Autour des représentations linéaires des groupes finis classiques

Olivier Dudas

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Journées des Écoles Doctorales
de Besançon et Dijon
15 mai 2009

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q)$ ...
- 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q)\ldots$
- 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \ldots$
- 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \ldots$
- 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \ldots$
- 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini G est simple s'il n'a pas de sous-groupe propre distingué.

Si $H \subset G$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de G se ramène à celle de H et G/H.

Classification des groupes finis simples

- Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- Les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$;
- Les *groupes finis de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q)\ldots$
- 26 groupes dits *sporadiques*.

$+$ des versions "presque" simples : $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{O}_n(q)$ ...

Définition

Une représentation linéaire du groupe fini G sur un corps k est un k-espace vectoriel (de dimension finie) muni d'une action linéaire de G.

Deux directions :

- étude du groupe lui-même (ex : théorème de Feit-Thompson);
- étude des symétries d'un problème linéaire (ex : calcul d'un champ électromagnétique).

Question

Comment produire des représentations ?

Définition

Une représentation linéaire du groupe fini G sur un corps k est un k-espace vectoriel (de dimension finie) muni d'une action linéaire de G.

Deux directions :

- étude du groupe lui-même (ex : théorème de Feit-Thompson);
- étude des symétries d'un problème linéaire (ex : calcul d'un champ électromagnétique).

Question

Comment produire des représentations ?

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Soit p un nombre premier, $q = p^r$.

$$\mathrm{SL}_2(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_q) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}.$$

Il agit sur la *courbe de Drinfeld*

$$\mathbf{Y} = \{(x,y) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p \mid xy^q - yx^q = 1\}$$

par changement de coordonnées.

Soit p un nombre premier, $q = p^r$.

$$\mathrm{SL}_2(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_q) \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}.$$

Il agit sur la *courbe de Drinfeld*

$$\mathbf{Y} = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p \mid xy^q - yx^q = 1\}$$

par changement de coordonnées.

Exemple : le cas de $SL_2(q)$

Entrée

Courbe $\mathbf{Y}$ munie d'une action de $SL_2(q)$

[redacted]

Sortie

Espaces vectoriels $H^i_c(\mathbf{Y})$ munis d'une action linéaire de $SL_2(q)$

Les espaces vectoriels $H^i_c(\mathbf{Y})$ sont appelés *groupes de cohomologie à support compact* de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas précis, ils sont nuls pour $i \neq 1, 2$.

Problème

Comment les calculer et les décomposer ?

Entrée

Courbe $\mathbf{Y}$ munie d'une action de $\mathrm{SL}_2(q)$

$\longmapsto$

Sortie

Espaces vectoriels $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ munis d'une action linéaire de $\mathrm{SL}_2(q)$

Les espaces vectoriels $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ sont appelés *groupes de cohomologie à support compact* de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas précis, ils sont nuls pour $i \neq 1, 2$.

Problème

Comment les calculer et les décomposer ?

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Entrée

Courbe $\mathbf{Y}$ munie d'une action de $\mathrm{SL}_2(q)$

$\longmapsto$ $\longmapsto$

Sortie

Espaces vectoriels $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ munis d'une action linéaire de $\mathrm{SL}_2(q)$

Les espaces vectoriels $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ sont appelés *groupes de cohomologie à support compact* de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas précis, ils sont nuls pour $i \neq 1, 2$.

Problème

Comment les calculer et les décomposer ?

Exemple : le cas de $SL_2(q)$

Entrée

Courbe $\mathbf{Y}$ munie d'une action de $SL_2(q)$

$\longmapsto$ $\longmapsto$

Sortie

Espaces vectoriels $H_c^i(\mathbf{Y})$ munis d'une action linéaire de $SL_2(q)$

Les espaces vectoriels $H_c^i(\mathbf{Y})$ sont appelés *groupes de cohomologie à support compact* de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas précis, ils sont nuls pour $i \neq 1, 2$.

Problème

Comment les calculer et les décomposer ?

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Entrée

Courbe $\mathbf{Y}$ munie d'une action de $\mathrm{SL}_2(q)$

$\longmapsto$ $\longmapsto$

Sortie

Espaces vectoriels $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y})$ munis d'une action linéaire de $\mathrm{SL}_2(q)$

Les espaces vectoriels $\mathrm{H}_c^i(\mathbf{Y})$ sont appelés *groupes de cohomologie à support compact* de $\mathbf{Y}$. Dans ce cas précis, ils sont nuls pour $i \neq 1, 2$.

Problème

Comment les calculer et les décomposer ?

Rappel :

$$\mathbf{Y} = \{(x,y) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p \mid xy^q - yx^q = 1\}$$

Un autre groupe agit sur cette courbe, le groupe des racines $(q+1)$-ème de l'unité. Soit ζ un générateur de ce groupe ; on a

$$\zeta \cdot (x,y) = (\zeta x, \zeta y).$$

De plus cette action commute à celle de $\mathrm{SL}_2(q)$.

Conséquence

Les espaces propres $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda = \mathrm{Ker}(\zeta - \lambda \mathrm{Id})$ de l'application linéaire induite par ζ sur les $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ sont des représentations de $\mathrm{SL}_2(q)$ et

$$\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda$$

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Rappel :

$$\mathbf{Y} = \{(x,y) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p \mid xy^q - yx^q = 1\}$$

Un autre groupe agit sur cette courbe, le groupe des racines $(q+1)$-ème de l'unité. Soit ζ un générateur de ce groupe ; on a

$$\zeta \cdot (x,y) = (\zeta x, \zeta y).$$

De plus cette action commute à celle de $\mathrm{SL}_2(q)$.

Conséquence

Les espaces propres $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda = \mathrm{Ker}(\zeta - \lambda \mathrm{Id})$ de l'application linéaire induite par ζ sur les $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ sont des représentations de $\mathrm{SL}_2(q)$ et

$$\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda$$

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Rappel :

$$\mathbf{Y} = \{(x,y) \in \overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p \mid xy^q - yx^q = 1\}$$

Un autre groupe agit sur cette courbe, le groupe des racines $(q+1)$-ème de l'unité. Soit ζ un générateur de ce groupe ; on a

$$\zeta \cdot (x,y) = (\zeta x, \zeta y).$$

De plus cette action commute à celle de $\mathrm{SL}_2(q)$.

Conséquence

Les espaces propres $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda = \mathrm{Ker}(\zeta - \lambda \mathrm{Id})$ de l'application linéaire induite par ζ sur les $\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})$ sont des représentations de $\mathrm{SL}_2(q)$ et

$$\mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i_c(\mathbf{Y})_\lambda$$

En travaillant un peu plus, on peut montrer que :

- $\mathrm{H}_c^2(\mathbf{Y})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\mathrm{SL}_2(q)$ agit trivialement ;
- si $2\lambda \neq 0$ alors la représentation $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ est *irréductible* ;
- si $\lambda \neq \pm\mu$ alors les représentations $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ et $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\mu$ sont non isomorphes.

On obtient ainsi plus de la moitié des représentations irréductibles du groupe $\mathrm{SL}_2(q)$.

En travaillant un peu plus, on peut montrer que :

- $\mathrm{H}_c^2(\mathbf{Y})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\mathrm{SL}_2(q)$ agit trivialement ;
- si $2\lambda \neq 0$ alors la représentation $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ est *irréductible* ;
- si $\lambda \neq \pm\mu$ alors les représentations $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ et $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\mu$ sont non isomorphes.

On obtient ainsi plus de la moitié des représentations irréductibles du groupe $\mathrm{SL}_2(q)$.

Exemple : le cas de $SL_2(q)$

En travaillant un peu plus, on peut montrer que :

- $H_c^2(\mathbf{Y})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $SL_2(q)$ agit trivialement ;
- si $2\lambda \neq 0$ alors la représentation $H_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ est *irréductible* ;
- si $\lambda \neq \pm\mu$ alors les représentations $H_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ et $H_c^1(\mathbf{Y})_\mu$ sont non isomorphes.

On obtient ainsi plus de la moitié des représentations irréductibles du groupe $SL_2(q)$.

En travaillant un peu plus, on peut montrer que :

- $H_c^2(\mathbf{Y})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $SL_2(q)$ agit trivialement ;
- si $2\lambda \neq 0$ alors la représentation $H_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ est *irréductible* ;
- si $\lambda \neq \pm\mu$ alors les représentations $H_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ et $H_c^1(\mathbf{Y})_\mu$ sont non isomorphes.

On obtient ainsi plus de la moitié des représentations irréductibles du groupe $SL_2(q)$.

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

En travaillant un peu plus, on peut montrer que :

- $\mathrm{H}_c^2(\mathbf{Y})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\mathrm{SL}_2(q)$ agit trivialement ;
- si $2\lambda \neq 0$ alors la représentation $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ est *irréductible* ;
- si $\lambda \neq \pm\mu$ alors les représentations $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\lambda$ et $\mathrm{H}_c^1(\mathbf{Y})_\mu$ sont non isomorphes.

On obtient ainsi plus de la moitié des représentations irréductibles du groupe $\mathrm{SL}_2(q)$.

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ?

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ? Sur $\mathbb{Q}_\ell$!

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ? Sur $\mathbb{Q}_\ell$!

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}_\ell & \\ & \mathbb{Z}_\ell \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$\mapsto$ Représentations modulaires, blocs, modules projectifs...

Exemple : le cas de $SL_2(q)$

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ? Sur $\mathbb{Q}_\ell$!

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}_{\ell} & & \\
& \mathbb{Z}_{\ell} \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

$\mapsto$ Représentations modulaires, blocs, modules projectifs...

Exemple : le cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ? Sur $\mathbb{Q}_\ell$!

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$
\begin{tikzcd}
K & & \\
\mathbb{Q}_\ell \arrow[u] & \Lambda \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & k \\
& \mathbb{Z}_\ell \arrow[ul, hook] \arrow[u] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\mapsto$ Représentations modulaires, blocs, modules projectifs...

Exemple : le cas de $SL_2(q)$

Sur quel corps a-t-on considéré les espaces vectoriels ? Sur $\mathbb{Q}_\ell$!

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$\begin{tikzcd}
K & & \\
\mathbb{Q}_\ell \arrow[u] & \Lambda \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & k \\
& \mathbb{Z}_\ell \arrow[u] \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\mapsto$ Représentations modulaires, blocs, modules projectifs...