\nu)}(\rho r) C_j^\nu(\cos \zeta) (1 - u^2)^{k_1-1} (1 - v^2)^{k_0-1} du dv.$$

En notant  $a \triangleq \cos(p\theta) \cos(p\phi)$ ,  $b \triangleq \sin(p\theta) \sin(p\phi)$ , on peut voir que la mesure image du produit des deux lois Beta plus haut par l'application  $(u, v) \mapsto au + bv$  est donnée par

$$\mathbf{1}_{[-(b+a), (b+a)]}(z) \int_{-1 \vee (z-a)/b}^{1 \wedge (z+a)/b} (1 - v^2)^{k_0-1} (a - z + bv)^{k_1-1} (a + z - bv)^{k_1-1} dv \frac{dz}{a^{2k_1-1}}.$$

Comme  $b + a = \cos[p(\phi - \theta)]$  alors l'image de cette mesure par le changement de variable  $z = \cos \zeta$  est

$$\mathbf{1}_{[|p|\phi-\theta|, \pi-|p|\phi-\theta|]}(\zeta) \int_{-1 \vee (\cos \zeta - a)/b}^{1 \wedge (\cos \zeta + a)/b} (1 - v^2)^{k_0-1} (a - \cos \zeta + bv)^{k_1-1} (a + \cos \zeta - bv)^{k_1-1} dv \sin \zeta \frac{d\zeta}{a^{2k_1-1}}.$$

En particulier, si  $k_1 = k_0 = 1$  alors on obtient l'expression simple

$$\sin \zeta \left[ \left( 1 \wedge \frac{\cos \zeta + a}{b} \right) - \left( -1 \vee \frac{\cos \zeta - a}{b} \right) \right] \mathbf{1}_{[|p|\phi-\theta|, \pi-|p|\phi-\theta|]}(\zeta) \frac{d\zeta}{a}.$$

**Remarque.** Dans [Mas-You], les auteurs obtiennent une expression du noyau de Dunkl pour tous les groupes de réflexion. Si on note le groupe de réflexion  $W$ , alors celle-ci fait intervenir une suite  $(C_m(w))_{\{w \in W, m \geq 0\}}$  définie à partir des multiplicités. En particulier, si  $W = \mathcal{D}_2(n)$  et si la fonction multiplicité prend une seule valeur alors les coefficients  $C_m(w)$  se calculent facilement et on obtient ainsi une nouvelle expression de  $D_k^W$  dans ce cas.



# Chapitre 3

## Mouvement Brownien réfléchi dans les chambres de Weyl

### 3.1 Définition et EDS du type Tanaka

Soit  $B$  un MB réel standard, alors le MB réfléchi  $|B|$  est une sous-martingale dont la décomposition de Doob est donnée par ([Rev-Yor])

$$|B_t| = \beta_t + L_t^0(B)$$

où  $\beta$  est un MB réel standard et  $L_t^0(B)$  est un processus croissant connu comme le temps local de  $B$  en 0. En effet,  $L_t^0(B)$  a la représentation suivante

$$L_t^0(B) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{\{|B_s| < \epsilon\}} ds.$$

De plus, le support de la mesure de Stieltjes associée à  $(L_t^0(B))_{t \geq 0}$  est contenu dans  $\{t, B_t = 0\}$ . Dans les travaux de R. Williams et de ses co-auteurs, le MB réfléchi dans un polyèdre convexe a été défini comme une solution (faible), quand elle existe, d'une EDS similaire à celle vérifiée par  $|B|$ . Dans le cas particulier des groupes de réflexion finis, on peut construire le MB réfléchi d'une façon qui ressemble à celle du cas réel et décrire explicitement l'EDS qu'il résout. En effet, la chambre de Weyl associée à un système de racines  $R$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , est un polyèdre convexe

$$\bar{C} = \{x \in \mathbb{R}^d, \langle x, \alpha \rangle \geq 0, \forall \alpha \in S\}$$

où  $S$  est un système simple de  $R$ . On voit alors que le vecteur normal à une facette

$$F_\alpha \triangleq \{x, \alpha\} = \{x, \alpha\} = 0, \langle \beta, x \rangle > 0, \beta \in S \setminus \{\alpha\}, \alpha \in S$$

de  $\bar{C}$  est la racine simple  $\alpha$ . Plus important est le fait que  $\bar{C}$  est un domaine fondamental de l'action de  $W$  sur  $\mathbb{R}^d$  : pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  il existe un et un seul  $x \in \bar{C}$  et un élément  $w \in W$  tel que  $y = wx$ . Ainsi on a la décomposition suivante

$$\mathbb{R}^d = \cup_{w \in W} w\bar{C}$$

et on peut définir une projection  $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{C}$  (la chambre est identifiée à l'espace quotient de  $\mathbb{R}^d$  par l'action de  $W$ ). Le MB réfléchi dans  $\bar{C}$  n'est autre que le processus  $\pi(B)$  où  $B$  est un MB dans  $\mathbb{R}^d$ . En particulier, si  $d = 1$  et  $R = \{\pm 1\}$  alors  $\bar{C} = [0, \infty[$  et on retrouve  $\pi(B) = |B|$ . En dimensions supérieures, on peut écrire  $\pi$  comme une composition d'opérateurs 'de pliage'. Par exemple, si on dessine le plan  $\mathbb{R}^2$  sur une feuille qu'on divise en plusieurs secteurs diédraux et si un point se trouve dans un secteur donné autre que  $\bar{C}$  alors on va le 'ramener' à  $\bar{C}$  en 'pliant' convenablement la

feuille. D'une façon générale, on définit d'abord l'opérateur de pliage associé à une racine simple  $\alpha$  par<sup>1</sup>

$$r_\alpha(x) = x + 2\langle \alpha, x \rangle^- \alpha$$

où pour tout réel  $z$ , on note  $z^-$  sa partie négative. Donc  $r_\alpha(x) = s_\alpha(x)$  (la réflexion orthogonale à  $\alpha$ ) si  $\langle \alpha, x \rangle \leq 0$ ,  $r_\alpha(x) = x$  sinon et  $r_\alpha^2 = \text{id}$ . Ensuite, on considère l'élément  $w_0$  le plus long de  $W$ , celui-ci existe et est unique car  $W$  est un groupe fini. En prenant alors une décomposition réduite de  $w_0$  qui n'est autre qu'un produit minimal de réflexions simples, on peut associer l'opérateur de pliage  $r_{w_0}$  composé des opérateurs de pliages associés à chacune des racines simples dans le même ordre avec lequel ces racines apparaissent dans la décomposition. Comme les  $r_\alpha, \alpha \in S$ , vérifient les relations de tresse (conséquence directe de celles du groupe), alors  $r_{w_0}$  ne dépend pas de la décomposition réduite choisie ([Bou], Ch.IV, No.1.5, Prop.5). De plus, l'image d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$  par  $r_{w_0}$  est l'unique représentant de  $x$  dans  $\overline{C}$ . En conclusion

**Proposition.** *Pour toute décomposition réduite de  $w_0 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{|R_+|}}$  où  $\alpha_i \in S, 1 \leq i \leq |R_+|$ , on a*

$$\pi = r_{w_0} = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_{|R_+|}}.$$

*Cette expression ne dépend pas de la décomposition réduite choisie.*

Une fois que  $\pi$  est exprimée comme la composée de projecteurs de rang 1, on applique la formule de Tanaka successivement  $|R_+|$  fois ([Rev-Yor]) : si  $Z$  est une semi-martingale alors

$$Z_t^- = Z_0^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{Z_s \leq 0\}} dZ_s + \frac{1}{2} L_t^0(Z). \quad (3.1)$$

En arrangeant soigneusement les termes de dérive apparaissant à chaque étape et en utilisant l'invariance du MB par les transformations orthogonales, on aboutit à l'EDS suivante :

**Théorème.** *Il existe un mouvement Brownien  $Y$  dans  $\mathbb{R}^d$  tel que*

$$\pi(B)_t = \pi(B)_0 + Y_t + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in S} L_t^0(\langle \alpha, \pi(B) \rangle) \alpha.$$

**Remarque :** Avec les notations utilisées dans [Dai-Will], les lignes de la matrice  $N$  sont les racines simples (donc  $N \in \mathbb{M}_{|S| \times d}(\mathbb{R})$ ),  $R = N^T$  et  $Y \in \mathbb{R}^{|S|}$  est formé par les processus  $L_t^0(\langle \alpha, \pi(B) \rangle), \alpha \in S$ . Il en suit que  $NR \in \mathbb{M}_{|S|}(\mathbb{R})$  est une matrice de Gram et donc elle vérifie la propriété  $\mathcal{S}$  dès que  $|S| = d$  : il existe un vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$  à coordonnées toutes positives et tel que toutes les coordonnées de  $NRx$  soient strictement positives ([Dai-Will], [Fie-Pta]). On note que dans ce cas, la chambre de Weyl est un simplexe dont les vecteurs directeurs forment la base duale de  $S$ . Dans le cas  $R = A_{d-1}$ , on a  $|S| = d - 1$  et  $NR$  vérifie encore la propriété  $\mathcal{S}$ . Cependant,  $RN$  ne la vérifie pas puisque la somme des lignes de cette matrice est nulle.

## 3.2 Une autre représentation de la dérive

La dérive de l'EDS obtenue s'exprime à l'aide des temps locaux des projections du processus réfléchi  $\pi(B)$  sur les droites engendrées par les racines simples. Ce fait est en accord avec ([Rev-Yor])

$$L_t^0(B) = \frac{1}{2} L_t^0(|B|) \quad \Rightarrow \quad |B_t| = \beta_t + \frac{1}{2} L_t^0(|B|).$$

Inversement, il est naturel de se demander comment, pour une racine simple  $\alpha \in S$  donnée, le temps local  $L_t^0(\langle \alpha, \pi(B) \rangle)$  s'écrit à l'aide des temps locaux des projections de  $X$ . Pour répondre à

1. On supposera que les racines sont unitaires.

cette question, on remarque que  $L_t^0(\langle \alpha, \pi(B) \rangle)$  le temps d'occupation de  $X$  à proximité de certaines facettes associées aux éléments de l'orbite de  $\alpha$ . Mais, vu que chaque chambre est visitée une et une seule fois sous l'action du groupe de réflexion, on a alors la dichotomie suivante :

- Ou bien la racine simple est la seule ayant cette propriété dans son orbite. Dans ce cas, l'ensemble  $\{x, \langle \alpha, \pi(B) \rangle < \epsilon\}$  coïncide avec les bandes de part et d'autre (donc de profondeur  $2\epsilon$ ) de tous les hyperplans orthogonaux aux éléments formant l'orbite de  $\alpha$ .
- Ou bien il y a une autre racine simple, disons  $\beta$ , conjuguée à  $\alpha$ . Dans ce cas, on est sûr que le coté de la facette  $F_\beta$  inclu dans  $\overline{C}$  n'est pas visité quand on fait agir le groupe de réflexion, car sinon la chambre serait visitée deux fois.

Ces observations conduisent au résultat suivant :

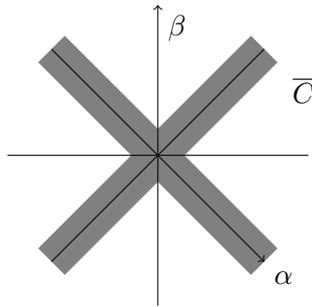
**Proposition.** *Soit  $\alpha \in S$  une racine simple. Alors l'orbite de  $\alpha$  ne contient aucune autre racine simple si et seulement si*

$$\frac{1}{2}L_t^0(\langle \alpha, \pi(B) \rangle) = \sum_{w \in W, w\alpha \in R_+} L_t^0(\langle w\alpha, B \rangle).$$

Un exemple qui illustre cette situation est le suivant : prenons la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et

$$R = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1 \pm e_2)\}, \quad S = \{e_1 - e_2, e_2\}.$$

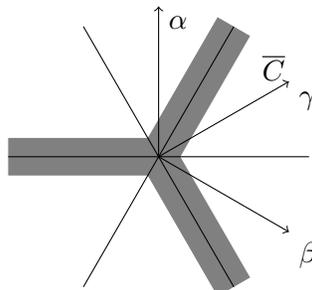
L'ensemble  $\{x, \langle e_1 - e_2, \pi(B) \rangle < \epsilon\}$  est la partie hachurée :



et on en déduit que

$$\frac{1}{2}L_t^0(\langle e_1 - e_2, \pi(B) \rangle) = L_t^0(\langle e_1 - e_2, B \rangle) + L_t^0(\langle e_1 + e_2, B \rangle).$$

Ceci se généralise aux systèmes diédraux pairs. Cependant, si on considère par exemple le système diédral impair  $I_2(3)$  et la racine simple  $\beta = e^{-i\pi/6}$ , alors l'ensemble  $\{x, \langle \beta, \pi(B) \rangle < \epsilon\}$  est la partie hachurée :



On en déduit de la même manière que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}L_t^0(\langle \beta, \pi(B)B \rangle) &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{\langle e^{i\pi/3}, B_s \rangle \geq 0\}} dL_s^0(\langle \beta, B \rangle) + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\langle e^{i\pi}, B_s \rangle \geq 0\}} dL_s^0(\langle \alpha, B \rangle) \\ &\quad + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\langle e^{i5\pi/3}, B_s \rangle \geq 0\}} dL_s^0(\langle \gamma, B \rangle). \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Processus de Jacobi libre

### 4.1 MB unitaire libre revisité

Le MB unitaire est un processus de Lévy multiplicatif à valeurs dans le groupe  $U(d)$  des matrices unitaires et dont la loi marginale est le noyau de la chaleur sur  $U(d)$ . Ce groupe étant compact, le noyau de la chaleur est absolument continu par rapport à la mesure de Haar et sa densité a un développement en série de Fourier dans la base des fonctions de Schur. Un calcul direct montre alors que les moments du MB unitaire convergent, après normalisation du temps, quand  $d \rightarrow \infty$ , vers la suite ([Bia], voir aussi [Rai])

$$\frac{e^{-kt/2}}{k} L_{k-1}^{(1)}(kt), k \geq 1,$$

où  $L_k^{(1)}$  est le  $k$ -ième polynôme de Laguerre ([Rain]). Si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de von Neumann de dimension infinie munie d'une trace  $\tau$ , alors cette suite coïncide avec celle des moments  $\tau(Y_t^k)$ ,  $k \geq 1$ , du MB unitaire libre  $(Y_t)_{t \geq 0}$  ([Bia]). La mesure spectrale de  $Y$  a une densité par rapport à la mesure de Haar du cercle unité  $\mathbb{T}$ , partie réelle de la continuation analytique de la transformée de Herglotz à  $\mathbb{T}$  ([Bia1]). Pour  $t < 4$ , son support est formé par deux arcs symétriques par rapport à l'axe réel et d'ouverture

$$\arccos\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{t(4-t)}.$$

Si  $t \geq 4$ , il couvre tout le cercle jusqu'à la répartition uniforme quand  $t = \infty$ . Cette description a été retrouvée dans [Dem-Hmi] où le point de départ est la représentation intégrale

$$\tau(Y_t^k) = \frac{e^{-kt/2}}{2i\pi k} \int_{\gamma} [h_t(z)]^k \frac{dz}{t(1-z)}, \quad k \geq 1, \quad h_t(z) \triangleq (1-z)e^{t(1/z-1/2)},$$

sur une courbe de Jordan  $\gamma$  autour de l'origine. À partir de là, on a prouvé pour tout temps  $t < 4$  l'existence d'une et une seule courbe de Jordan  $\gamma_t$  autour de l'origine vérifiant

- (1)  $h_t(\gamma_t) \in \mathbb{T}$ .
- (2)  $\gamma_t \cap [1, \infty[ = \emptyset$ .

La deuxième condition assure l'existence d'une branche analytique de  $z \mapsto \log(1-z)$  et donc permet de faire une intégration par parties. Quant à la première, elle montre que la mesure spectrale de  $Y_t$  est la mesure image de la mesure complexe

$$\frac{h_t'(z)}{h_t(z)} \log(1-z) \mathbf{1}_{\gamma_t}(z) \frac{dz}{2i\pi}.$$

De plus, le support géométrique de  $\gamma_t$  est constitué de deux courbes qui cessent de s'intersecter dès  $t \geq 4$ . Ce raisonnement s'applique à la mesure qui apparaît à la limite  $d \rightarrow \infty$  quand on considère les moments de la partie radiale du MB sur  $Gl(d, \mathbb{C})$  au lieu du MB sur  $U(d)$  (voir la fin de [Bia]). Il permet aussi de retrouver la description de la mesure limite donnée dans [Bia1]. Les détails des calculs se trouvent dans ([Dem-Ham]).

## 4.2 Processus de Jacobi libre : définitions et rappels

Quitte à passer au produit libre d'algèbres de von Neumann, on supposera dans la suite que  $\mathcal{A}$  contient deux projecteurs  $\{P, Q\}$  et un MB unitaire libre  $(Y_t)_{t \geq 0}$  qui sont  $\star$ -libres au sens de Voiculescu ([Hia-Pet], Chapitre II). Ainsi, le processus de Jacobi libre est une famille d'opérateurs  $(J_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans l'algèbre compressée

$$\left( P \mathcal{A} P, \frac{\tau}{\tau(P)} \right)$$

et est défini pour tout instant  $t$  par

$$J_t \triangleq P Y_t Q Y_t^* P.$$

En vertu de la liberté asymptotique ([Hia-Pet], Chapitre IV), on peut réaliser  $J$  comme la limite au sens des moments non commutatifs du processus de Jacobi matriciel à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes ([D2]). On peut aussi définir le processus de Jacobi libre partant de

$$J_0 = P Z Q Z^* P$$

où  $Z \in \mathcal{A}$  est un opérateur unitaire  $\star$ -libre avec  $\{P, Q\}$  et avec  $(Y_t)_{t \geq 0}$ . Ce choix permet d'assurer au moins l'injectivité de  $J_0$  et de  $P - J_0$  dans  $P \mathcal{A} P$  et permet dans ce cas d'obtenir une EDS libre valide jusqu'au premier temps de non-injectivité de  $J$  ou de  $P - J$  ([D2]). Sous réserve d'inversibilité de  $J_0$  et de  $P - J_0$ , on a pu déterminer un ensemble de couples  $(\tau(P), \tau(Q))$  pour lesquels  $J_t$  et  $P - J_t$  sont injectifs pour tout  $t$ , en particulier la validité de l'EDS dans ce cas. Cette dernière permet également de déterminer une famille de polynômes martingales pour le processus  $J$  quand la mesure spectrale de  $J_0$  est la loi de l'arcsinus, loi stationnaire du processus quand  $P = Q, \tau(P) = 1/2$  ([D2]). Une famille plus large de polynômes martingales a été obtenue dans [D3] mais cette fois la mesure spectrale de  $J_0$  est (à une transformation affine près) la mesure de Kesten dont la densité est donnée par ([Kes]) :

$$\frac{2(2 - \lambda)}{\pi} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{1 - \lambda(2 - \lambda)u^2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u).$$

C'est la loi stationnaire de  $J$  quand  $\tau(P) \triangleq \lambda/2, \lambda \in [0, 1], \tau(Q) = 1/2$ . Par ailleurs, en appliquant la formule d'Itô libre à la fonction  $x \mapsto x^n, n \geq 1$ , et en moyennant l'EDS obtenue à l'aide de l'état  $\tau$ , on a abouti à une EDP non linéaire vérifiée par la transformée de Cauchy  $(t, z) \mapsto G_t(z)$  de la mesure spectrale  $\mu_t$  de  $J_t$  :

$$G_t(z) \triangleq \int \frac{1}{z - x} \mu_t(dx) = \sum_{n \geq 0} \frac{m_n(t)}{z^{n+1}},$$

où  $|z| > 1$  et

$$m_n(t) \triangleq \frac{\tau[(J_t)^n]}{\tau(P)} = \int_0^1 x^n \mu_t(dx).$$

Plus exactement, si  $\tau(P) = \lambda\theta \in (0, 1], \tau(Q) = \theta \in (0, 1)$  alors l'EDP est donnée par

$$\partial_t G_t(z) = \partial_z \{ [(1 - 2\lambda\theta)z - \theta(1 - \lambda)] G_t(z) + \lambda\theta z(z - 1) G_t^2(z) \}.$$

### 4.3 Mesure spectrale du processus de Jacobi partant de l'identité

Comme on l'a indiqué dans le paragraphe précédent, les résultats prouvés dans [D2], [D3] reposent sur l'EDS libre vérifiée par le processus  $J$  et donc sur l'injectivité des opérateurs  $J_t$  et  $P - J_t$ . pourtant cette hypothèse est indispensable pour la dynamique de  $J$ , néanmoins elle ne l'est plus pour l'étude de sa mesure spectrale  $\mu$ . En effet, on a démontré que l'EDP ci-dessus vérifiée par la fonction  $G$  reste valable pour tout opérateur unitaire  $Z$ , en particulier pour  $Z = \mathbf{1}$  (l'identité de l'algèbre  $\mathcal{A}$ ). L'ingrédient principal de la démonstration est le théorème 3.6 de [Ben-Lev]. Dans ce cas, on a pu avoir des informations précises sur  $\mu_t$  quand  $P = Q$  (donc  $\lambda = 1$ ) et  $\tau(P) = \theta \in (0, 1]$ .

#### 4.3.1 Le cas $\theta = 1/2$

Si on considère la fonction génératrice des moments

$$M_t(z) \triangleq \sum_{n \geq 0} m_n(t) z^n, \quad |z| < 1$$

au lieu de  $G$ , alors on voit par un simple calcul que si  $\lambda = 1, \theta = 1/2$  alors

$$\partial_t M_t = -\frac{z}{2} \partial_z \{(1-z)M_t^2\}, \quad M_0(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Cette EDP admet une unique solution dans la classe des fonctions analytiques au voisinage de l'origine et celle-ci est décrite dans la proposition suivante.

**Proposition.** *Soit  $L_k^{(1)}$  le  $k$ -ième polynôme de Laguerre d'indice 1 ([Rain]) et soit*

$$\rho_t(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} L_{k-1}^1(kt) z^k, \quad |z| < 1,$$

*l'unique solution analytique au voisinage de l'origine de l'EDP ([Bia], [Rai])*

$$\partial_t \rho_t + \frac{z}{2} \partial_z \rho_t^2 = 0, \quad \rho_0(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Alors

$$M_t(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \left\{ 1 + 2\rho_{2t} \left( \frac{ze^{-t}}{(\sqrt{1-z} + 1)^2} \right) \right\}, \quad |z| < 1.$$

La preuve de ce résultat se fait par un calcul direct et fait appel à quelques propriétés de la fonction

$$\alpha : z \mapsto \frac{z}{(1 + \sqrt{1-z})^2}.$$

C'est une application conforme de  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty[$  dans le disque unité ouvert d'inverse

$$\alpha^{-1}(z) = \frac{4z}{(1+z)^2}.$$

Elle vérifie  $\alpha(0) = 0, |\alpha(z)| \leq |z|$  et

$$\alpha'(z) = \frac{\alpha(z)}{z\sqrt{1-z}}.$$

En utilisant des séries génératrices de certaines fonctions spéciales, on récupère les moments  $(m_n(t))_{n \geq 1}$  sous la forme suivante :

**Corollaire 3.** Pour tout  $n \geq 1$

$$m_n(t) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \frac{1}{k} L_{k-1}^{(1)}(2kt) e^{-kt}. \quad (4.1)$$

Comme les moments positifs et négatifs de  $Y_t$  coïncident et comme  $\mu_t$  est à support compact, on obtient finalement la description suivante.

**Corollaire 4.** Quand  $\theta = 1/2, \lambda = 1$ , la mesure spectrale de  $J_t$  dans  $(P\mathcal{A}P, 2\tau)$  coïncide avec celle de l'opérateur

$$\frac{1}{4}[Y_{2t}^* + Y_{2t} + 2\mathbf{1}]$$

dans  $\mathcal{A}$ . Par conséquent,  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa densité est donnée par

$$2 \frac{k_{2t}(e^{2i \arccos(\sqrt{x})})}{\sqrt{x(1-x)}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) dx$$

où  $k_t$  est la densité de la mesure spectrale de  $Y_t$ . En particulier, le support de  $\mu_t$  est  $[0, 1]$  pour tout  $t \geq 2$ .

**Remarque.** Une autre preuve de ce corollaire se trouve dans [Izu-Ued].

De retour aux moments  $m_n(t), n \geq 1$ , on remarque que si  $a = 2P - \mathbf{1}$  alors

$$\tau(J_t^n) = \tau[(PY_tPY_t^*)^n] = \frac{1}{2^{2n}} \tau\{[(\mathbf{1} + a)(\mathbf{1} + b)]^n\}$$

où  $b \triangleq Y_t a Y_t^*$ . Si on combine cette remarque avec l'expression des moments de  $Y_t$ , on doit alors avoir

$$\tau\{[(\mathbf{1} + a)(\mathbf{1} + b)]^n\} = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} + \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \tau((ab)^k). \quad (4.2)$$

Pourtant si (4.2) semble à première vue dépendre de la  $\star$ -liberté de  $a$  et de  $Y$ , elle ne dépend plutôt que du fait que  $a$  et  $b$  sont algébriquement libres et de  $\tau(a) = \tau(b) = 0$ . En effet, la  $\star$ -liberté permet seulement de déterminer les coefficients binomiaux figurant dans le membre de droite. Par ailleurs, les coefficients binomiaux laissent penser à une preuve de nature combinatoire de (4.2), car par exemple

$$\binom{2n}{n}$$

est le nombre de partitions non croisées de type  $B$  ([Bia-Goo-Nic]). Cependant, on n'a pas pu donner une interprétation combinatoire similaire aux autres coefficients binomiaux. Néanmoins on a pu prouver (4.2) directement en comptant les mots  $(ab)^k, (ab)^k a, (ba)^k, k = 1, \dots, n$  d'une façon récurrente. En comparant (4.1) et (4.2), il en découle alors que  $aY_t a Y_t^*$  et  $Y_{2t}$  sont identiquement distribués. Ceci peut se voir par exemple à partir des moments des deux opérateurs qui se calculent à l'aide du théorème 3.6 de [Ben-Lev]. Il découle aussi du Lemme 3.8 de [Haa-Lar] et de la propriété de semi-groupe du MB unitaire libre. En effet, pour tout  $t, s > 0$ ,  $aY_t a Y_s^*$  a la même loi que  $Y_{t+s}$ .

#### 4.3.2 $\theta \in (0, 1]$ : spectre de $PY_tPY_t^*P$ et position générale de $P$ et de $Y_tPY_t^*$

Si  $a = 2P - \mathbf{1}, b = Y_t a Y_t^*$ , si  $a$  et  $Y$  sont  $\star$ -libres mais  $\tau(a) = 2\theta - 1 \in (-1, 1]$  alors on a

$$\tau\{[(\mathbf{1} + a)(\mathbf{1} + b)]^n\} = \frac{1}{2} \binom{2n}{n} + 2^{2n-1}(2\theta - 1) + \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \tau((ab)^k), \quad (4.3)$$

ou bien d'une manière équivalente

$$\tau[(PY_tPY_t^*)^n] = \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} + \frac{2\theta - 1}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \tau[(aY_t aY_t^*)^k]. \quad (4.4)$$

Ainsi, l'étude du spectre de l'opérateur positif  $J_t = PY_tPY_t^*P$  à tout instant  $t > 0$  repose (à une normalisation près) sur celle de l'opérateur unitaire  $aY_t aY_t^*$ . Ce dernier converge faiblement quand  $t \rightarrow \infty$  vers  $aUaU^*$  où  $U$  est un opérateur unitaire de Haar ([Hia-Pet]). Si  $\theta = 1/2$ , alors on déduit du paragraphe précédent et de la convergence faible de  $Y_t$  vers  $U$  que le spectre de  $aUaU^*$  est uniformément distribué sur  $\mathbb{T}$ . Plus généralement, la mesure spectrale de  $aUaU^*$  a la décomposition suivante ([Dem-Hmi1])

$$|\tau(a)|\delta_1 + \sqrt{1 - \frac{|\tau(a)|^2}{\sin^2 \psi}} \mathbf{1}_{\{|\sin \psi| \geq |\tau(a)|\}} d\psi.$$

Ses moments s'expriment à l'aide des polynômes de Jacobi  $P_n^{1,0}$  comme suit ([Dem-Hmi1]) :

$$\tau[(aUaU^*)^n] = \tau(a) \int_0^{\tau(a)} P_{n-1}^{1,0}(1-2s^2) ds.$$

Dans le cas dynamique, le résultat principal prouvé dans [Dem-Hmi1] s'énonce comme suit :

**Proposition.** 1. Soit  $\nu_t, t > 0$ , la mesure spectrale de  $aY_t aY_t^*$ . Alors  $\nu_t\{1\} = |\tau(a)|$  et  $\nu_t\{0\} = 0$ .  
2. On rappelle la mesure spectrale  $\mu_t$  de  $J_t$  dans l'algèbre comprimée. Alors

$$\mu_t\{1\} = \frac{1}{\theta} \max((2\theta - 1), 0), \quad \mu_t\{0\} = 0.$$

3. En tout réel  $x \in (0, 1)$  pour lequel la densité de  $\mu_t$  est finie, la transformée de Herglotz

$$H_t(z) \triangleq \int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} \nu_t(dw)$$

de  $\nu_t$  a une limite non-tangentielle en  $\alpha(1/x)$  et la densité de  $\mu_t$  s'écrit

$$\frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} H_t(\alpha(1/x)).$$

La preuve de cette proposition se fait en plusieurs étapes. D'abord le théorème 3.6 de [Ben-Lev] montre que

$$\partial_t H + \frac{z}{2} \partial_z H^2 = 2|\tau(a)|^2 \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \quad H(0, z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Ensuite la méthode des caractéristiques montre qu'il existe un flot  $\psi : (t, z) \mapsto \psi(t, z)$  défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}_+ \times [-1, 1]$  et tel que

$$[H_\infty(\psi(t, z))]^2 - [H_\infty(z)]^2 = [H_t(\psi(t, z))]^2 - [H(0, z)]^2 \quad (4.5)$$

où  $H_\infty$  est la transformée de Herglotz de la mesure spectrale  $\nu_\infty$  de  $aUaU^*$ . De plus, pour tout  $t > 0$ , il existe  $z_t$  tel que  $\psi(t, z_t) = 1$  et tel que

$$\psi(t, z) = \alpha \left\{ \left[ \frac{b}{b - (\tau(a))^2} \right] \alpha^{-1}(\xi_{2t}(\sqrt{b})) \right\}, \quad z \in (-1, z_t),$$

où

$$\xi_{2t}(u) \triangleq \frac{u-1}{u+1} e^{tu}, \quad b \triangleq |\tau(a)|^2 + (1 - |\tau(a)|^2) \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2},$$

Par ailleurs, il est clair que

$$\lim_{z \rightarrow -1, z > -1} \psi(t, z) = -1$$

pour tout  $t > 0$ . Le premier résultat de la proposition découle alors de simples passages à la limite dans (4.5). Quant au deuxième résultat, le théorème de convergence dominée montre d'une part que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(t) = \mu_t\{1\};$$

d'autre part, on peut voir que pour toute mesure de probabilité  $\eta$  sur  $\mathbb{T}$  invariante par conjugaison complexe on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k} \int_{\mathbb{T}} z^k \eta(dz) = \frac{1}{2} \eta(\{1\}),$$

ce qui s'applique en particulier à  $\eta = \nu_t$  en vertu de la tracialité de  $\tau$ . Ainsi, un simple passage à la limite dans (4.4) mène à  $\mu_t\{1\}$ . Par ailleurs, on peut relier la fonction génératrice  $M_t$  des moments de  $\mu_t$  à  $H_t$  en sommant (4.4) sur  $n \geq 1$  :

$$M_t(z) = \frac{1}{(1 + \tau(a))\sqrt{1-z}} \left[ H_t(\alpha(z)) + \frac{\tau(a)}{\sqrt{1-z}} \right]. \quad (4.6)$$

Par un changement de la variable spatiale  $z$ , la transformée de Cauchy  $G_t$  de  $\mu_t$  est reliée à  $H_t(\alpha)$  et les poids  $\mu_t\{0\}$  et  $\nu_t\{-1\}$  vérifient alors

$$\mu_t\{0\} = \frac{1}{1 + \tau(a)} \nu_t\{-1\},$$

d'où  $\mu_t\{0\} = 0$ . Finalement, pour tout  $t > 0$  fixé, le Théorème de Fatou pour les fonctions harmoniques positive dans le demi-plan supérieur et l'identité (4.6) montrent que la densité de  $\mu_t$  est donnée par

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0^+} \Im[G_t(x + iy)] = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \{\Re[H_t]\}[\alpha(1/(x + iy))]$$

en tout point  $x$  de dérivabilité de la fonction de répartition de  $\mu_t$ . Mais il n'est pas difficile de montrer que la courbe  $y \mapsto \alpha(1/(x + iy))$  tend quand  $y \rightarrow 0^+$  non-tangentiellement vers  $\alpha(1/x)$ . Par un argument standard d'analyse complexe (voir par exemple [Ber-Voi] Lemme 5.11),  $H_t$  admet une limite non-tangentielle en  $\alpha(1/x)$  et la proposition est prouvée.

**Remarque.** Le fait que  $\mu_t\{1\} = \max((2\theta - 1)/\theta, 0)$  est équivalent à

$$\tau(P \wedge Y_t P Y_t^*) = \max(\tau(P) + \tau(Y_t P Y_t^*) - 1, 0),$$

où  $P \wedge Y_t P Y_t^*$  désigne la projection orthogonale sur l'intersection des sous-espaces associés à  $P$  et à  $Y_t P Y_t^*$ . En effet, un résultat dû à J. von Neumann montre que ([vN] p.55)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[(P Y_t P Y_t^*)^n] = \tau(P \wedge Y_t P Y_t^*).$$

D'une manière similaire,

$$\tau[(P Y_t (\mathbf{1} - P) Y_t^*)^n] = \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{2n}{n-k} \tau[(a Y_t a Y_t^*)^k],$$

et l'analyse précédente montre que  $\tau(P \wedge Y_t (\mathbf{1} - P) Y_t^*) = 0$  pour tout  $t > 0$ . On dit alors que les projections orthogonales  $P$  et  $Y_t P Y_t^*$  sont *en position générale*.

Pour deux projections orthogonales  $P, Q \in \mathcal{A}$ , on dit qu'elles sont en position générale si

$$\tau(P \wedge Q)\tau[(\mathbf{1} - P) \wedge (\mathbf{1} - Q)] = 0 \quad \text{et} \quad \tau[P \wedge (\mathbf{1} - Q)]\tau[(\mathbf{1} - P) \wedge Q] = 0.$$

Tel est le cas par exemple de deux projecteurs libres dans  $\mathcal{A}$  ([Ben-Voi], Lemme 2.1). Si  $V \in \mathcal{A}$  est unitaire et si son information de Fisher libre est finie, des arguments algébriques permettent de prouver que  $P$  et  $VQV^*$  et en particulier  $P$  et  $Y_t Q Y_t^*$  sont en position générale ([Izu-Ued], Remarque 3.5). Cependant, cette preuve ne fournit aucune information sur le flot associé à  $PY_t Q Y_t^* P$  contrairement à celle écrite dans [Col-Kem] dans le cas  $\tau(P) = \tau(Q) = 1/2$  [Col-Kem]. Notre approche -elle- a le mérite de s'appliquer à deux projecteurs  $P$  et  $Q$  de rangs arbitraires et de décrire le flot associé à  $a_P Y_t a_Q Y_t^*$ , où  $a_P = 2P - \mathbf{1}$ ,  $a_Q = 2Q - \mathbf{1}$ .



# Chapitre 5

## Familles de Meixner : vers une déformation des probabilités libres

### 5.1 Familles de Meixner

La famille de Meixner, du nom de J. Meixner qui l'a introduite en 1934, contient toutes les suites de polynômes orthogonaux  $(P_n)_{n \geq 0}$  à variable réelle vérifiant

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{A(z)} e^{H(z)x}.$$

Ici, il est supposé que la série génératrice exponentielle converge absolument au voisinage de l'origine et que  $A, H$  sont des fonctions holomorphes dans ce voisinage avec  $H(0) = 0, H'(0) \neq 0$ . À des transformations affines près, la famille de Meixner est constituée des polynômes d'Hermite, de Laguerre, de Meixner, de Charlier, de Krawtchouk et de Meixner-Pollaczek. Après son introduction, d'autres caractérisations de cette famille sont apparues en liaison avec un problème de régression quadratique, les polynômes binomiaux, les familles exponentielles à variances quadratiques, les polynômes orthogonaux dits 'du type zéro' et les polynômes martingales de processus de Lévy (dans ce dernier cas, seulement les mesures d'orthogonalité infiniment divisibles interviennent). On renvoie à [Boz-Dem] pour plus de détails et pour les liens entre ces différentes caractérisations.

Après l'introduction des probabilités libres, la famille de Meixner libre a été introduite dans [Ans] en considérant cette fois des fonctions génératrices du type résolvante :

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x) z^n = \frac{1}{u(z)(f(z) - x)}$$

où  $u, z \mapsto zf(z)$  sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et sont telles que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{u(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1.$$

Cette famille comporte six suites de polynômes orthogonaux à des transformations affines près : ce sont des combinaisons linéaires de polynômes de Tchebycheff de deuxième espèce. Elle possède aussi d'autres caractérisations analogues à celles de la famille de Meixner ([Boz-Dem]).

### 5.2 Autres caractérisations : équations de Riccati

Dans [Boz-Dem], on explique comment on peut retrouver les éléments de la famille de Meixner par le moyen d'une équation de Riccati à coefficients constants. L'idée est simple et repose essentiellement sur l'orthogonalité des polynômes  $(P_n)_{n \geq 0}$  par rapport à une unique mesure qu'on notera

$\mu$ . Pour commencer, on note que l'intégration de la série génératrice exponentielle par rapport  $\mu$  conduit directement à

$$A(z) = \int e^{H(z)x} \mu(dx),$$

où on suppose sans perte de généralité que  $P_0 = 1$ . Il reste ensuite à déterminer  $H$ . Pour cela, on rappelle que  $(P_n)_{n \geq 0}$  satisfait une relation de récurrence à trois termes :

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x) + w_n P_{n-1}(x)$$

où  $\alpha_n \in \mathbb{R}, w_n \in \mathbb{R}_+, P_{-1} := 0$  et  $w_1 > 0$  assurant la non-dégénérescence de  $\mu$ . Après, on multiplie la série génératrice par  $x$  et on intègre par rapport à  $\mu$ . La relation de récurrence mène à l'identité suivante :

$$\alpha_0 + w_1 z = \frac{1}{A(z)} \int x e^{H(z)x} \mu(dx).$$

En particulier, si  $\mu$  est centrée réduite alors  $\alpha = 0, w_1 = 1$  :

$$zH'(z) = \frac{1}{A(z)} \partial_z \int e^{H(z)x} \mu(dx) = \frac{\partial_z A(z)}{A(z)}.$$

Par conséquent, si on définit la fonction génératrice des cumulants de  $\mu^1$  :

$$R(z) \triangleq \log \int e^{zx} \mu(dx)$$

alors

$$H^{-1}(z) = \partial_z R(z).$$

En multipliant la fonction génératrice par  $x^2$  et en procédant d'une manière similaire, on obtient

$$\left(\frac{w_2}{2} - 2\right) (\partial_z R)^2(z) + \alpha_1 \partial_z R(z) + 1 = \frac{1}{A(H^{-1}(z))} \partial_z^2 \int e^{zx} \mu(dx),$$

identité qui se met sous la forme d'une équation de Ricatti pour  $\partial_z R = H^{-1}$  :

$$\left(\frac{w_2}{2} - 1\right) (\partial_z R)^2(z) + \alpha_1 \partial_z R(z) + 1 = \partial_z^2 R(z).$$

À partir de là, on peut discuter suivant les valeurs de  $w_2$  et de  $\alpha_1$  l'existence des solutions et retrouver les polynômes formant la famille de Meixner. Pour la famille de Meixner libre, on obtient de la même façon

$$\begin{aligned} u(z) &= \int \frac{1}{f(z) - x} \mu(dx) \\ f(z) &= z + \frac{1}{u(z)} \\ \left(\frac{w_2}{2} - 2\right) z^2 + \alpha_1 z + 1 &= z f(z). \end{aligned}$$

Les deux premières équations sont équivalentes :

$$u(z) = G_\mu(f(z)) \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = K_\mu(u(z))$$

où  $G_\mu$  est la transformée de Cauchy-Stieltjes (TCS) de  $\mu$  définie par

$$G_\mu(z) \triangleq \int \frac{1}{z - x} \mu(dx)$$

---

1. Le logarithme est bien défini au moins pour des valeurs réelles de  $z$ .

et  $K_\mu$  son inverse dans un voisinage de l'infini ([Hia-Pet], Chapitre III). La troisième équation caractérise bien sûr la famille de Meixner libre, cependant on se demande s'il est possible de déterminer  $f$  à partir d'une équation de Ricatti. La réponse est donnée dans le paragraphe suivant dans lequel la famille de Meixner libre se présente comme un cas dégénéré d'une famille plus grande de polynômes orthogonaux : la famille ultrasphérique.

### 5.3 Famille ultrasphérique

Cette famille contient toutes les fonctions génératrices de polynômes orthogonaux qui sont du type ultrasphérique :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda)_n}{n!} P_n^\lambda(x) z^n = \frac{1}{u_\lambda(z)(f_\lambda(z) - x)^\lambda},$$

où  $\lambda > 0$ ,  $u_\lambda, z \mapsto z f_\lambda$  sont analytiques dans un voisinage  $S$  de l'origine et sont tels que

$$\Im(f(z)) \neq 0, z \in S, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z f_\lambda(z) = 1, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in S}} \frac{u_\lambda(z)}{z^\lambda} = 1.$$

L'exemple typique est celui des polynômes ultrasphériques unitaires  $(C_n^\lambda)_{n \geq 0}$  ([Rain])

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda)_n}{n!} C_n^\lambda(x) z^n = \frac{1}{(1 + z^2/4 - zx)^\lambda}, \quad |x| \leq 1.$$

Les autres éléments de cette famille sont [D9] :

$$C_n^{\lambda-1}, \lambda > 1, \quad P_n^{\lambda-1/2, \lambda-3/2}, \lambda > 1/2, \lambda \neq 1,$$

où  $P_n^{a,b}$  est le  $n$ -ième polynôme de Jacobi unitaire. Ils ont été déterminés à partir des fonctions  $u_\lambda, f_\lambda$  :

$$\begin{aligned} u_\lambda(z) &= \frac{z^\lambda}{1 - (\lambda/2)z^2}, & f_\lambda(z) &= \frac{\lambda}{2}z + \frac{1}{z}, \\ u_\lambda(z) &= \frac{z^\lambda}{1 + \lambda z / \sqrt{2\lambda - 1}}, & f_\lambda(z) &= \frac{\lambda^2}{2\lambda - 1}z + \frac{1}{\sqrt{2\lambda - 1}} + \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

À son tour, la fonction  $f_\lambda$  résout l'équation de Ricatti à coefficients variables suivante :

$$Q_2(z)f'_\lambda(z) = f_\lambda^2(z) - Q_1(z)f_\lambda(z) + R_1(z), \lambda > 0, \quad (5.1)$$

où  $Q_2, R_1$  sont des polynômes de degrés deux et  $Q_1$  est un polynôme de degré un. Quant à la fonction  $u_\lambda$ , elle est déduite de  $f_\lambda$  à partir de la relation

$$\frac{u'_\lambda(z)}{u_\lambda(z)} = \lambda \frac{1 - f'_\lambda(z)}{f_\lambda(z) - \lambda z}.$$

De plus, les coefficients des polynômes  $Q_2, Q_1, R_1$  dépendent seulement de  $\lambda, \alpha_1^\lambda, \omega_2^\lambda$ . Quand  $\lambda = 1$ , l'équation de Ricatti se simplifie et on retrouve la famille de Meixner.

### 5.4 Transformées de Cauchy généralisées : exemples

L'intérêt porté à la famille ultrasphérique réside dans les identités qu'elle nous fournit exprimant la transformée de Cauchy-Stieltjes généralisée (TCSG) d'une loi Beta comme la puissance de la TCS

d'une autre mesure de probabilité. Plus précisément, si  $\mu_\lambda$  est la mesure d'orthogonalité des  $(P_n^\lambda)_{n \geq 0}$  alors

$$u_\lambda(z) = \int \frac{1}{(f_\lambda(z) - x)^\lambda} \mu_\lambda(dx).$$

Donc si  $f_\lambda$  est inversible (au moins localement) alors

$$u_\lambda(f_\lambda^{-1}(z)) = \int \frac{1}{(z - x)^\lambda} \mu_\lambda(dx)$$

et on voit apparaître la TCSG de  $\mu_\lambda$ . Par ailleurs, la fonction  $f_\lambda$  est identifiée dans chacun des exemples à l'inverse de la TCS de la loi du demi-cercle, fonction qu'on notera  $G$ . On obtient alors les identités suivantes ([D10]) :

1. Pour tout  $\lambda > 0$

$$\int \frac{1}{(z - x)^\lambda} \mu_\lambda(dx) = \left[ \int \frac{1}{z - x} \nu(dx) \right]^\lambda,$$

où

$$\begin{aligned} \mu_\lambda(dx) &\propto (4 - x^2)^{\lambda-1/2} \mathbf{1}_{[-2,2]} dx, \\ \nu(dx) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \mathbf{1}_{[-2,2]} dx = \mu_1(dx). \end{aligned}$$

Cette identité a été récemment utilisée pour démontrer que  $\mu_\lambda, \lambda \in \mathbb{N}^*$ , est infiniment divisible pour la convolution libre ([Ari-Bel]).

2. Pour tout  $\lambda \geq 1$ ,

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(z - x)^\lambda} (4 - x^2)^{\lambda-3/2} dx \propto G^{\lambda-1}(z) G_{\arcsin}(z) = [G^{1-1/\lambda}(z) G_{\arcsin}^{1/\lambda}(z)]^\lambda$$

où  $G_{\arcsin}$  est la TCS de  $\mu_0$  (loi de l'arcsinus). Par la caractérisation de Nevannlina des TCS de mesures de probabilité, on voit directement que

$$G^{1-1/\lambda}(z) G_{\arcsin}^{1/\lambda}(z) = G_{\nu_\lambda}(z)$$

pour une mesure de probabilité  $\nu_\lambda$  absolument continue dont la densité a été calculée dans [D10].

3. Pour tout  $\lambda > 1/2$

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(z - x)^\lambda} (4 - x^2)^{\lambda-3/2} (2 - x) dx \propto \frac{G^{1-1/(2\lambda)}(z)}{(z - 2)^{1/(2\lambda)}}.$$

Cette fois, le membre de gauche est la TCS de la combinaison linéaire convexe de la loi de Wigner et d'une masse de Dirac en  $x = 2$ .

Ces trois identités peuvent être obtenues par un calcul direct (voir à ce propos une version plus longue de [D10] disponible sur arXiv). Ceci suggère la recherche d'autres identités similaires : on trouve par exemple

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(z - x)^\lambda} (4 - x^2)^{(\lambda-2)/2} dx \propto \frac{1}{(z^2 - 4)^{\lambda/2}} = [G_{\arcsin}(z)]^\lambda, \quad z > 2,$$

et pour  $z > 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(z-uv)^\lambda} [u(1-u)]^{\lambda/2-1} [v(1-v)]^{(\lambda+1)/2-1} dudv &\propto \int_0^1 {}_2F_1\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \lambda; \frac{v}{z}\right) [v(1-v)]^{(\lambda+1)/2-1} \frac{dv}{z^\lambda} \\
&= \int \frac{1}{(z-v)^{\lambda/2}} [v(1-v)]^{(\lambda+1)/2-1} \frac{dv}{z^{\lambda/2}} \\
&\propto \frac{1}{z^\lambda} {}_2F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \lambda+1; \frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{[\sqrt{z}(\sqrt{z} + \sqrt{z-1})]^\lambda},
\end{aligned}$$

où on a utilisé pour passer de la troisième à la quatrième ligne l'exercice 10, p. 70 de [Rain]. Dans ce dernier exemple, le membre de gauche est la TCSG du produit de deux lois Beta sur  $[0, 1]$  indépendantes et de paramètres  $(\lambda/2, \lambda/2), ((\lambda+1)/2, (\lambda+1)/2)$ . Le membre de droite

$$G_{PS} : z \mapsto \frac{1}{\sqrt{z}(\sqrt{z} + \sqrt{z-1})}$$

est la TCS de la loi de Poisson libre de paramètre 1 (à l'homothétie près  $z \mapsto 4z$ ) : la  $R$ -transformée de cette loi est donnée par ([Hia-Pet] p.101)

$$R(z) = G_{PS}^{-1}(z) - \frac{1}{z} = \frac{1}{1-z}.$$

**Remarque.** Soit  $\tau$  une mesure (signée) à support compact. Sa transformée de Markov est la mesure de probabilité  $\nu$ , quand elle existe, définie par

$$\int \frac{1}{z-x} \nu(dx) = \exp\left(-\int \log(z-x) \tau(dx)\right)$$

pour  $z$  positif assez grand ([Ker]). Quand  $\tau$  est la loi de l'arcsinus alors  $\nu$  est la loi de Wigner, fait qui relie la théorie des représentations du groupe symétrique 'infini' aux probabilités libres. On a alors l'égalité

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{(z-x)^\lambda} (4-x^2)^{\lambda-1/2} dx \propto \exp\left(-\lambda \int_{-2}^2 \log(z-x) \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\right).$$

La loi de l'arcsinus est à son tour la transformée de Markov de la loi de Bernoulli symétrique

$$\frac{1}{2}[\delta_2 + \delta_{-2}].$$

Quant à la loi de Poisson libre, on peut voir qu'elle est la transformée de Markov de la mesure de probabilité

$$\tau(dx) = \frac{1}{2}\delta_0(dx) + \frac{1}{2} \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

L'image de cette mesure par la transformation  $x \mapsto (x+1)/2$  apparaît aussi en relation avec la théorie des représentations du groupe symétrique 'infini' ([Bia2], formule 3.1.2).



# Bibliographie

- [Abo-Dha] *A. Abouelaz, R. Daher.* Sur la transformation de Radon de la sphère  $S^d$ . *Bull. Soc. Math. France.* **121** (1993). 353–382.
- [Ans] *M. Anshelevich.* Free martingale polynomials. *J. Funct. Anal.* **201**, 2003, 228-261.
- [Ari-Bel] *O. Arizmendi, S. T. Belinschi.* Free Infinite Divisibility for ultrasphericals. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics.*
- [Bak] *D. Bakry.* Remarques sur les semi-groupes de Jacobi. *Asterisque*,
- [Ban-Smi] *R. Bañuelos, R. G. Smits.* Brownian motions in cones. *Probab. Theory Related Fields.* **108**. 1997, 299-319.
- [Bee-Opd] *R. J. Beerends, E. M. Opdam.* Certain hypergeometric series related to the root system  $BC$ . *Trans. Amer. Math. Soc.* **339**, no. 2. 1993, 581-607.
- [Ben-Voi] *G. Ben Arous, D. V. Voiculescu.* Free extreme values. *Ann. Probab.* **34**, no. 5. 2006, 2037-2059.
- [Ben-Lev] *F. Benaych-Georges, T. Lévy.* A continuous semigroup of notions of independence between the classical and the free one. *Ann. Probab.* **39**, no. 3, 2011, 904-938.
- [Ber-Voi] *H. Bercovici and D.V. Voiculescu.* Free Convolution of Measures with Unbounded Support. *Indiana Univ. Math. J.* **42**, (1993). 733-773.
- [Bia] *P. Biane.* Free Brownian motion, free stochastic calculus and random matrices. *Fields. Inst. Commun.*, **12**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1997. 1-19.
- [Bia1] *P. Biane.* Segal-Bargmann transform, functional calculus on matrix spaces and the theory of semi-circular and circular systems. *J. Funct. Anal.* **144**. 1997, no. 1, 232-286.
- [Bia2] *P. Biane.* Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups. *Internat. Math. Res. Notices*, **4**, 2001, 179-192.
- [Bia-Bou-Oco] *P. Biane, P. Bougerol, N. O’Connell.* Continuous crystal and Duistermaat-Heckman measure for Coxeter groups. *Adv. Math.* **221** (2009), no. 5, 1522-1583.
- [Bia-Goo-Nic] *P. Biane, F. Goodman, A. Nica.* Non-crossing cumulants of type B. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**, (2003), no. 6, 2263-2303.
- [Bia-Yor] *P. Biane, M. Yor.* Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sci. Math.* (2). **111**, 1987, no.1. 23-101.
- [Bou] *Bourbaki N.* Éléments de mathématiques : Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4-6, Hermann, Paris 1968.
- [Boz-Dem] *M. Bozejko, N. Demni.* Topics on Meixner families. *Banach Center for Publications.* 2009. (Proceedings of the International Workshop on Noncommutative Harmonic Analysis with Applications to Probability, Bedlewo, Poland. 2008)
- [BBCL] *A. Bonami, F. Bouchut, E. Cépa, D. Lépingle.* A nonlinear stochastic differential equation involving the Hilbert transform. *J. Funct. Anal.* **165**, (1999), no. 2, 390-406.

- [Boz-Bry] *M. Bozejko, W. Bryc.* On a class of free Lévy laws related to a regression problem. *J. Funct. Anal.* **236**, no. 1, 2006, 59-77.
- [Cep-Lep] *E. Cépa, D. Lépingle.* Diffusing particles with electrostatic repulsion. *Probab. Theory Related Fields.* **107**, (1997), no. 4, 429-449.
- [Chy] *O. Chybiryakov.* Skew-product representations of multidimensional Dunkl Markov processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **44**, (2008), no. 4, 593-611.
- [Col-Kem] *B. Collins, T. Kemp.* Liberating projections. *A paraître dans J. Funct. Anal.*
- [Dai-Will] *J. G. Dai and R. J. Williams.* Existence and uniqueness of semimartingale reflecting Brownian motions in convex polyhedrons. *Theory of Probability and Its Applications*, **40**, (1995), 1-40.
- [Dij-Koo] *A. Dijkzma, T. H. Koornwinder.* Spherical Harmonics and the product of two Jacobi polynomials. *Indag. Math.* **33** (1971), 191-196.
- [D1] *N. Demni.* Laguerre processes and generalized Hartman-Watson law. *Bernoulli.* **13**, no.2. 2007, 556-580.
- [D2] *N. Demni.* Free Jacobi processes. *J. Theor. Proba.* **21** 2008, 118-143.
- [D3] *N. Demni.* Free martingale polynomials for stationary free Jacobi processes. *QP-PQ.* **23. *Quantum Probab. Relat. Topics.* World Scientific, 2008, 107-119.**
- [D4] *N. Demni.* First hitting time of the boundary of the Weyl chamber by a radial Dunkl process. *SIGMA.* **4**, 2008.
- [D5] *N. Demni.* Generalized Bessel function of type  $D$ . *SIGMA.* **4**, 2008.
- [D6] *N. Demni.* Cauchy-Stieltjes type generating functions for orthogonal polynomials. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Topics*, **12**, no.1, 2009.
- [D8] *N. Demni.* Radial Dunkl processes associated with dihedral systems. *Séminaire de Probabilités.* **XLII**, 2009. 153-169.
- [D9] *N. Demni.* Ultraspherical type generating functions for orthogonal polynomials. *Probab. Math. Statis.* **29**, No.2. 2009. 281-296.
- [D10] *N. Demni.* Generalized Cauchy-Stieltjes Transforms of some Beta distributions. *Communications on Stochastic Analysis.* **3**, No. 2. 2009. 197-210.
- [D11] *N. Demni.* Product formula for Jacobi polynomials, spherical harmonics and generalized Bessel function of dihedral type. *Integral Transf. Spec. Funct.* **21**, no.2. 2010, 105-123.
- [D12] *N. Demni.* Radial Dunkl processes : Existence, uniqueness and hitting time. *C.R.A.S. Paris. Ser.I.* **347**. 2009.
- [D13] *N. Demni.*  $\beta$ -Jacobi processes. *Advances in Pure and Applied Maths.* **1.** no. 2, 2010.
- [D14] *N. Demni.* Generalized Bessel function associated with dihedral groups. *J. Lie Theory.* **22**, 2012. 81-91.
- [Dem-Ham] *N. Demni, T. Hamdi.* Spectral distribution of large Brownian motions on the complex linear group. *Disponible sur arXiv.*
- [Dem-Lep] *N. Demni, D. Lépingle.* Brownian Motion, Reflection Groups and Tanaka Formula. *Rendi. Sem. Mat. Univ. Padova*, **127**, 2012. 41-55
- [Dem-Hmi] *N. Demni, T. Hmidi.* Spectral measure of the free unitary Brownian motion : another approach. *Séminaire de Probabilités XLIV*, 2012. 191-206.
- [Dem-Ham-Hmi] *N. Demni, T. Hamdi, T. Hmidi.* Spectral distribution of the free Jacobi process. *Indiana. Univ. Mat. J.* **61**, 2012, no. 3.

- [Dem-Hmi1] *N. Demni, T. Hmidi.* Spectral distribution of the free Jacobi process associated with a single projection. *Soumis*.
- [Dem-Zan] *N. Demni, M. Zani.* Large Deviations for Statistics of Jacobi Process. *Stocha. Proc. Appl.* **119**, 2009. 518-533.
- [Dij-Koo] *A. Dijkma, T. H. Koornwinder.* Spherical Harmonics and the product of two Jacobi polynomials. *Indag. Math.* **33** (1971), 191–196.
- [Dou] *Y. Doumerc.* Matrices aléatoires, processus stochastiques et groupes de réflexions. *Ph. D. Thesis*, Paul Sabatier Univ. May 2005.
- [Dou-Oco] *Y. Doumerc, N. O’Connell.* Exit problems associated with finite reflection groups, *Probab. Theory and Rel. Fields.* **132**, (2005) 501-538.
- [Dun] *C. F. Dunkl.* Intertwining operators associated to the group  $S_3$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3347-3374.
- [Dun-Xu] *C. F. Dunkl, Y. Xu.* Orthogonal Polynomials of Several Variables. *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications.* Cambridge University Press. 2001.
- [Erd-Mag-Ober-Tri] *A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi.* Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, New York, **Vol. 2** (1953).
- [Fie-Pta] *M. Fiedler, V. Pták.* Some generalizations of positive definiteness and monotonicity. *Numer. Math.* **9**, 1966. 163-172.
- [Gor] *V. Gorin.* Noncolliding Jacobi processes as limits of Markov chains on the Gelfand-Tsetlin graph. *Journal of Mathematical Sciences.* **158**, no. 6. 2009, 819-837.
- [Gra] *D. J. Grabiner.* Brownian motion in a Weyl chamber, non-colliding particles and random matrices. *Ann. IHP.* **35**, 1999, no. 2, 177-204.
- [Gro-Ric] *K. I. Gross, D. St. P. Richards.* Total positivity, finite reflection groups, and a formula of Harish-Chandra. *J. Approx. Theory.* **82** (1995), no. 1, 60-87.
- [Haa-Lar] *U. Haagerup, F. Larsen.* Brown’s spectral distribution measure for  $R$ -diagonal elements in finite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* **176**, 2000, no. 2. 331-367.
- [Hia-Pet] *F. Hiai, D. Petz.* The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy. *Mathematical Surveys and Monographs.* Vol 77. A. M. S.
- [Hum] *J. E. Humphreys.* Reflections Groups and Coxeter Groups. *Cambridge University Press.* **29**. 2000.
- [Izu-Ued] *M. Izumi, Y. Ueda.* Remarks on free mutual information and orbital free entropy. *Disponible sur arXiv*.
- [Kat-Tan] *M. Katori, H. Tanemura.* Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems. *J. Math. Phys.* **45** (2004), no. 8, 3058-3085.
- [Ker] *S. Kerov.* Interlacing measures. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2.* **181**. 1998, 35-83.
- [Kes] *H. Kesten.* Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **92**, 1959, 336-354.
- [Kob-Man] *T. Kobayashi, G. Mano.* Integral formulas for the minimal representation of  $O(p, 2)$ . *Acta Appl. Math.* **86**, 2005, 103-113.
- [Mas-You] *M. Maslouhi, E. H. Youssfi.* The Dunkl intertwining operator. *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 8, 2697-2709.
- [Mei] *J. Meixner.* Orthogonale polynomsysteme mit einer besonderern der erzeugenden funktion. *J. London. Math. Soc.* **9**, 1934, 6-13.
- [Rai] *E. M. Rains.* Combinatorial Properties of Brownian Motion on the Compact Classical Groups. *J. Theor. Probab.* **10**, no. 3. 1997, 659-679.

- [Rain] *E. D. Rainville*. Special functions. *The Macmillan Co. New York*. 1960.
- [Rev-Yor] *D. Revuz, M. Yor*. Continuous Martingales And Brownian Motion, 3<sup>rd</sup> ed, Springer, 1999.
- [Roo-Sol] *R. Roozegar, A. R. Soltani*. On distribution of randomly ordered uniform incremental weighted averages : divided difference approach. *Statist. Probab. Lett.* **82** (2012), no. 5, 1012-1020.
- [Sch] *W. Schoutens*. Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. Lecture notes in Statistics. Springer, 2000.
- [vN] *J. von Neumann*. Functional operators. II. The geometry of orthogonal subspaces. *Annals of Mathematics Studies, no. 22, Princeton Univ. Press*. 1950.
- [War-Yor] *J. Warren, M. Yor*. The Brownian Burglar : Conditioning Brownian motion by its local time process. *Sém. Proba.* **XXXII.**, 1998, 328-342.
- [Wat] *G. N. Watson*. A treatise on the theory of Bessel functions, *Cambridge Mathematical Library edition*, (1995).