Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70ème année, 2017-2018, n$^{\mathrm{o}}$ 1137

SPLENDEUR DES VARIÉTÉS DE DELIGNE–LUSZTIG [d'après Deligne–Lusztig, Broué, Rickard, Bonnafé–Dat–Rouquier]

par **Olivier DUDAS**

INTRODUCTION

Étant donné un espace vectoriel V sur un corps parfait, la *décomposition de Jordan* permet de ramener l'étude d'un automorphisme $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ à l'étude de sa partie semi-simple et d'une famille d'endomorphismes unipotents agissant sur les espaces caractéristiques de ϕ, donc généralement plus petits que l'espace vectoriel ambiant V. Cette décomposition s'étend naturellement aux groupes orthogonaux $\mathrm{SO}(V)$ et symplectiques $\mathrm{Sp}(V)$, et plus généralement à des groupes algébriques linéaires. C'est un théorème de réduction particulièrement utile dans l'étude de la structure des groupes classiques et de leurs classes de conjugaison.

Le but de cet exposé est d'étudier une forme similaire de cette décomposition pour les représentations linéaires de groupes finis comme $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SO}(V)$ et $\mathrm{Sp}(V)$ lorsque le corps de base est fini. La décomposition des représentations est mixte ; elle fait intervenir à la fois :

- des éléments semi-simples du groupe fini considéré (ou plutôt d'un groupe dual) ;
- des représentations linéaires dites *unipotentes* de groupes finis plus petits, obtenus à partir des centralisateurs de ces éléments semi-simples.

Dans un premier temps, nous expliquerons comment les travaux de Deligne–Lusztig [DL], Lusztig [Lu] et Broué–Michel [BMi] permettent de décomposer les représentations d'un groupe réductif fini G selon certains éléments semi-simples d'un groupe dual G^*

$$\mathsf{Rep}(G) = \bigoplus_{s \in G^*} \mathsf{Rep}_s(G).$$

Nous montrerons ensuite comment, sous certaines conditions sur l'élément s, chaque sous-catégorie de représentations $\mathsf{Rep}_s(G)$ est « équivalente » à celle des représentations unipotentes du groupe $C_{G^*}(s)$

$$\mathsf{Rep}_s(G) \approx \mathsf{UniRep}(C_{G^*}(s)).$$

Plusieurs types d'équivalences seront étudiées selon le contexte. Pour les représentations à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique zéro (comme $\mathbb{C}$ ou une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$) on obtient une bijection entre caractères irréductibles faisant office de paramétrage des représentations irréductibles. En caractéristique positive, on s'intéressera à des équivalences entre les catégories abéliennes de représentations et leurs catégories homotopiques, préservant à la fois le nombre de représentations irréductibles, mais aussi leurs propriétés homologiques (groupes d'extensions). Ces équivalences, conjecturées par Broué [Br2] en 1988, s'obtiennent à partir de l'étude précise de la cohomologie de certaines variétés introduites par Deligne–Lusztig [DL] en 1976. Les travaux de Bonnafé–Rouquier [BR1] en 2003, puis de Bonnafé–Dat–Rouquier [BDR] en 2017, donnent la forme la plus précise de ces équivalences, dites *splendides*, et nous invitent ainsi à admirer la splendeur des variétés de Deligne–Lusztig.

Résumé

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous donnons quelques notations et résultats qui serviront de fil directeur de ces notes.

1. *Groupes réductifs finis.* — La classe des groupes finis qui nous intéressera est celle des groupes réductifs finis. Comme leur nom l'indique, ce sont des groupes algébriques réductifs connexes définis sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Parmi ces groupes, on trouve les groupes classiques tels que $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SO}_n(q)$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, des versions « tordues » comme le groupe unitaire $\mathrm{GU}_n(q)$ et spécial unitaire $\mathrm{SU}_n(q)$ mais aussi le groupe de Steinberg ${}^3D_4(q)$, ainsi que des groupes exceptionnels de type E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2. Ces groupes jouent un rôle prédominant dans la théorie des groupes finis puisque la grande majorité des groupes quasi-simples sont des groupes réductifs finis. La nature géométrique de ces groupes permet d'utiliser les outils usuels de géométrie algébrique pour étudier leur structure, mais aussi pour construire leurs représentations.

2. *Représentations.* — Étant donné un groupe réductif fini G sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, on étudiera les représentations linéaires de G en *caractéristique transverse*. Ce sont des k-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire de G, avec la condition supplémentaire que la caractéristique $\ell \geq 0$ de k ne divise pas q (donc différente de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$). On travaillera toujours sous l'hypothèse que k est assez grand de sorte que l'algèbre kG soit déployée, afin d'éluder tout problème de rationalité des représentations. Les représentations de G à coefficients dans k sont de manière équivalente des représentations de l'algèbre de groupe kG, et la catégorie abélienne qu'elles forment sera notée kG-mod.

Lorsque k est un corps de caractéristique zéro, la catégorie kG-mod est semi-simple : toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles, et sa classe d'isomorphisme est déterminée par un invariant numérique, son caractère. En revanche, lorsque la caractéristique de k divise l'ordre de G ces invariants numériques ne suffisent plus. D'une part, d'autres classes de représentations entrent en jeu, comme les représentations projectives, et d'autre part des invariants homologiques sont nécessaires pour caractériser kG-mod (comme les extensions entre représentations). Enfin, puisque l'algèbre kG n'est pas quelconque mais associée à un groupe fini G, d'autres invariants provenant des ℓ-sous-groupes de G sont à prendre en compte. L'étude des représentations de G et plus généralement de ses *blocs* se fera par l'intermédiaire de la catégorie abélienne kG-mod et de ses facteurs indécomposables, ainsi que des *groupes de défaut* associés à ces facteurs. Cette terminologie sera rappelée au §3.1.

3. *Des équivalences de catégories.* — La décomposition de Jordan de la catégorie kG-mod s'obtient en deux étapes. La première consiste en une décomposition

$$kG\text{-}\mathsf{mod} \simeq \bigoplus_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}/\sim} kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}$$

où (s) varie parmi les classes de conjugaison d'éléments semi-simples et ℓ-réguliers de G^*. Ici, G^* correspond à un dual de Langlands [(1)] de G ; par exemple $G^* \simeq \mathrm{PGL}_n(q)$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(q)$. L'élément $e_{(s)}$ associé est un idempotent central de kG, permettant de couper l'algèbre kG et la catégorie kG-mod en une somme directe. Lorsque $s = 1$, la catégorie $kGe_{(1)}$-mod est appelée la catégorie des représentations *unipotentes* du groupe réductif fini G.

La seconde partie de la décomposition de Jordan s'avère la plus difficile : elle consiste à montrer que chaque sous-catégorie $kGe_{(s)}$-mod est une catégorie de représentations unipotentes pour le groupe $C_{G^*}(s)$. Nous énonçons ici un cas particulier, conséquence des travaux de Broué [Br2], Bonnafé–Rouquier [BR1] et Bonnafé–Dat–Rouquier [BDR].

Théorème — *Supposons que $C_{G^*}(s) = L^*$ est un sous-groupe de Levi de G^*, dual d'un sous-groupe de Levi L de G. Alors il existe une équivalence de catégories abéliennes*

$$kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod} \simeq kLe_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}.$$

Cette équivalence induit une bijection entre les blocs qui préserve les groupes de défaut.

4. *Variétés de Deligne–Lusztig et leur cohomologie.* — La nature géométrique des groupes réductifs finis a permis à Deligne et Lusztig d'en construire des représentations (en caractéristique zéro) dans la cohomologie de certaines variétés algébriques [DL]. Ces méthodes s'adaptent parfaitement au cadre modulaire (en caractéristique positive) en remplaçant les groupes de cohomologie ℓ-adique par des complexes de cohomologie définis à quasi-isomorphisme ou à équivalence d'homotopie près.

Lorsque le groupe $C_{G^*}(s) = L^*$ est un sous-groupe de Levi de G^*, dual d'un sous-groupe de Levi L de G, on peut lui associer une *variété de Deligne–Lusztig* dont le complexe de cohomologie induit un foncteur

$$\mathsf{D}^b(kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(kLe_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}).$$

Ce n'est pas encore l'équivalence espérée puisqu'a priori ce foncteur envoie des représentations sur des complexes de représentations. Dans l'article [Br2] où il énonce sa conjecture, Broué donne un critère géométrique précis sur les variétés de Deligne–Lusztig pour

1. La présence d'un groupe dual peut paraître étrange à première vue. La construction et le paramétrage des représentations de G se fait à partir d'un procédé d'induction des caractères de tores maximaux (voir §1.2). Ces caractères correspondent naturellement à des cocaractères du tore dual dont les valeurs produisent des éléments semi-simples de G^*.

que le foncteur précédent provienne en fait d'un foncteur exact

$$kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod} \longrightarrow kLe_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}.$$

Les résultats de Lusztig lorsque $k = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ suffisent alors pour montrer que ce foncteur est une équivalence.

La contribution majeure de Bonnafé–Rouquier [BR1] à ce problème consiste à vérifier le critère géométrique de Broué, par une analyse fine de la géométrie des variétés de Deligne–Lusztig, de leur compactification et de certains revêtements abéliens. Nous expliquerons au §2 comment leur travail trouve son inspiration dans l'article originel de Deligne–Lusztig paru presque 30 ans plus tôt.

Néanmoins, une équivalence abstraite entre (des facteurs indécomposables d') algèbres de groupes n'est pas satisfaisante du point de vue des représentations des groupes finis. Il manque des informations « locales », notamment sur les groupes de défaut des blocs, permettant d'expliquer les coïncidences numériques entre les valeurs des caractères de G dans la série (s) et des caractères unipotents de $C_{G^*}(s)$. Ces coïncidences pourraient être le reflet d'une équivalence *splendide* entre les catégories homotopiques de modules de ℓ-permutation associées aux algèbres $kGe_{(s)}$ et $kC_{G^*}(s)e_{(1)}$. Une fois de plus, c'est le complexe de cohomologie qui fournit cette équivalence dans le cas où $C_{G^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi : en poursuivant les travaux de Rickard [Ri1], Bonnafé–Dat–Rouquier montrent dans [BDR] que l'on dispose en fait d'une famille d'équivalences

$$kC_G(Q)e_{(s)}\text{-}\mathsf{mod} \xrightarrow{\sim} kC_L(Q)e_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}$$

associées aux ℓ-sous-groupes Q de L et à leurs centralisateurs dans L et G. Les ingrédients de la preuve de ce résultat seront donnés au §3. Nous discuterons aussi d'une généralisation au §4.

Applications

La décomposition de Jordan splendide est un formidable théorème de réduction pour étudier les représentations modulaires des groupes finis. Elle permet de ramener l'étude des blocs d'un groupe réductif fini à l'étude des blocs dits *isolés* qui sont des blocs très proches d'être unipotents. Parmi les problèmes majeurs qu'elle a aidé à résoudre, notons :

- la conjecture du défaut abélien de Broué [Br1, Conj. 3.3] qui prédit que deux blocs de groupes finis sont dérivé-équivalents dès que leurs groupes de défaut sont abéliens et isomorphes. Cette conjecture est démontrée pour les groupes linéaires par Chuang–Rouquier [CR] ;
- un sens de la conjecture de hauteur zéro de Brauer, qui prédit que tous les caractères d'un bloc de défaut abélien sont de hauteur zéro, démontrée par Kessar–Malle [KM].

De nombreuses autres conjectures sur les groupes finis, appelées conjectures de comptage ou conjectures local-global [(2)], reposent sur des réductions aux groupes finis simples. Les experts s'accordent pour dire que le cas des groupes réductifs finis serait sans espoir sans la décomposition de Jordan splendide.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Cédric Bonnafé, Jean-François Dat, Léo Dreyfus-Schmidt, Gunter Malle et Raphaël Rouquier pour leurs nombreuses et précieuses remarques sur une version préliminaire de ce texte. Ce travail a bénéficié du soutien de la bourse ANR-16-CE40-0010-01 de l'Agence Nationale de la Recherche.

1. DÉCOMPOSITION DE JORDAN DES CARACTÈRES

1.1. Décompositions de Jordan

1.1.1. *Classes de conjugaison.* — La décomposition de Jordan est un classique des cours d'algèbre : étant donné un espace vectoriel de dimension finie V sur un corps parfait $\mathbb{F}$, tout endomorphisme ϕ de V se décompose de manière unique en la somme $\phi = \phi_s + \phi_n$ d'un endomorphisme semi-simple ϕ_s et d'un endomorphisme nilpotent ϕ_n qui commutent. Si ϕ est inversible, on peut réécrire cette décomposition de manière multiplicative en $\phi = \phi_s \circ \phi_u$ où $\phi_u = \mathrm{Id}_V + \phi_s^{-1} \circ \phi_n$ est un automorphisme dit *unipotent.*

Cette décomposition se généralise naturellement au cas d'un groupe algébrique linéaire $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}$. Tout élément $g \in \mathbf{G}(\mathbb{F})$ s'écrit de manière unique $g = su$ avec s semi-simple, u unipotent et $su = us$ (voir par exemple [Sp, §2.4]). On peut donc voir u comme un élément du centralisateur de s dans $\mathbf{G}(\mathbb{F})$, que l'on notera $C_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(s)$. On en déduit un paramétrage des classes de conjugaison du groupe $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ en terme de paires formées d'une classe de conjugaison semi-simple (s) de $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ et d'une classe unipotente de $C_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(s)$.

1.1.2. *Caractères irréductibles.* — Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments, les caractères irréductibles (complexes) du groupe fini $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ sont en même nombre que ses classes de conjugaison, même s'il n'existe en général aucune bijection canonique entre les deux. Néanmoins, dans le cas où $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe, les travaux de Deligne–Lusztig [DL] et Lusztig [Lu] montrent qu'il existe au niveau des caractères irréductibles une décomposition similaire à la décomposition de Jordan des classes de conjugaison, à ceci près qu'elle fait intervenir le dual de Langlands $\mathbf{G}^*$ de $\mathbf{G}$. Chaque caractère irréductible de $\mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ est paramétré par une classe de conjugaison semi-simple (s) de $\mathbf{G}^*(\mathbb{F}_q)$ et un *caractère unipotent* de $C_{\mathbf{G}^*(\mathbb{F}_q)}(s)$. Cette décomposition provient de la construction géométrique des caractères due à Deligne–Lusztig, construction que nous rappelons dans la section suivante.

2. Comme les conjectures d'Alperin, d'Alperin-Mckay ou de Dade (voir [Ma]).

1.2. Séries rationnelles

1.2.1. *Notations.* — Désormais nous supposons que $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$. Cette structure rationnelle se traduit par la donnée d'un endomorphisme de Frobenius $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$. Les groupes classiques $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SO}_n(q)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ s'obtiennent par exemple de cette façon. Par abus de notation, nous identifierons souvent $\mathbf{G}$ avec ses points sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$. Le groupe fini $\mathbf{G}^F$ sera noté G. Plus généralement, pour tout sous-groupe fermé $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ stable par F, nous noterons $H = \mathbf{H}^F$ le groupe fini associé. Les éléments semi-simples (resp. unipotents) de H seront notés H_{ss} (resp. H_{uni}).

Pour simplifier certains énoncés, nous supposerons de plus que le centre de $\mathbf{G}$ est connexe ; sous cette hypothèse, les centralisateurs d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^*$ sont à leur tour connexes. Deux éléments semi-simples de G^* conjugués dans $\mathbf{G}^*$ (conjugaison dite *géométrique*) sont alors aussi conjugués dans G^* (conjugaison *rationnelle*). Cela permettra d'éviter certaines subtilités entre les différentes versions de la décomposition de Jordan.

Nous considérerons dans un premier temps le cas des caractères irréductibles ordinaires du groupe fini G. Ce sont les caractères des représentations irréductibles complexes, ou plus généralement définies sur un corps de caractéristique zéro « assez gros ». Pour des raisons géométriques, nous travaillerons avec des représentations linéaires de G définies sur une extension finie $K \supset \mathbb{Q}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques contenant toutes les racines de l'unité d'ordre $|G|$, avec $\ell \nmid q$. Sous cette hypothèse, une représentation irréductible de G à coefficients dans K reste irréductible après extension des scalaires à un corps quelconque contenant K. On notera $\mathrm{Irr}_K G$ l'ensemble des caractères irréductibles de G ; dans le cas particulier où G est abélien (par exemple un tore), toutes les représentations irréductibles sont de dimension 1, et leurs caractères sont donc exactement les morphismes de groupes $G \longrightarrow K^\times$.

1.2.2. *Variétés de Deligne–Lusztig.* — Les travaux de Deligne–Lusztig et Lusztig sur les représentations de G (voir en particulier les exposés de Serre [Se1] et Cartier [Ca]) sont centrés sur la construction des représentations irréductibles dans la cohomologie de certaines variétés algébriques désormais appelées *variétés de Deligne–Lusztig*. Étant donnés un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ de radical unipotent $\mathbf{U}$ et un complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{P}$, ces variétés sont définies par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Y}_{\mathbf{U}} & = & \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U} \cdot F(\mathbf{U})\}/\mathbf{U} \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \\ \mathbb{X}_{\mathbf{P}} & = & \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{P} \cdot F(\mathbf{P})\}/\mathbf{P} \end{array}$$

où π est le morphisme induit par le quotient $\mathbf{G}/\mathbf{U} \twoheadrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}$. Le groupe fini G agit par multiplication à gauche sur ces variétés, et π est équivariant pour cette action ; le groupe fini L agit librement par multiplication à droite sur $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et l'application $\pi : \mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ s'identifie au quotient par cette action. Autrement dit, π est un L-torseur étale de

$\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$. Les faisceaux que l'on considérera sur $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ seront des systèmes locaux associés aux représentations de L via ce revêtement.

1.2.3. *Caractères de Deligne–Lusztig.* — Commençons par le cas où $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{T}$ un tore maximal F-stable. Via le revêtement $\pi : \mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathbf{B}}$, chaque caractère irréductible $\theta : T \longrightarrow K^{\times}$ définit un système local (G-équivariant) K_θ sur $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ (on rappelle que $T = \mathbf{T}^F$ est le groupe fini des points rationnels de $\mathbf{T}$). Le i-ème groupe de cohomologie étale de ce faisceau, noté $H^i(\mathbb{X}_{\mathbf{B}}, K_\theta)$, est un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de G. C'est donc une représentation de G, dont le caractère sera noté $[H^i(\mathbb{X}_{\mathbf{B}}, K_\theta)]$. On peut alors former le caractère virtuel de G suivant :

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}}(\theta) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i[H^i(\mathbb{X}_{\mathbf{B}}, K_\theta)] \tag{1}$$

appelé *caractère de Deligne–Lusztig*. D'après [DL, Cor. 4.3] cette somme alternée ne dépend en fait pas du choix de $\mathbf{B}$, mais seulement de $\mathbf{T}$, même si les groupes de cohomologie individuels varient en général avec $\mathbf{B}$ (nous discuterons de ce problème plus loin, à la section 4.2). On pourra donc noter plus simplement $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta)$ ce caractère virtuel.

1.2.4. *Séries rationnelles.* — Fixons un dual de Langlands $\mathbf{G}^*$ de $\mathbf{G}$. En suivant [DL, §5] on peut associer un élément semi-simple de G^* à chaque paire $(\mathbf{T}, \theta)$. Cet élément semi-simple dépend de certains choix non canoniques, mais pas sa classe de conjugaison. On dira que deux paires $(\mathbf{T}, \theta)$ et $(\mathbf{T}', \theta')$ appartiennent à la même *série rationnelle* et on notera $(\mathbf{T}, \theta) \sim_{\mathbf{G}} (\mathbf{T}', \theta')$ (ou simplement $(\mathbf{T}, \theta) \sim (\mathbf{T}', \theta')$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) si les éléments semi-simples associés sont conjugués dans G^* (ou dans $\mathbf{G}^*$ puisque le centre de $\mathbf{G}$ est supposé connexe). Étant donnée une classe semi-simple (s) de G^*, on écrira $(\mathbf{T}, \theta) \sim_{\mathbf{G}} s$ (ou simplement $(\mathbf{T}, \theta) \sim s$) pour signifier que $(\mathbf{T}, \theta)$ est dans la série rationnelle associée à (s). Via les caractères $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta)$, la notion de série se transporte aux caractères irréductibles de G. Pour une classe semi-simple (s) de G^* on pose

$$\mathcal{E}(G, (s)) = \big\{\chi \in \mathrm{Irr}_K G \mid \exists\, (\mathbf{T}, \theta) \sim s \text{ tel que } \langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta); \chi\rangle_G \neq 0\big\}.$$

Les deux premières propriétés de ces séries sont démontrées par Deligne–Lusztig dans leur article d'origine [DL].

Engendrement — Tout caractère irréductible de G apparaît comme constituant d'au moins un caractère de Deligne–Lusztig $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\theta)$ (voir [DL, Cor. 7.7]).

Disjonction — Soit $\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{B}'$) un sous-groupe de Borel contenant un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{T}'$). Si un caractère irréductible apparaît à la fois dans $H^i(\mathbb{X}_{\mathbf{B}}, K_\theta)$ et $H^j(\mathbb{X}_{\mathbf{B}'}, K_{\theta'})$ pour certains entiers i et j, alors les paires $(\mathbf{T}, \theta)$ et $(\mathbf{T}', \theta')$ appartiennent à la même série rationnelle (voir [DL, Thm. 6.2]).

On en déduit que les séries $\mathcal{E}(G, (s))$ forment une partition de l'ensemble des caractères irréductibles de G :

$$\mathrm{Irr}_K G = \bigsqcup_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss}}/\sim} \mathcal{E}(G, (s)). \tag{2}$$

La série $\mathcal{E}(G,(1))$ joue un rôle particulier. Ses éléments sont appelés les *caractères unipotents*. Par définition ce sont les caractères qui apparaissent dans $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1)$, ou de manière équivalente, dans la cohomologie des variétés $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ à coefficients dans le système local constant. Le nombre de caractères unipotents ne dépend que du groupe de Weyl W de $\mathbf{G}$ et de l'action de F sur W, et pas du corps sur lequel on travaille. Ces caractères ont été classifiés par Lusztig dans une série d'articles culminant en la monographie [Lu], et leurs propriétés de généricité (indépendance de q) ont été notamment étudiées par Broué, Malle et Michel (voir [BMM]).

1.2.5. *Décomposition de Jordan des caractères.* — La décomposition de Jordan des caractères irréductibles de G est la donnée d'une bijection

$$\mathcal{E}(G,(s)) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathcal{E}(C_{G^*}(s),(1)) \tag{3}$$

qui, étendue par linéarité, envoie un caractère de Deligne–Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ sur $R_{\mathbf{T}^*}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)}(1)$ pour toute paire $(\mathbf{T},\theta) \sim s$ (à un signe global près). Cette bijection provient de la classification des caractères irréductibles de G et $C_{G^*}(s)$, laquelle a été obtenue par Lusztig à partir de l'étude approfondie des caractères $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ (voir [Lu, Thm. 4.23]). À ce titre, elle satisfait de nombreuses propriétés, mais néanmoins il n'existe à l'heure actuelle aucun moyen de la définir directement, hormis dans le cas particulier que nous allons détailler.

Supposons que $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}^*$. C'est le dual de Langlands d'un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}$ de $\mathbf{G}$. Puisque l'ensemble des caractères unipotents ne dépend que du groupe de Weyl muni de l'action de F (d'après la classification de Lusztig, voir [Lu, §4]), on peut identifier les caractères unipotents de $C_{G^*}(s)$ avec ceux de L (en préservant les degrés). La décomposition de Jordan nous donne alors une bijection $\mathcal{E}(G,(s)) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathcal{E}(L,(1))$, qui dans ce cas peut se définir directement à partir de la cohomologie des variétés de Deligne–Lusztig. Étant donnés un sous-groupe parabolique $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi F-stable, et un caractère irréductible χ de L, on peut former comme précédemment le caractère virtuel

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\chi) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i [H^i(\mathbb{X}_{\mathbf{P}},\mathcal{F}_\chi)] \tag{4}$$

où $\mathcal{F}_\chi$ est le système local associé à χ via le revêtement $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathbf{P}}$. On peut voir l'application $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ comme un équivalent de l'induction entre les caractères de L et de G, adapté au cas des groupes réductifs finis.

THÉORÈME 1.1 (Lusztig). — *Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ et s un élément semi-simple de G^*. On suppose que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$ (en particulier $s \in L^*$). Pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ dont $\mathbf{L}$ est un complément de Levi, l'application $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ induit, à un signe global près, une bijection*

$$\mathcal{E}(L,(s)) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{E}(G,(s)).$$

Le résultat de Lusztig est en fait plus précis : si χ est caractère irréductible de L dans la série associée à (s), alors la cohomologie de la variété $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ à coefficients dans $\mathcal{F}_\chi$ est concentrée en un seul degré $i_{\mathbf{P}}$. En particulier, $H^{i_{\mathbf{P}}}(\mathbb{X}_{\mathbf{P}}, \mathcal{F}_\chi)$ est un caractère irréductible de G. Nous verrons plus loin que ce degré de cohomologie $i_{\mathbf{P}}$ correspond à la dimension de la variété de Deligne–Lusztig $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$.

Remarque 1.2. — Si $C_{\mathbf{G}^*}(s) = \mathbf{L}^*$, autrement dit si s est central dans $\mathbf{L}^*$, alors il existe un caractère linéaire $\hat{s} : L \longrightarrow K^\times$ tel que la multiplication par $\hat{s}$ induise une bijection entre $\mathcal{E}(L,(1))$ et $\mathcal{E}(L,(s))$. Par composition on déduit du théorème la bijection

$$R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\hat{s}-) : \mathcal{E}(L,(1)) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{E}(G,(s)).$$

Ainsi, l'étude des caractères irréductibles de la série associée à (s) se ramène à l'étude des caractères unipotents de L. Ce type de réduction, ainsi que sa généralisation au cadre modulaire, est à la base de nombreux résultats sur les représentations irréductibles des groupes réductifs finis (voir par exemple les applications mentionnées en introduction).

Exemple 1.3. — Le groupe $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est autodual. Les centralisateurs des éléments semi-simples de $\mathbf{G}$ sont toujours des sous-groupes de Levi, isomorphes à des produits de groupes linéaires. On obtient la forme de ces centralisateurs (et des groupes finis associés) à partir du polynôme caractéristique des éléments semi-simples considérés. Par exemple, si $s \in \mathrm{GL}_n(q)$ a un polynôme caractéristique de la forme P^m, où P est un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ de degré d, alors $C_G(s) \simeq \mathrm{GL}_m(q^d)$. On en déduit que tous les caractères irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ sont décrits par les caractères unipotents de produits de groupes linéaires sur des extensions finies de $\mathbb{F}_q$.

1.3. Regroupement de séries et blocs

1.3.1. *Cadre modulaire.* — Que se passe-t-il pour les représentations modulaires de G, c'est-à-dire les représentations à coefficients dans un corps de caractéristique $\ell > 0$? Les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de G à coefficients dans k, que nous noterons $\mathrm{Irr}_k G$ sont au même nombre que les classes de conjugaison *ℓ-régulières* de G. Ce sont les classes des éléments dont l'ordre est premier à ℓ. Si on suppose que $\ell \nmid q$, les éléments unipotents sont automatiquement ℓ-réguliers. De manière analogue à §1.1.1, la décomposition de Jordan permet de paramétrer les classes de conjugaison ℓ-régulières de G par des paires $((s),(u))$ où (s) est une classe ℓ-régulière semi-simple de G, et (u) une classe unipotente de $C_G(s)$. On peut donc s'attendre à un paramétrage analogue des représentations de G modulaires : une représentation irréductible devrait correspondre à une classe semi-simple ℓ-régulière (s) de G^* munie d'une représentation unipotente irréductible de $C_{G^*}(s)$.

Afin d'expliquer cette correspondance dans le cas modulaire et la mettre en parallèle avec les résultats précédents énoncés en caractéristique zéro, il est utile de travailler sur un anneau intermédiaire entre K (caractéristique 0) et k (caractéristique ℓ). Tout au long de cet exposé nous travaillerons en *caractéristique transverse* [3], c'est-à-dire sous l'hypothèse où $\ell \neq p$. Rappelons que K est une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K sur $\mathbb{Z}_\ell$; c'est un anneau local dont le corps résiduel k est un corps fini de caractéristique ℓ. Le triplet $(K, \mathcal{O}, k)$ est appelé *système ℓ-modulaire.* On gardera en tête le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
K & & \\
\mathbb{Q}_\ell \arrow[u, hook] & \mathcal{O} \arrow[ul, hook] \arrow[r, two heads] & k \\
& \mathbb{Z}_\ell \arrow[ul, hook] \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathbb{F}_\ell \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Comme au §1.2 nous éluderons tous les problèmes de rationalité en supposant que l'extension K est assez grande, de sorte que les algèbres KG et kG soient déployées. Autrement dit, toute représentation irréductible de G sur K (resp. sur k) reste irréductible après extension des scalaires à un corps contenant K (resp. k). Pour mettre en valeur l'anneau sur lequel les représentations seront définies, nous utiliserons souvent le terme de *ΛG-module* pour désigner une représentation de G à coefficients dans un anneau Λ. On parlera alors de module simple en lieu et place de représentation irréductible. Lorsque deux groupes finis G et H agissent linéairement sur un Λ-module M, avec G agissant à gauche et H à droite, on dira que M est un ΛG-module-ΛH [4].

Les ΛG-modules de type fini munis des morphismes linéaires G-équivariants forment une catégorie abélienne que nous noterons $\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}$. Lorsque $\Lambda = K$, cette catégorie est semi-simple. Autrement dit toute représentation de G à coefficients dans K se décompose en une somme directe de représentations irréductibles. En revanche, lorsque ℓ divise l'ordre de G et $\Lambda = \mathcal{O}$ ou k alors il existe des représentations indécomposables qui ne sont pas irréductibles. De manière équivalente, certaines suites exactes de ΛG-modules ne sont pas scindées. Pour éliminer ces complications homologiques, on travaille avec le *groupe de Grothendieck* de la catégorie abélienne $\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}$, noté $K_0(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$. C'est le groupe abélien engendré par les classes d'isomorphismes des ΛG-modules soumises aux relations $[N] = [M] + [P]$ pour toute suite exacte courte $0 \to M \to N \to P \to 0$. Lorsque Λ est un corps, le groupe $K_0(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$ est un groupe abélien libre de base les classes des représentations irréductibles (voir [Se2, §14]). Si $\Lambda = K$ la classe d'une représentation M dans $K_0(KG\text{-}\mathsf{mod})$ est déterminée par son caractère (la trace des éléments de G comme endomorphismes de M). Par extension nous appellerons souvent *caractère* la classe d'une représentation dans le groupe de Grothendieck.

3. Le cas de la *caractéristique égale* — c'est-à-dire pour ℓ égal à la caractéristique de $\mathbb{F}_q$ — est de nature tout à fait différente : par exemple, lorsque G est simple, il n'y a que deux blocs de kG, le bloc principal, et le bloc contenant la représentation de Steinberg (qui est alors simple et projective). Le paramétrage des modules simples dû à Steinberg nécessite d'autres outils, issus pour la plupart des représentations rationnelles du groupe algébrique $\mathbf{G}$.

4. Cette terminologie chère à M. Broué n'est que trop peu utilisée à notre goût, la plupart des auteurs préférant le terme de $(\Lambda G, \Lambda H)$-bimodule, ou de $\Lambda(G \times H^{\mathrm{op}})$-module.

Nous travaillerons aussi avec une autre catégorie, formée des ΛG-modules projectifs de type fini. Cette catégorie est seulement additive en général, mais on peut tout de même définir son groupe de Grothendieck en remplaçant les suites exactes par les suites exactes scindées. Sauf mention contraire, par le caractère d'un module projectif on entendra sa classe dans ce groupe de Grothendieck.

Notons pour finir que tout foncteur exact $\mathcal{F} : \Lambda G\text{-}\mathsf{mod} \longrightarrow \Lambda H\text{-}\mathsf{mod}$ entre deux catégories de représentations (par exemple un foncteur d'induction ou de restriction) induit un morphisme de groupes noté $[\mathcal{F}] : K_0(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}) \longrightarrow K_0(\Lambda H\text{-}\mathsf{mod})$ au niveau des groupes de Grothendieck.

1.3.2. *Séries modulaires.* — Si $\theta : T \longrightarrow K^\times$ est un caractère irréductible de T, ses valeurs sont des racines de l'unité et sont donc dans $\mathcal{O}^\times$. On en déduit, par passage au quotient, un caractère $\overline{\theta} : T \longrightarrow k^\times$. Fixons un autre caractère irréductible η de T. Le caractère résiduel $\overline{\eta}$ est trivial si et seulement si les valeurs de η sont des racines de l'unité dont l'ordre est une puissance de ℓ (des ℓ-éléments de $K^\times$). On dit dans ce cas que η est un *ℓ-caractère* et on note $\eta \in \mathrm{Irr}_\ell T$. De plus, la classe semi-simple (t) de G^* associée à $(\mathbf{T}, \eta)$ comme au §1.2.4 est aussi formée de ℓ-éléments. On notera $G^*_{\mathrm{ss},\ell}$ l'ensemble des ℓ-éléments semi-simples de G^*. Au niveau des représentations modulaires de G, cela suggère que les caractères de Deligne–Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ et $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta\eta)$ jouent le même rôle. On peut donc, pour un élément semi-simple s de G^* fixé, regrouper les séries de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_\ell(G, (s)) := \bigcup_{t \in C_{G^*}(s)_{\ell,\mathrm{ss}}} \mathcal{E}(G, (st)). \tag{5}$$

Ici, t parcourt l'ensemble des ℓ-éléments semi-simples de $C_{G^*}(s)$. Lorsque (s) est une classe ℓ-régulière, on dira que $\mathcal{E}_\ell(G, (s))$ est la *série modulaire* associée à (s).

Un point de vue équivalent consiste à considérer les kT-modules projectifs et leur relèvement à K. Notons $T_{\ell'}$ l'ensemble des éléments ℓ-réguliers de T (rappelons que ce sont les éléments d'ordre premier à ℓ). Puisque T est abélien, $T_{\ell'}$ est un sous-groupe de T d'ordre premier à ℓ, donc inversible dans $\mathcal{O}$. Au caractère irréductible $\theta : T \longrightarrow \mathcal{O}^\times$ on peut alors associer un idempotent e_θ de $\mathcal{O}T$ défini par

$$e_\theta = \frac{1}{|T_{\ell'}|} \sum_{t \in T_{\ell'}} \theta(t^{-1})t \ \in \mathcal{O}T.$$

Au lieu de considérer le KT-module simple K_θ de caractère θ, on peut former le $\mathcal{O}T$-module projectif $\mathcal{O}Te_\theta$, dont le caractère est donné par

$$[KTe_\theta] = \sum_{\eta \in \mathrm{Irr}_\ell T} \theta\eta.$$

Si s est l'élément semi-simple de G^* associé à $(\mathbf{T}, \theta)$ alors les caractères irréductibles qui apparaissent dans $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}([KTe_\theta])$ apparaissent dans les caractères de Deligne–Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta\eta)$ pour η parcourant l'ensemble des ℓ-caractères de T, et sont donc tous dans

$\mathcal{E}_\ell(G,(s))$. Ainsi, le regroupement en séries donné par (5) est le plus fin des regroupements qui contiennent les images par $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ des modules projectifs indécomposables :

$$\mathcal{E}_\ell(G,(s)) = \big\{\chi \in \mathrm{Irr}_K G \mid \exists\,(\mathbf{T},\theta) \sim s \text{ tel que } \langle R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}([KTe_\theta]);\chi\rangle_G \neq 0\big\}.$$

Broué et Michel ont utilisé cette observation ainsi que les propriétés de l'application $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ pour montrer que les séries modulaires sont définies sur les entiers [BMi].

Théorème 1.4 (Broué–Michel). — *Les séries modulaires sont des unions de ℓ-blocs. Autrement dit, il existe une famille $\{e_{(s)}\}_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}}$ d'idempotents centraux de $\mathcal{O}G$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *L'algèbre de groupe $\mathcal{O}G$ se décompose en une somme directe de $\mathcal{O}$-algèbres*

$$\mathcal{O}G = \bigoplus_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}} \mathcal{O}Ge_{(s)}.$$

(ii) *Les caractères des représentations irréductibles de l'algèbre $KGe_{(s)}$ sont exactement les éléments de $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$. Plus précisément, $\chi \in \mathrm{Irr}_K G$ satisfait $\chi(e_{(s)}) \neq 0$ si et seulement si $\chi \in \mathcal{E}_\ell(G,(s))$.*

On peut voir ce résultat comme une version modulaire de la propriété de disjonction des séries énoncée au §1.2.4 : la décomposition donnée en (i) induit (après une éventuelle extension des scalaires) une décomposition de la catégorie des représentations

$$\Lambda G\text{-}\mathsf{mod} = \bigoplus_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}/\sim} \Lambda Ge_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}$$

pour n'importe quel anneau Λ parmi K, $\mathcal{O}$ et k. L'assertion (ii) assure alors qu'étant donnés deux kG-modules simples S, S' dont les classes apparaissent dans des caractères de Deligne–Lusztig associés à des séries modulaires différentes, on a non seulement $\mathrm{Hom}_{kG}(S,S') = \mathrm{Hom}_{kG}(S',S) = 0$ mais aussi $\mathrm{Ext}^i_{kG}(S,S') = \mathrm{Ext}^i_{kG}(S',S) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Les modules S et S' appartiennent à des *blocs* différents (voir §3.1.3 pour plus de détails sur cette notion).

1.3.3. *Décomposition de Jordan modulaire.* — Lorsque $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est contenu dans un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$, on peut considérer les idempotents $e^L_{(s)}$ et $e^G_{(s)}$ associés respectivement aux séries $\mathcal{E}_\ell(L,(s))$ et $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$. Le théorème 1.1 assure alors qu'à un signe global près, l'application d'induction $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ induit une bijection entre $\mathcal{E}_\ell(L,(s))$ et $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$, c'est-à-dire entre les caractères des algèbres $KLe^L_{(s)}$ et $KGe^G_{(s)}$. Fort de cette observation et d'autres coïncidences numériques, Broué conjecture en 1988 que cette bijection provient d'une équivalence de Morita entre les versions entières de ces algèbres [Br2, p61-62]. Nous donnons dans un premier temps la version faible de cette conjecture, avant d'en expliquer la version géométrique dans la partie suivante.

Conjecture 1.5 (Broué). — *Si $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$, alors les catégories abéliennes $\mathcal{O}Le^L_{(s)}$-mod et $\mathcal{O}Ge^G_{(s)}$-mod sont équivalentes.*

Comme pour les représentations en caractéristique zéro, le cas $s = 1$ joue un rôle particulier. L'ensemble $\mathcal{E}_\ell(G,(1))$ est une union de blocs dits *blocs unipotents* possédant des propriétés de généricité étudiées par [BMM]. Lorsque $C_{\mathbf{G}^*}(s) = \mathbf{L}^*$, c'est-à-dire lorsque s est central dans $\mathbf{L}^*$, le caractère linéaire $\hat{s}$ donné par le théorème 1.1 induit un isomorphisme d'algèbres $\Lambda L e_{(1)}^L \xrightarrow{\sim} \Lambda L e_{(s)}^L$ défini par $g \mapsto \hat{s}(g^{-1})g$. Par composition on en déduit une équivalence

$$\Lambda L e_{(1)}^L\text{-}\mathsf{mod} \simeq \Lambda G e_{(s)}^G\text{-}\mathsf{mod}.$$

Autrement dit, dans le cas où le centralisateur de s est un sous-groupe de Levi [5] un bloc dans la série associée à (s) est Morita équivalent à un bloc unipotent d'un groupe dual à $C_{G^*}(s)$. C'est la version modulaire de la décomposition de Jordan.

2. ÉQUIVALENCES DE MORITA

Cette partie détaille les travaux de Broué et Bonnafé–Rouquier permettant de démontrer la conjecture 1.5.

2.1. Énoncé de la conjecture

En caractéristique zéro, la construction géométrique des représentations irréductibles de $G = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ et leur regroupement en séries s'obtient par l'étude de la cohomologie ℓ-adique des variétés de Deligne–Lusztig définies au §1.2.2. En travaillant directement avec des faisceaux à coefficients dans $k \supset \mathbb{F}_\ell$, on peut définir une version « caractéristique positive » des caractères de Deligne–Lusztig (1) et (4). Ce point de vue n'est pas satisfaisant : on obtient uniquement des informations de nature numérique sur les représentations. Afin de traiter des problèmes de nature homologique, il est nécessaire de remplacer les groupes de cohomologie individuels et leur somme alternée par un complexe, défini à quasi-isomorphisme près. Le formalisme des catégories dérivées sera particulièrement adapté à ce point de vue.

Fixons un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ de radical unipotent $\mathbf{U}$. On suppose que $\mathbf{P}$ admet un complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$. On se trouve alors dans la situation du §1.2.2 et on dispose d'une variété algébrique $\mathbb{Y}_\mathbf{U}$ sur laquelle les groupes finis G et L agissent. Étant donné un anneau Λ pris parmi K, $\mathcal{O}$ et k, on peut associer à cette variété un complexe de ΛG-modules-ΛL noté $R\Gamma(\mathbb{Y}_\mathbf{U},\Lambda)$ tel que $H^i(R\Gamma(\mathbb{Y}_\mathbf{U},\Lambda)) \simeq H^i(\mathbb{Y}_\mathbf{U},\Lambda)$. Ce complexe est un représentant d'un objet de la catégorie dérivée bornée $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda L)$ des complexes de ΛG-modules-ΛL. Via ce complexe, on peut définir un foncteur triangulé

$$\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} = R\Gamma(\mathbb{Y}_\mathbf{U},\Lambda) \overset{L}{\otimes}_{\Lambda L} - : \mathsf{D}^b(\Lambda L\text{-}\mathsf{mod}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$$

5. C'est le cas dès que l'ordre de s ne fait pas intervenir de nombres premiers petits par rapport au rang de $\mathbf{G}$.

appelé *foncteur d'induction de Deligne–Lusztig*. Ce foncteur induit une application linéaire $[\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}]$ entre les groupes de Grothendieck de ΛL-mod et ΛG-mod (6) ; dans le cas où $\Lambda = K \supset \mathbb{Q}_\ell$, cette application s'identifie à $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ définie par (4). On peut donc voir l'application d'induction de Deligne–Lusztig comme le reflet d'un foncteur d'induction au niveau des catégories dérivées. La version géométrique de la conjecture 1.5 énoncée par Broué [Br2, §3], et démontrée par Bonnafé–Rouquier [BR1, Thm. B'], est donc donnée par :

Conjecture 2.1 (Broué). — *Soit $s \in G^*$ un élément semi-simple ℓ-régulier de G^*. On suppose que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$. Alors le foncteur d'induction*

$$\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathsf{D}^b(\mathcal{O}Le_{(s)}^L\text{-}\mathsf{mod}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{O}Ge_{(s)}^G\text{-}\mathsf{mod})$$

induit une équivalence de Morita $\mathcal{O}Le_{(s)}^L$-$\mathsf{mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}Ge_{(s)}^G$-$\mathsf{mod}$.

L'énoncé de cette conjecture nécessite quelques éclaircissements : en considérant les modules (ou représentations) comme des complexes concentrés en degré 0, on dispose d'un plongement pleinement fidèle de la catégorie $\mathcal{O}Le_{(s)}$-mod dans la catégorie dérivée $\mathsf{D}^b(\mathcal{O}Le_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})$. En revanche, il n'est pas vrai que l'image par $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ d'un module — *i.e.*, d'un complexe concentré en un seul degré — est concentrée en un seul degré. Pour cela il faut démontrer que le complexe $R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ lui-même, coupé par la série modulaire de (s), est quasi-isomorphe à un $\mathcal{O}G$-module-$\mathcal{O}L$ concentré en un seul degré, et que ce module est projectif lorsqu'on le considère comme module-$\mathcal{O}L$. Le signe donné au théorème 1.1 provient alors du décalage homologique de ce module.

2.2. Du complexe au bimodule

Dans l'article [Br2] où il énonce cette conjecture, Broué propose une stratégie de preuve. Tout d'abord, le complexe $R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ possède les propriétés de finitude nécessaires pour définir un foncteur au niveau des catégories dérivées de modules. Les ℓ-éléments des groupes finis G et L agissent sans point fixe, et on peut donc trouver un représentant de $R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ dont les termes sont des $\mathcal{O}G$-modules-$\mathcal{O}L$ qui sont de type fini, et projectifs en tant que $\mathcal{O}G$-modules et modules-$\mathcal{O}L$ (7) (mais pas forcément pour les deux actions à la fois, nous verrons au §3.1.5 un résultat plus général dû à Rickard). De plus, la variété $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ a la même amplitude cohomologique qu'une variété affine (elle est en fait affine dès que q est assez grand, voir [DL, Thm. 9.7]) ; autrement dit, on peut choisir un représentant de $R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ dont les termes non nuls sont concentrés en degrés $0, 1, \ldots, \dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$.

Pour les mêmes raisons, le complexe de cohomologie à support compact $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ peut être représenté par un complexe concentré en degrés $\dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \ldots, 2\dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ dont les termes sont projectifs de type fini comme $\mathcal{O}G$-modules et comme modules-$\mathcal{O}L$.

6. Le groupe de Grothendieck de la catégorie dérivée bornée (en tant que catégorie triangulée) s'identifie naturellement au groupe de Grothendieck de la catégorie de modules associée (en tant que catégorie abélienne). L'image d'un complexe C est donnée par $[C] = \sum(-1)^i[C_i] = \sum(-1)^i[H^i(C)]$.

7. Il est intéressant de noter que cet argument est déjà présent dans l'article de Deligne–Lusztig !

Les travaux de Deligne–Lusztig [DL, §9] suggèrent alors de montrer que le morphisme naturel

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e^L_{(s)} \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e^L_{(s)} \tag{6}$$

est un isomorphisme. Le seul degré non nul en commun de ces deux complexes est le degré moitié, égal à $\dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}} = r$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_r \arrow[r] \arrow[d] & P_{r+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{2r} \arrow[r] & 0\ \cdots \\
\cdots\ 0 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Q_r \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0\ \cdots
\end{tikzcd}$$

Si (6) est un isomorphisme, on en déduit que chacun de ces complexes est isomorphe à un module concentré en degré moitié. Les propriétés de finitude de ces complexes (termes projectifs de type fini) se transmettent facilement à ce module, et l'on déduit la conjecture 2.1 de la bijection des caractères donnée au théorème 1.1.

Allons encore plus loin : les complexes de modules qui entrent en jeu sont les sections globales de certains faisceaux sur des versions projectives des variétés de Deligne–Lusztig. Rappelons que l'on dispose d'un revêtement étale $\pi : \mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ qui est un L-torseur. Le $\mathcal{O}L$-module projectif $\mathcal{O}Le_{(s)}$ donne lieu à un système local sur $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ que l'on notera $\mathcal{F}_{(s)}$. Considérons l'adhérence de $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ dans la variété projective $\mathbf{G}/\mathbf{P}$ donnée par

$$\overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in \overline{\mathbf{P}\cdot F(\mathbf{P})}\}/\mathbf{P}$$

ainsi que l'inclusion ouverte $j : \mathbb{X}_{\mathbf{P}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}}$. Les complexes $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e^L_{(s)}$ et $R\Gamma(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e^L_{(s)}$ correspondent alors aux sections globales des complexes de faisceaux $j_!\mathcal{F}_{(s)}$ et $Rj_*\mathcal{F}_{(s)}$ respectivement. Il suffit alors de montrer une version locale de l'isomorphisme (6), à savoir que l'application naturelle

$$j_!\mathcal{F}_{(s)} \longrightarrow Rj_*\mathcal{F}_{(s)} \tag{7}$$

est un isomorphisme.

Pour finir, Broué montre qu'un $\mathcal{O}G$-module-$\mathcal{O}L$ de type fini, projectif à gauche et à droite, induit une équivalence de Morita dès qu'il induit une bijection entre les caractères irréductibles (donc sur K, en caractéristique 0) (voir [Br2, Th. 0.2]). En appliquant le théorème 1.1, il déduit donc une preuve de la conjecture 2.1 sous l'hypothèse où (7) est un isomorphisme.

Le cas particulier où $\mathbf{L} = \mathbf{T}$ est un tore (et donc $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ est un sous-groupe de Borel) est très instructif : on peut remplacer $\overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{B}}$ par une compactification lisse de $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ dont le complémentaire est une union de diviseurs à croisements normaux. Deligne et Lusztig montrent à l'aide de cette construction que les faisceaux associés à des caractères réguliers de T se ramifient le long de ces diviseurs, ce qui implique que l'application $j_!\mathcal{F}_{(s)} \longrightarrow j_*\mathcal{F}_{(s)}$ est un isomorphisme. Puisque T est d'ordre premier à la caractéristique de $\mathbb{F}_q$, la ramification est modérée et on a en fait un isomorphisme $j_!\mathcal{F}_{(s)} \xrightarrow{\sim} Rj_*\mathcal{F}_{(s)}$.

Broué en déduit que la conjecture 2.1 est vraie dans le cas où $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est un tore [Br2, Thm. 3.3].

Dans le cas général, on ne dispose pas d'une compactification lisse de $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ permettant le même genre de calcul de ramification. L'idée de Bonnafé–Rouquier est d'utiliser la transitivité de l'induction de Deligne–Lusztig pour se ramener au cas des tores. Cela nécessite d'une part de montrer que les complexes de cohomologie de variétés de Deligne–Lusztig « suffisent » (résultats d'engendrement de la catégorie dérivée, voir §2.4), et d'autre part d'étendre les résultats de Deligne–Lusztig à des caractères non réguliers donnant des systèmes locaux sur des compactifications partielles de $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$. Nous allons détailler leurs travaux dans les sections suivantes.

2.3. Ramification

2.3.1. *Variétés de Deligne–Lusztig généralisées et leur compactification.* — Dans cette partie et la suivante, nous allons nous concentrer sur le cas des variétés de Deligne–Lusztig $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ associées à des sous-groupes de Borel et à leur radical unipotent. Pour définir les compactifications de $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ qui vont entrer en jeu, il est commode de changer de point de vue. On fixe désormais un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ ainsi qu'un sous-groupe de Borel F-stable $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$. Une telle paire $(\mathbf{T},\mathbf{B})$ existe toujours, et elle est unique à conjugaison par G près. On dit que le tore $\mathbf{T}$ est *quasi-déployé*. Dans ce cas, les variétés $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ s'identifient aux ensembles finis G/U et G/B respectivement. Si $(\mathbf{T}',\mathbf{B}')$ est une autre paire formée d'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{G}$ contenu dans un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{G}$ (non nécessairement F-stable), alors il existe $x\in\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{T}'={}^x\mathbf{T}$ et $\mathbf{B}'={}^x\mathbf{B}$. La condition que $\mathbf{T}'$ soit F-stable est équivalente au fait que $n=x^{-1}F(x)$ appartienne au normalisateur $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$. Si on note w l'image de n dans $W=N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, la multiplication à droite par x induit des isomorphismes G-équivariants

$$\mathbb{Y}_{\mathbf{U}'}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Y}(n):=\{g\in\mathbf{G}\mid g^{-1}F(g)\in\mathbf{U}n\mathbf{U}\}/\mathbf{U}$$

et

$$\mathbb{X}_{\mathbf{B}'}\xrightarrow{\sim}\mathbb{X}(w):=\{g\in\mathbf{G}\mid g^{-1}F(g)\in\mathbf{B}w\mathbf{B}\}/\mathbf{B}.$$

Via cette description, l'action de T' sur $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}'}$ s'identifie à l'action de $\mathbf{T}^{wF}$ sur $\mathbb{Y}(n)$. L'application naturelle $\mathbb{Y}(n)\longrightarrow\mathbb{X}(w)$ induite par la projection $\mathbf{G}/\mathbf{U}\twoheadrightarrow\mathbf{G}/\mathbf{B}$ est un $\mathbf{T}^{wF}$-torseur étale.

Plus généralement, étant donné un r-uplet $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_r)$ d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ d'image $\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_r)$ dans W on peut définir des G-variétés $\mathbb{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbb{X}(\mathbf{w})$, ainsi qu'un $\mathbf{T}^{wF}$-torseur étale $\pi:\mathbb{Y}(\mathbf{n})\longrightarrow\mathbb{X}(\mathbf{w})$ où $w=w_1\cdots w_r$. Lorsque $\ell(w)=\ell(w_1)+\cdots+\ell(w_r)$ les variétés $\mathbb{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbb{X}(\mathbf{w})$ sont naturellement isomorphes à $\mathbb{Y}(n)$ et $\mathbb{X}(w)$ respectivement, avec $n=n_1\cdots n_r$.

Notons $\mathbb{X}(\underline{w})$ l'adhérence de $\mathbb{X}(w)$ dans $\mathbf{G}/\mathbf{B}$; celle-ci s'obtient explicitement en remplaçant la condition $g^{-1}F(g)\in\mathbf{B}w\mathbf{B}$ par la condition $g^{-1}F(g)\in\overline{\mathbf{B}w\mathbf{B}}$. C'est une variété projective qui est lisse dès que $\overline{\mathbf{B}w\mathbf{B}}$ l'est. Puisque $\overline{\mathbf{B}w\mathbf{B}}$ s'écrit comme l'union des cellules de Bruhat $\mathbf{B}x\mathbf{B}$ pour $x \leq w$ (on peut prendre cette condition comme définition de l'ordre de Bruhat $\leq$ sur W), on obtient

$$\mathbb{X}(\underline{w}) = \bigsqcup_{x \leq w} \mathbb{X}(x). \tag{8}$$

Cette définition se généralise au cas des r-uplets $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_r)$ d'éléments de W. On peut définir une variété projective $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) = \mathbb{X}(\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_r})$ qui est lisse dès que chacune des variétés $\overline{\mathbf{B}w_i\mathbf{B}}$ l'est. En particulier, si chaque w_i est une réflection simple, la variété $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$ est une compactification lisse de $\mathbb{X}(\mathbf{w})$. L'ordre de Bruhat sur W s'étend par produit en un ordre sur les r-uplets d'éléments de W de sorte que la décomposition (8) reste valide pour $\mathbf{w}$:

$$\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) = \bigsqcup_{\mathbf{x} \leq \mathbf{w}} \mathbb{X}(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Pour $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$ on notera $j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}} : \mathbb{X}(\mathbf{x}) \hookrightarrow \mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$ le plongement de la pièce associée à $\mathbf{x}$, ou tout simplement $j_{\mathbf{x}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variété projective ambiante.

2.3.2. *Cas régulier.* — Rappelons que la stratégie pour montrer que la cohomologie du complexe $R\Gamma(\mathbb{Y}, \Lambda)$, coupé par la série modulaire associée à (s), est concentrée en degré moitié, consiste à comparer les versions compacte et non compacte de ce complexe. Cela revient à comparer le faisceau $(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_!\mathcal{F}$ avec le complexe de faisceaux $R(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_*\mathcal{F}$ pour certains $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$ et certains systèmes locaux $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{X}(\mathbf{x})$. Le premier résultat dans ce sens est dû à Deligne–Lusztig pour les systèmes locaux associés à des caractères réguliers. Sous l'hypothèse que le centre de $\mathbf{G}$ est connexe, un caractère de $\mathbf{T}^{wF}$ sera dit *régulier* si son stabilisateur sous l'action de W^{wF} est trivial [8].

Théorème 2.2 (Deligne–Lusztig, [DL, Lem. 9.14]). — *Fixons une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w et posons $\mathbf{w} = (s_1, \ldots, s_r)$. Soit $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow K^\times$ un caractère de $\mathbf{T}^{wF}$ et K_θ le système local sur $\mathbb{X}(\mathbf{w})$ associé. Si θ est régulier, alors le morphisme naturel*

$$(j_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}})_! K_\theta \longrightarrow R(j_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}})_* K_\theta$$

est un isomorphisme.

Pour traiter le cas modulaire, nous travaillerons à coefficients dans un anneau Λ pris parmi K, $\mathcal{O}$ et k. On peut alors de manière similaire construire un système local Λ_θ de rang 1 à partir d'un morphisme de groupes $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$. Le théorème 2.2 s'étend immédiatement à ce cadre dès que θ est régulier.

8. Cette condition définit plutôt la propriété d'être *en position générale* dans le cas d'un groupe réductif quelconque.

2.3.3. *Cas trivial.* — À l'opposé, considérons le cas d'un caractère trivial : le système local associé sur $\mathbb{X}(\mathbf{w})$ et sur toutes les variétés $\mathbb{X}(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$ est le système local constant Λ. Notons $j = j_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}} : \mathbb{X}(\mathbf{w}) \hookrightarrow \mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$ l'immersion ouverte et $i : \mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) \smallsetminus \mathbb{X}(\mathbf{w}) \hookrightarrow \mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$ l'immersion fermée. Pour éviter toute ambiguïté nous noterons $\Lambda_{\mathbb{X}}$ le faisceau constant égal à Λ sur la variété $\mathbb{X}$. La suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$

$$0 \longrightarrow j_! \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{w})} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})} \longrightarrow i_! \Lambda_{\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) \smallsetminus \mathbb{X}(\mathbf{w})} \longrightarrow 0$$

permet, en utilisant (9), de montrer par récurrence que $\Lambda_{\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})}$ est obtenu par extensions successives des faisceaux $(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_! \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{x})}$ pour $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$. Puisque toutes les variétés considérées sont lisses (et que $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) \smallsetminus \mathbb{X}(\mathbf{w})$ est de codimension 1 dans $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$), l'application du foncteur de dualité à la suite exacte précédente fournit le triangle distingué

$$i_! \Lambda_{\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) \smallsetminus \mathbb{X}(\mathbf{w})}[-2] \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})} \longrightarrow Rj_* \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{w})} \rightsquigarrow$$

On en déduit que $Rj_* \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{w})}$ peut s'obtenir à partir des faisceaux $(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_! \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{x})}$ pour $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$ en prenant une succession de cônes, de sommes directes, de facteurs directs et de décalages. De manière plus formelle, on dit que $Rj_* \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{w})}$ appartient à la sous-catégorie épaisse des complexes constructibles $D_c^b(\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}))$ engendrée par la famille $\big\{(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_! \Lambda_{\mathbb{X}(\mathbf{x})}\big\}_{\mathbf{x} \leq \mathbf{w}}$.

2.3.4. *Cas général.* — Le cœur du travail de Bonnafé–Rouquier est de généraliser ces deux résultats (θ régulier ou θ trivial) à des caractères quelconques de $\mathbf{T}^{wF}$. Une étude plus précise de la ramification des systèmes locaux sur $\mathbb{X}(\mathbf{w})$ et ses compactifications partielles est nécessaire. Elle est rendue possible par le recollement de revêtements intermédiaires aux revêtements $\mathbb{Y}(\mathbf{m}) \longrightarrow \mathbb{X}(\mathbf{x})$ où $\mathbf{m}$ est une suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ d'images $\mathbf{x}$ dans W et $\mathbf{x} \leq \mathbf{w}$. Ces recollements sont obtenus grâce à l'identification de certains quotients des tores $\mathbf{T}^{xF}$. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans [BR1, §6-7], ainsi que dans un travail ultérieur de Bonnafé–Rouquier [BR2] où est donnée une description explicite de la normalisation de $\mathbb{Y}(\mathbf{n})$ dans $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}})$ de manière compatible à (9). Nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3 (Bonnafé–Rouquier). — *Soit $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$. Il existe $\mathbf{w}_\theta \leq \mathbf{w}$ tel que les éléments $\mathbf{x}$ de l'intervalle $[\mathbf{w}_\theta, \mathbf{w}]$ vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe une surjection naturelle $\mathbf{T}^{xF} \twoheadrightarrow \mathbf{T}^{wF}/\ker\theta$, via laquelle on peut définir le système local Λ_θ sur $\mathbb{X}(\mathbf{x})$.*

(ii) *Le complexe $R(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})_* \Lambda_\theta$ peut s'obtenir à partir des faisceaux $(j_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w}})_! \Lambda_\theta$ pour $\mathbf{y} \in [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{x}]$ en prenant une succession de cônes, de sommes directes, de facteurs directs et de décalages.*

Puisque $\mathbb{X}(\mathbf{x})$ est lisse pour tout $\mathbf{x}$, on déduit par dualité que le résultat reste vrai en échangeant le rôle de Rj_* et $j_!$. Autrement dit, pour $\mathbf{x}$ fixé, les catégories épaisses engendrées par $\big\{R(j_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w}})_* \Lambda_\theta\big\}_{\mathbf{y} \in [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{x}]}$ et $\big\{(j_{\mathbf{y}}^{\mathbf{w}})_! \Lambda_\theta\big\}_{\mathbf{y} \in [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{x}]}$ coïncident. Dans le cas où θ est régulier on a $\mathbf{w}_\theta = \mathbf{w}$ et on retrouve le résultat de Deligne–Lusztig (théorème 2.2). Le cas où θ est trivial correspond à $\mathbf{w}_\theta = 1$.

2.3.5. *Conséquences.* — Le théorème 2.3 permet de déduire deux résultats fondamentaux dans le travail de Bonnafé–Rouquier, qui sont les ingrédients principaux dans leur preuve de la conjecture 2.1, à savoir :

SUPPORT — $(j_{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}})^* R(j_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}})_* \Lambda_\theta = 0$ dès que $\mathbf{x} \notin [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{w}]$. Autrement dit, le support du complexe de faisceaux $R(j_{\mathbf{w}}^{\mathbf{w}})_* \Lambda_\theta$ est contenu dans $\sqcup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{w}]} \mathbb{X}(\mathbf{x})$. Cette propriété découle directement du théorème précédent.

ENGENDREMENT — Les complexes de cohomologie $\{R\Gamma(\mathbb{Y}(n), \Lambda)\}_{n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})}$ engendrent la catégorie des complexes parfaits de ΛG-modules, de manière compatible avec les séries modulaires. La démonstration de ce second résultat est donnée dans la section suivante.

2.4. Engendrement de la catégorie dérivée

2.4.1. *Complexes parfaits.* — Rappelons que tout caractère irréductible de G apparaît comme constituant d'un caractère de Deligne–Lusztig, lequel est donné par la somme alternée des groupes de cohomologie de la variété $\mathbb{Y}(n)$ pour un certain $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. La généralisation de ce résultat au cadre modulaire garantit que tout module projectif indécomposable peut s'obtenir à partir des complexes de cohomologie $R\Gamma(\mathbb{Y}(n), \Lambda)$ pour $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ en prenant des successions de sommes directes, facteurs directs, cônes et décalages. Cela s'exprime formellement en l'énoncé du théorème 2.4, obtenu par Bonnafé–Rouquier dans [BR1, §9].

Les objets de $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$ possédant de bonnes propriétés de finitude (objects compacts) sont les complexes quasi-isomorphes à des *complexes parfaits*, à savoir des complexes bornés dont les termes sont des modules projectifs de type fini. On notera $\Lambda G\text{-}\mathsf{parf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$ formée par ces complexes.

THÉORÈME 2.4 (Bonnafé–Rouquier). — *La catégorie* $\Lambda G\text{-}\mathsf{parf}$ *est la sous-catégorie épaisse de* $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod})$ *engendrée par les complexes* $R\Gamma(\mathbb{Y}(n), \Lambda)$ *pour* n *variant dans* $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$.

Démonstration. — À isomorphisme (non unique) près, la variété $\mathbb{Y}(n)$ ne dépend que de la classe de n dans $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Il suffit donc de travailler avec un système de représentants $\{\dot{w}\}_{w \in W}$ de W dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$.

D'après [DL, Prop. 7.5], la représentation régulière de G est combinaison linéaire des caractères des complexes $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ pour w variant dans W. On en déduit que tout ΛG-module projectif indécomposable apparaît dans le caractère d'un certain complexe $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$. La tête de ce module projectif, que l'on notera S, est un ΛG-module simple qui vérifie alors

$$R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda), S) \neq 0. \tag{10}$$

Le module simple S étant fixé, choisissons w de longueur minimale tel que l'équation (10) soit vérifiée. En particulier, $R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{v}), \Lambda), S) = 0$ dès que $v < w$. En utilisant la dualité de Poincaré, on en déduit que $R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{v}), \Lambda), S^*) = 0$ dès que $v < w$.

Via le revêtement $\mathbb{Y}(\dot{v}) \longrightarrow \mathbb{X}(v)$, le complexe $R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{v}), \Lambda)$ est quasi-isomorphe au complexe $R\Gamma_c(\mathbb{X}(v), \Lambda\mathbf{T}^{wF})$ où $\Lambda\mathbf{T}^{wF}$ est le système local associé à la représentation régulière de $\mathbf{T}^{wF}$. Puisque tout module Λ_θ associé au caractère $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$ possède une résolution dont les termes sont des $\Lambda\mathbf{T}^{wF}$-modules libres, on en déduit que

$$R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma_c(\mathbb{X}(v), \Lambda_\theta), S^*) = 0 \tag{11}$$

pour tout $v < w$ et tout caractère $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$. Par des réductions standard dues à Deligne–Lusztig (voir [DL, §1] ainsi que §4.2.1), cette propriété reste vraie pour les variétés $\mathbb{X}(\mathbf{v})$ dès que $\mathbf{v}$ est une suite d'éléments de W dont le produit vaut v.

C'est ici que le théorème 2.3 entre en jeu. Fixons une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w et posons $\mathbf{w} = (s_1, \ldots, s_r)$. Le cône du morphisme naturel $(j^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}})_! \Lambda_\theta \longrightarrow R(j^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}})_* \Lambda_\theta$ est un complexe de faisceaux supporté sur le fermé $\mathbb{X}(\underline{\mathbf{w}}) \smallsetminus \mathbb{X}(\mathbf{w})$ et engendré par les faisceaux $(j^{\mathbf{w}}_{\mathbf{v}})_! \Lambda_\theta$ pour $\mathbf{w}_\theta \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{w}$ d'après le théorème 2.3. En prenant les sections globales, on en déduit que le cône du morphisme naturel $R\Gamma_c(\mathbb{X}(\mathbf{w}), \Lambda_\theta) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{X}(\mathbf{w}), \Lambda_\theta)$ est engendré par les complexes $R\Gamma_c(\mathbb{X}(\mathbf{v}), \Lambda_\theta)$ pour $\mathbf{v} < \mathbf{w}$. Par conséquent, la propriété (11) implique que le morphisme naturel $R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda) \longrightarrow R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ induit un isomorphisme

$$R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda), S^*) \xrightarrow{\sim} R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda), S^*).$$

Puisque $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ et $R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ sont des complexes parfaits dont les termes non nuls se trouvent respectivement en degrés $0, \ldots, \ell(w)$ et $\ell(w), \ldots, 2\ell(w)$, on en déduit que le complexe $R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}(R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda), S^*)$ n'a qu'un seul degré de cohomologie non nul, à savoir le degré $\ell(w)$. Autrement dit, il existe un représentant de $R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ dans lequel P_{S^*} n'apparaît qu'en degré $\ell(w)$. Par dualité de Poincaré, la même assertion est vérifiée pour P_S dans le complexe $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$.

On a donc montré que pour S fixé, la minimalité de w force le module P_S à n'apparaître qu'en degré moitié. Ainsi, P_S est un facteur direct du cône de $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)$ vers sa troncation brutale en degrés $0, \ldots, \ell(w) - 1$, lequel est un complexe dont les termes font intervenir des modules projectifs indécomposables qui apparaissent déjà dans des complexes $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{v}), \Lambda)$ pour v de longueur strictement plus petite que w. Puisqu'en outre $R\Gamma(\mathbb{Y}(1), \Lambda)$ est quasi-isomorphe à un module projectif placé en degré 0, on en déduit le théorème par récurrence. □

2.4.2. *Engendrement des séries.* — Rappelons que l'algèbre $\mathcal{O}G$ se décompose en une somme directe de sous-algèbres associées à des séries modulaires $\mathcal{E}_\ell(G, (s))$, chacune étant paramétrée par une classe semi-simple ℓ-régulière (s) de G^* (voir §1.3.2) :

$$\mathcal{O}G = \bigoplus_{(s) \in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}/\sim} \mathcal{O}Ge_{(s)}.$$

Au niveau des représentations sur K (caractéristique zéro), c'est-à-dire des caractères, chaque série correspond aux constituants irréductibles de caractères de Deligne–Lusztig. Avec les notations de cette section et la précédente, les tores maximaux F-stables de $\mathbf{G}$

avec action de F sont remplacés par le tore maximal quasi-déployé $\mathbf{T}$ fixé avec action de wF pour un certain $w \in W$. Comme au §1.2.4 on peut donc associer à toute paire (w, θ) formée d'un élément $w \in W$ et d'un caractère $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow K^\times$ une classe semi-simple (s) de G^*. On notera alors $(w, \theta) \sim s$. Avec ces notations on a

$$\mathcal{E}(G,(s)) = \big\{\chi \in \mathrm{Irr}_K G \mid \exists\,(w,\theta) \sim s \text{ tel que } \langle [R\Gamma(\mathbb{X}(w), K_\theta)]; \chi\rangle_G \neq 0\big\}.$$

De même, si e_θ dénote l'idempotent de $\mathcal{O}\mathbf{T}^{wF}$ associé à un caractère $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$, la série modulaire s'écrit

$$\mathcal{E}_\ell(G,(s)) = \big\{\chi \in \mathrm{Irr}_K G \mid \exists\,(w,\theta) \sim s \text{ tel que } \langle [R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), K)e_\theta]; \chi\rangle_G \neq 0\big\}.$$

Le théorème d'engendrement de la catégorie des complexes parfaits est compatible avec la décomposition en séries et s'énonce en le corollaire suivant (voir [BR1, Thm. A]) :

Corollaire 2.5 (Bonnafé–Rouquier). — *Soit s un élément semi-simple ℓ-régulier de G^*. Les complexes*

$$\{R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \mathcal{O})e_\theta \mid (w,\theta) \sim s\}$$

engendrent la catégorie $\mathcal{O}Ge_{(s)}$-parf.

Idée de preuve. — Pour w fixé, on a $\sum_{\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{O}} \mathbf{T}^{wF}} e_\theta = 1$. On déduit donc du théorème 2.4 que les complexes $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \mathcal{O})e_\theta$ engendrent $\mathcal{O}G$-parf lorsque w parcourt W et θ parcourt l'ensemble des caractères de $\mathbf{T}^{wF}$ à valeurs dans $\mathcal{O}^\times$. Le corollaire découle alors d'une généralisation du théorème de disjonction des séries de Deligne–Lusztig au cadre modulaire ainsi qu'une application du théorème 1.4.

Plus précisément, il est montré au [BR1, Corollaire 8.5] que si s' est un autre élément semi-simple ℓ-régulier de G^* tel que $(s') \neq (s)$ (autrement dit tel que s et s' ne sont pas conjugués dans G^*) alors

$$R\mathrm{Hom}_{\Lambda G}\big(R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \mathcal{O})e_\theta, R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}'), \mathcal{O})e_{\theta'}\big) = 0$$

pour tous $(w,\theta) \sim s$ et $(w',\theta') \sim s'$. Cela montre que les catégories engendrées par les complexes $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), \mathcal{O})e_\theta$ dans une série fixée sont deux à deux orthogonales. On conclut en remarquant que le caractère de $R\Gamma(\mathbb{Y}(\dot{w}), K)e_\theta$ fait effectivement intervenir des caractères de $\mathcal{E}_\ell(G,(s))$ uniquement, ce qui a été observé au §1.3.2. $\square$

2.5. Équivalence de Morita

Reprenons maintenant les hypothèses de la conjecture 2.1 : s est un élément semi-simple ℓ-régulier de G^* dont le centralisateur $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ est contenu dans un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$. Fixons un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ de complément de Levi $\mathbf{L}$ et notons $\mathbf{U}$ son radical unipotent. On dispose des variétés de Deligne–Lusztig $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{X}_{\mathbf{P}} \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}}$ définies aux paragraphes 1.2.2 et 2.2, ainsi que d'un faisceau $\mathcal{F}_{(s)}$ sur $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ provenant de la représentation $\mathcal{O}Le_{(s)}^L$. Les résultats des deux sections précédentes permettent de démontrer le théorème suivant (voir [BR1, Thm. 11.7]).

Théorème 2.6 (Bonnafé–Rouquier). — *Sous les hypothèses précédentes, le morphisme naturel*
$$j_!\mathcal{F}_{(s)} \longrightarrow Rj_*\mathcal{F}_{(s)}$$
est un isomorphisme[(9)].

De manière équivalente, le théorème traduit le fait que le complexe de faisceaux $Rj_*\mathcal{F}_{(s)}$ est supporté sur l'ouvert $\mathbb{X}_{\mathbf{P}}$. En notant $i : \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}} \smallsetminus \mathbb{X}_{\mathbf{P}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}}$ l'immersion fermée cela se réécrit en $i^*Rj_*\mathcal{F}_{(s)} = 0$.

Idée de preuve. — Une preuve détaillée nécessiterait d'introduire de nombreuses notations qui seraient fatales pour le lecteur arrivé jusqu'ici. Nous prenons donc le parti de ne donner que les idées générales, sachant que la plupart des arguments de réduction détaillés dans [BR1] sont standard.

Puisque le système local $\mathcal{F}_s$ provient d'une représentation projective de ΛL, il peut, en vertu du corollaire 2.5, s'obtenir à partir des complexes $R\Gamma(\mathbb{Y}^{(\mathbf{L})}_{\mathbf{U_L}}, \mathcal{O})e_\theta$, où $\mathbf{U_L}$ est le radical d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B_L}$ de $\mathbf{L}$ contenant un tore F-stable $\mathbf{T}$ avec $(\mathbf{T},\theta) \sim s$. Ici, pour insister sur le fait que la variété associée à $\mathbf{U_L}$ est une variété de Deligne–Lusztig du sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ et non de $\mathbf{G}$, nous la noterons $\mathbb{Y}^{(\mathbf{L})}_{\mathbf{U_L}}$. Le sous-groupe de Borel $\mathbf{B_L}$ de $\mathbf{L}$ provient d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{B_L} = \mathbf{B} \cap \mathbf{L}$. Si $\mathbf{V}$ est le radical unipotent de $\mathbf{B}$, on a $\mathbf{U_L} = \mathbf{V} \cap \mathbf{L}$. La transitivité de l'induction de Lusztig, qui s'écrit $\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}} \simeq \mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} \circ \mathcal{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}\cap\mathbf{L}}$ provient d'un isomorphisme de variétés
$$\mathbb{Y}_{\mathbf{U}} \times_L \mathbb{Y}^{(\mathbf{L})}_{\mathbf{V}\cap\mathbf{L}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{Y}_{\mathbf{V}}.$$
Grâce à cet isomorphisme et à un changement de base, on montre que la condition $i^*Rj_*\mathcal{F}_{(s)} = 0$ est impliquée par une condition similaire pour les variétés associées à des sous-groupes de Borel. Plus précisément, on peut définir comme en 2.3.1 une compactification lisse $\overline{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$; l'application naturelle $\mathbb{X}_{\mathbf{B}} \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathbf{P}}$ donnée par la projection $\mathbf{G}/\mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{P}$ s'étend en un morphisme $\overline{\mathbb{X}} \xrightarrow{p} \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}}$ selon le diagramme suivant :
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_{\mathbf{B}} \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{X}} \arrow[d, "p"] & \overline{\mathbb{X}} \smallsetminus p^{-1}(\mathbb{X}_{\mathbf{P}}) \arrow[l, hook', "i'"'] \arrow[d] \\
\mathbb{X}_{\mathbf{P}} \arrow[r, hook, "j"] & \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}} & \overline{\mathbb{X}}_{\mathbf{P}} \smallsetminus \mathbb{X}_{\mathbf{P}} \arrow[l, hook', "i"']
\end{tikzcd}$$
On se ramène alors à montrer que $(i')^*R(j')_*\mathcal{O}_\theta = 0$ où $\mathcal{O}_\theta$ est le système local de rang 1 associé à θ.

Il reste à montrer que l'on se trouve dans les conditions d'application de la condition de support donnée en section 2.3.5. Autrement dit, il faut analyser les différentes variétés de Deligne–Lusztig qui interviennent dans $\overline{\mathbb{X}} \smallsetminus p^{-1}(\mathbb{X}_{\mathbf{P}})$. C'est ici qu'interviennent les conditions $(\mathbf{T},\theta) \sim s$ et $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$. En identifiant $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ avec $\mathbb{X}(\mathbf{w})$ comme au §2.3.1

9. Dans le cas où $Z(\mathbf{G})$ n'est pas connexe, les centralisateurs d'éléments semi-simples de G^* ne sont pas forcément connexes. Le théorème est en fait démontré dans [BR1, §11] sous l'hypothèse plus faible que $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ \subset \mathbf{L}$.

on montre que $\overline{\mathbb{X}} \smallsetminus p^{-1}(\mathbb{X}_{\mathbf{P}})$ est union de variétés $\mathbb{X}(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \notin [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{w}]$. Puisque $(j^{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}})^* R(j')_* \mathcal{O}_\theta = 0$ pour tout $\mathbf{x} \notin [\mathbf{w}_\theta, \mathbf{w}]$ cela termine la preuve du théorème. $\square$

Comme expliqué au §2.2 (voir aussi la preuve de [BR1, Thm. B]), ce résultat géométrique permet de démontrer la conjecture d'équivalence de Morita prédite par Broué.

THÉORÈME 2.7 (Bonnafé–Rouquier). — *Soit $s \in G^*$ un élément semi-simple ℓ-régulier de G^*. On suppose que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$. Alors le foncteur d'induction*

$$\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} : \mathsf{D}^b(\mathcal{O}Le^L_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(\mathcal{O}Ge^G_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})$$

induit une équivalence $\mathcal{O}Le^L_{(s)}\text{-}\mathsf{mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}Ge^G_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}$.

3. LA DÉCOMPOSITION DE JORDAN SPLENDIDE

L'équivalence de Morita entre les algèbres $\Lambda Le^L_{(s)}$ et $\Lambda Ge^G_{(s)}$ ne permet pas d'expliquer toutes les coïncidences numériques entre les caractères des séries rationnelles de L et de G associées à (s). En outre, bien qu'une telle équivalence préserve les propriétés homologiques des représentations (morphismes et extensions), elle ne donne en général aucune information sur la structure supplémentaire donnée par les sous-groupes et notamment les ℓ-sous-groupes de L et G.

Le but de cette section est de montrer que l'équivalence entre (certaines séries de) L et G peut s'enrichir en une famille d'équivalences pour les représentations de $C_L(Q)$ et $C_G(Q)$ lorsque Q varie parmi les ℓ-sous-groupes de L. On parlera alors d'*équivalence splendide* (voir §3.1.4). Ces équivalences ont l'avantage de préserver la structure locale des blocs, notamment leurs groupes de défaut, qui permettent dans le cas des groupes de mesurer l'obstruction d'une algèbre à être semi-simple. Nous commencerons par rappeler le vocabulaire de théorie des représentations qui entrera en jeu, avant de donner la forme « splendide » de la décomposition de Jordan et d'en expliquer la démonstration par Bonnafé–Dat–Rouquier [BDR].

3.1. Modules de ℓ-permutation et équivalences splendides

Dans cette première section nous supposerons que G et L sont des groupes finis quelconques. Ce choix de notation n'est bien sûr pas anodin et nous reviendrons dès la section suivante aux cas des groupes réductifs finis et de leurs sous-groupes de Levi.

3.1.1. *Modules de permutation et ℓ-permutation.* — Soit X un ensemble fini muni d'une action du groupe fini G. Le module ΛX — parfois aussi noté $\Lambda[X]$ — est par définition le Λ-module libre de base les éléments de X. L'action de G par permutation sur la base s'étend par linéarité en une action (linéaire) de G sur ΛX. Cette représentation de G est appelée *module de permutation.* Chaque orbite de X sous l'action de G fournit par linéarité un sous-module de permutation de ΛX qui en est en fait un facteur direct. On en déduit une décomposition de ΛX selon les orbites sous G, donnée par

$$\Lambda X = \bigoplus_{x \in X/G} \Lambda[G/\mathrm{Stab}_G(x)] = \bigoplus_{x \in X/G} \mathrm{Ind}_{\mathrm{Stab}_G(x)}^G \Lambda.$$

Réciproquement, pour tout sous-groupe H de G on peut former l'ensemble $X = G/H$ dont le module de permutation est la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G \Lambda$. La taille de H, ou plutôt de sa ℓ-partie, influe sur les propriétés de cette représentation : si l'ordre de H est inversible dans Λ alors $\mathrm{Ind}_H^G \Lambda$ est un module projectif. À l'opposé, si H contient un ℓ-sous-groupe de Sylow de G alors le module trivial Λ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_H^G \Lambda$.

Lorsque $\Lambda = \mathcal{O}$ ou k on dira qu'un ΛG-module est un *module de ℓ-permutation* si c'est un facteur direct d'un module de permutation. De l'analyse précédente on déduit que les modules de ℓ-permutation sont aussi les facteurs directs de sommes directes de modules induits $\mathrm{Ind}_Q^G \Lambda$ pour Q variant parmi les ℓ-sous-groupes de G. Selon la terminologie de Green, les modules de ℓ-permutation sont donc exactement les modules de source triviale. On notera $\Lambda G\text{-}\mathsf{perm}$ la sous-catégorie pleine de $\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}$ formée de ces modules. C'est aussi la plus petite sous-catégorie additive de $\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}$ close par facteurs directs qui contient les modules de permutation. Comme dans la section 2, on travaillera plus généralement avec des complexes de modules, et pas seulement avec des représentations. La catégorie intéressante de ce point de vue est la catégorie homotopique $\mathsf{Ho}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{perm})$ des complexes bornés de modules de ℓ-permutation de type fini. Dans cette catégorie, les morphismes se calculent à homotopie près. On verra plus loin que la cohomologie des variétés algébriques fournit de nombreux exemples de tels complexes.

Par définition, tout module de ℓ-permutation indécomposable M est un facteur direct d'une représentation induite $\mathrm{Ind}_Q^G \Lambda$ pour un certain sous-groupe Q de G. On appelle *vortex* de M un sous-groupe Q minimal pour cette propriété [(10)]. Un vortex est toujours un ℓ-sous-groupe de G et il est unique à conjugaison sous G près (voir [Al, §9]).

3.1.2. *Foncteur de Brauer.* — On suppose désormais que $\Lambda = \mathcal{O}$ ou k. Étant donné un sous-groupe quelconque Q de G, on peut considérer le sous-ensemble X^Q des points fixes de X sous l'action de Q. L'action de G sur X se restreint en une action de $N_G(Q)$ sur X^Q et on peut former le $kN_G(Q)$-module de permutation $k[X^Q]$. Le groupe Q agit trivialement sur $k[X^Q]$ et l'on pourra considérer ce module comme un $k[N_G(Q)/Q]$-module de ℓ-permutation. Lorsque Q est un ℓ-sous-groupe de G, le foncteur de Brauer

$$\mathrm{Br}_Q : \Lambda G\text{-}\mathsf{perm} \longrightarrow k[N_G(Q)/Q]\text{-}\mathsf{perm}$$

permet d'étendre cette construction de manière fonctorielle sur les modules de ℓ-permutation. Plus précisément, étant donné un module de ℓ-permutation M, on peut considérer le module des coinvariants de kM sous Q, noté $(kM)_Q = k \otimes_{kQ} M$. C'est

10. Il semblerait que cette terminologie soit peu employée en français, les anglophones utilisant les termes « vertex » et « vertices ».

le plus grand quotient de kM sur lequel Q agit trivialement. On définit alors $\mathrm{Br}_Q(M)$ comme l'image des invariants M^Q dans les coinvariants $(kM)_Q$.

Exemple 3.1. — Considérons à nouveau un ensemble fini X sur lequel G agit. Une base de $(\Lambda X)^Q$ est donnée par la somme des éléments sur chaque Q-orbite de X. Mais si x est un élément de X tel qu'il existe $b \in Q$ vérifiant $b \cdot x \neq x$, alors $x + b \cdot x + \cdots = (1+2b+3b^2+\cdots)(1-b)\cdot x$ a une image nulle dans les coinvariants. Notons que ce calcul nécessite que l'ordre de b soit une puissance de ℓ, la caractéristique de k. On retrouve donc bien $\mathrm{Br}_Q(\Lambda X) = k[X^Q]$.

Soit R et Q deux ℓ-sous-groupes de G. Les points fixes de G/Q sous R sont les classes gQ telles que $R \subset {}^gQ$. On a donc $(G/Q)^R = \emptyset$ dès que R n'est pas conjugué à un sous-groupe de Q, et $(G/Q)^Q = N_G(Q)/Q$. Au niveau des modules de ℓ-permutation, si M est un module indécomposable de vortex Q, alors $\mathrm{Br}_R(M)$ est facteur direct de $\mathrm{Br}_R(\mathrm{Ind}_Q^G\Lambda) = k[(G/Q)^R]$. On en déduit que :

- $\mathrm{Br}_R(M) = 0$ dès que R n'est pas conjugué à un sous-groupe de Q ;
- $\mathrm{Br}_Q(M)$ est un facteur direct de $k[N_G(Q)/Q]$; c'est donc un $k[N_G(Q)/Q]$-module projectif.

3.1.3. *Blocs et défauts.* — On appelle *bloc* de ΛG un facteur direct indécomposable de ΛG vu comme ΛG-module-ΛG. Via l'isomorphisme $Z(\Lambda G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda G}(\Lambda G)$, la projection sur ce facteur indécomposable définit un idempotent central b de ΛG. De plus, b est primitif, c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire de manière non triviale comme somme de deux idempotents centraux orthogonaux. On obtient ainsi une correspondance entre idempotents primitifs de $Z(\Lambda G)$ et blocs de ΛG donnée par $b \longmapsto \Lambda G b$. On fera souvent l'abus de langage d'appeler « bloc » l'idempotent associé.

L'avantage d'une décomposition en blocs $\Lambda G = \Lambda G b_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda G b_r$ est qu'elle induit une décomposition de la catégorie des représentations

$$\Lambda G\text{-}\mathsf{mod} = \Lambda G b_1\text{-}\mathsf{mod} \oplus \cdots \oplus \Lambda G b_r\text{-}\mathsf{mod}.$$

Un module indécomposable M « appartient » à un unique bloc : c'est l'unique idempotent central primitif b_i tel que $b_i M \neq 0$. Si M et N sont dans deux blocs distincts alors $\mathrm{Ext}^\bullet_{\Lambda G}(M,N) = \mathrm{Ext}^\bullet_{\Lambda G}(N,M) = 0$. L'étude des représentations de G à coefficients dans Λ se ramène à l'étude des représentations dans chaque bloc.

Puisque $Z(\mathcal{O}G) = (\mathcal{O}G)^G$ est une algèbre commutative, libre de rang fini sur $\mathcal{O}$, un anneau complet de valuation discrète, les idempotents de $Z(kG)$ se relèvent de manière unique en des idempotents de $Z(\mathcal{O}G)$. De manière équivalente, la décomposition de kG en blocs se relève en la décomposition de $\mathcal{O}G$ en blocs. En revanche, puisque KG est semi-simple déployée, les blocs de KG sont des algèbres de matrices, donc Morita équivalentes à K. Chaque bloc de KG contient alors une seule représentation irréductible ; si χ est le caractère de cette représentation, l'idempotent associé au bloc est

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g.$$

Contrairement aux algèbres de dimension finies quelconques, l'algèbre ΛG et ses blocs disposent d'une structure supplémentaire donnée par les ℓ-sous-groupes de G, ainsi que leur centralisateur et leur normalisateur. On parle souvent de *structure locale* pour désigner ces sous-groupes. Supposons à partir de maintenant que $\Lambda = \mathcal{O}$ ou k. Étant donnés un bloc de ΛG et b l'idempotent associé, un vortex de $\Lambda G b$ en tant que bimodule est toujours conjugué à un sous-groupe diagonal, de la forme

$$\Delta D = \{(d, d^{-1}) \mid d \in D\} \subset G \times G^{\mathrm{op}}.$$

On appelle le sous-groupe D de G un *groupe de défaut* du bloc b. Comme le vortex, le défaut d'un bloc est unique à conjugaison près. De manière équivalente, D est le plus grand ℓ-sous-groupe de G tel que $\mathrm{Br}_{\Delta D}(\Lambda G b) \neq 0$.

Fixons un ℓ-sous-groupe de Sylow P de G. Puisque $\mathrm{Br}_{\Delta P}(\Lambda G) = kC_G(P)$, il existe des blocs de défaut P. C'est le cas du *bloc principal*, contenant la représentation triviale. À l'opposé, un bloc de défaut trivial est un bloc isomorphe à une algèbre de matrices. De manière générale, on peut voir le défaut comme une obstruction à la semi-simplicité d'un bloc : plus le défaut est grand, plus le bloc est compliqué.

Pour terminer cet aperçu rapide de la théorie des blocs et de leurs groupes de défaut il convient d'expliquer l'effet du foncteur de Brauer sur les idempotents. Étant donné un ℓ-sous-groupe Q de G, on peut considérer l'application linéaire $\mathrm{br}_Q : (kG)^Q \longrightarrow kC_G(Q)$ définie sur la base de kG par $\mathrm{br}_Q(g) = g$ si $g \in C_G(Q)$ et $\mathrm{br}_Q(g) = 0$ sinon. C'est un morphisme de $kN_G(Q)$-modules et aussi de k-algèbres. Si b est un bloc, alors $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(\Lambda G b) = kC_G(Q)\mathrm{br}_Q(b)$. Par conséquent, son groupe défaut est un ℓ-sous-groupe D de G maximal pour la propriété $\mathrm{br}_D(b) \neq 0$. On peut montrer qu'alors $\mathrm{br}_D(b)$ est un bloc de $kN_G(D)$, premier résultat de la théorie de Brauer visant à étudier les blocs de kG via les blocs de $kN_G(D)$. La limpidité de l'article d'Alperin–Broué [AB] ravira très certainement le lecteur intéressé par ce sujet.

3.1.4. *Équivalences splendides.* — Rappelons dans un premier temps comment construire des équivalences dérivées entre catégories de représentations de (blocs de) groupes finis. Soit G et L deux groupes finis et b et c deux idempotents de blocs de $\mathcal{O}G$ et $\mathcal{O}L$. On suppose qu'il existe un complexe C de $\mathcal{O}Gb$-modules-$\mathcal{O}Lc$ vérifiant les conditions suivantes.

(D1) C est borné et ses termes sont projectifs de type fini comme $\mathcal{O}Gb$-modules et comme modules-$\mathcal{O}Lc$. Autrement dit, les images de C dans $\mathsf{D}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{mod})$ et $\mathsf{D}^b(\mathcal{O}L\text{-}\mathsf{mod})$ sont des complexes parfaits.

(D2) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{mod})}(C, C[i]) = 0$ pour tout $i \neq 0$.

(D3) L'application naturelle $\mathcal{O}Lc \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{mod})}(C)$ est un isomorphisme.

Le foncteur $C \otimes_{\mathcal{O}L} -$ induit alors une équivalence

$$\mathsf{D}^b(\mathcal{O}Lc\text{-}\mathsf{mod}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b(\mathcal{O}Gb\text{-}\mathsf{mod}).$$

Plus précisément, la conjonction des conditions (D2) et (D3) assure que le complexe $C^\vee \otimes_{\mathcal{O}G} C$, vu comme complexe de $\mathcal{O}L$-modules-$\mathcal{O}L$, est quasi-isomorphe à $\mathcal{O}Lc$. Le fait que l'algèbre $\mathcal{O}Gb$ soit indécomposable permet de montrer, en suivant la preuve de [Ri2, Thm. 2.1], que les mêmes conditions sont satisfaites si on échange les rôles de L et G. Dans le cas où on remplace b et c par des unions de blocs il faut en outre s'assurer que l'équivalence est déjà vérifiée au niveau des caractères ordinaires, c'est-à-dire après extension des scalaires à K.

Supposons maintenant que L est un sous-groupe de G. Pour tout sous-groupe Q de L on notera $\Delta Q = \{(q, q^{-1}) \mid q \in Q\}$ le sous-groupe diagonal de $G \times L^{\mathrm{op}}$. Puisque $C_G(Q) \times C_L(Q)^{\mathrm{op}}$ est un sous-groupe de $N_{G\times L^{\mathrm{op}}}(\Delta Q)$, on peut former, par restriction, un foncteur de Brauer

$$\mathrm{Br}_{\Delta Q} : \mathcal{O}G\text{-}\mathsf{perm}\text{-}\mathcal{O}L \longrightarrow kC_G(Q)\text{-}\mathsf{perm}\text{-}kC_L(Q)$$

pour tout ℓ-sous-groupe Q de L. Supposons qu'il existe un complexe C de $\mathcal{O}Gb$-modules-$\mathcal{O}Lc$ ayant les propriétés suivantes.

(S1) C est un complexe borné de modules de ℓ-permutations dont les facteurs indécomposables ont des vortex inclus dans ΔL.

(S2) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^b(kC_G(Q)\text{-}\mathsf{mod})}(\mathrm{Br}_{\Delta Q}(C), \mathrm{Br}_{\Delta Q}(C)[i]) = 0$ pour tout $i \neq 0$ et tout ℓ-sous-groupe Q de L.

(S3) L'application naturelle $\mathcal{O}Lc \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{mod})}(C)$ est un isomorphisme.

Alors le foncteur $C \otimes_{\mathcal{O}L} -$ induit une équivalence

$$\mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Lc\text{-}\mathsf{perm}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Gb\text{-}\mathsf{perm})$$

appelée *équivalence splendide*(11) [Ri2]. De plus, pour tout ℓ-sous-groupe Q de L, le foncteur $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(C) \otimes_{kC_L(Q)} -$ induit une équivalence dérivée

$$\mathsf{D}^b(kC_L(Q)\mathrm{br}_Q(c)\text{-}\mathsf{mod}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}^b(kC_G(Q)\mathrm{br}_Q(b)\text{-}\mathsf{mod}).$$

On peut donc voir une équivalence splendide comme une famille d'équivalences dérivées locales. Cette fois-ci les conditions (S2) et (S3) assurent que le complexe $C^\vee \otimes_{\mathcal{O}G} C$ est homotope à $\mathcal{O}Lc$ comme complexe de $\mathcal{O}L$-modules-$\mathcal{O}L$. Historiquement, la notion d'équivalence splendide fut introduite par Rickard dans le cas des blocs principaux, puis généralisée par Harris [Ha] dans le cadre que nous exposons ici (L un sous-groupe de G). Pour le cas général nous renvoyons le lecteur aux travaux de Linckelmann [Li], Puig [Pu] et Rouquier [Ro1].

Les équivalences dérivées entre blocs donnent lieu à des *isométries parfaites* au niveau des caractères. Ce sont des bijections (avec signe) satisfaisant certaines propriétés arithmétiques remarquables, définies et étudiées par Broué dans [Br3]. Dans le cas des équivalences splendides, on obtient plus généralement des familles d'isométries — des *isotypies* — vérifiant certaines conditions de compatibilité avec les applications de décomposition généralisées. L'existence de telles isométries est souvent un indice de l'existence d'une équivalence dérivée (voire splendide). Nous verrons plus loin que la

11. Cette terminologie introduite par Rickard provient de « **SPL**it-**END**omorphism two-sided tilting complex of summands of permutation modules **I**nduced from **D**iagonal subgroups ».

décomposition de Jordan en est un exemple frappant, et nous en tirerons les conséquences sur l'étude des blocs des groupes réductifs finis. D'autres exemples (pour la plupart encore à l'état de conjectures) sont donnés par la conjecture du défaut abélien de Broué [Br1, Conj. 3.3] et sa version géométrique pour les groupes réductifs finis [BMa].

3.1.5. *Complexes de cohomologie.* — La difficulté principale pour démontrer l'existence d'une équivalence dérivée ou splendide est d'exhiber un complexe vérifiant les propriétés (D1)–(D3) ou (S1)–(S3). Inspiré par le cas des groupes réductifs finis et suivant une suggestion de Broué, Rickard a étudié dans [Ri1] les propriétés de finitude des complexes de cohomologie des variétés algébriques, ainsi que leur compatibilité avec le foncteur de Brauer. Nous verrons dans la section suivante comment appliquer ses résultats dans le cas des variétés de Deligne–Lusztig.

Afin de ne pas confondre les énoncés généraux de cette section avec le cas particulier des groupes réductifs finis, nous travaillerons temporairement avec un groupe fini H agissant sur une variété quasi-projective $\mathbb{Y}$. Nous supposerons que cette variété est définie sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ et nous considérerons comme au §2 les faisceaux pour la topologie étale. La construction du complexe de cohomologie $R\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ s'obtient en considérant par exemple une résolution flasque du faisceau constant Λ puis en appliquant le foncteur sections globales Γ. À quasi-isomorphisme près, cet objet ne dépend pas de la résolution choisie. Rickard montre que l'on peut définir un invariant plus fin, donné par un complexe borné $G\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ de ΛH-modules de ℓ-permutation, bien défini à équivalence d'homotopie unique près. Une construction similaire est donnée par Rouquier [Ro2], en utilisant une résolution de Godement, tronquée en degré $2\dim\mathbb{Y}$. Cette résolution d'un faisceau $\mathcal{F}$ fait intervenir des termes de la forme $\prod_{y\in\mathbb{Y}}\mathcal{F}_y$, sur lesquels H agit naturellement ; dans le cas du faisceau constant $\mathcal{F}=\Lambda$, les modules de permutation $\Lambda[H/\mathrm{Stab}_H(y)]$ interviennent donc naturellement. En particulier, si les ℓ-éléments de H agissent sans point fixe, alors $G\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ est isomorphe dans $\mathsf{Ho}^b(\Lambda H\text{-}\mathsf{perm})$ à un complexe dont les termes sont projectifs. On retrouve la propriété que $R\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ est parfait dans ce cas. Plus généralement, la condition (S1) du §3.1.4 pourra se vérifier sur $G\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ à partir d'un calcul de points fixes sous H. Une construction similaire permet de définir la version support compact $G\Gamma_c(\mathbb{Y},\Lambda)$.

La construction de Rickard est en partie fonctorielle, et de nombreux résultats nécessaires au calcul de $R\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$ se transmettent à $G\Gamma(\mathbb{Y},\Lambda)$, à la différence importante près que la dualité de Poincaré n'est pas vérifiée au niveau des catégories homotopique (voir [Ro2, Rem. 2.14]). L'avantage de travailler avec un complexe de modules de permutation est que l'on peut lui appliquer la construction de Brauer de la section 3.1.2. On utilisera tout particulièrement le théorème suivant (voir [Ri1, Thm. 4.2]) :

Théorème 3.2 (Rickard). — *On suppose que $\Lambda=\mathcal{O}$ ou k. Soit Q un ℓ-sous-groupe de H. Alors l'inclusion $\mathbb{Y}^Q\hookrightarrow\mathbb{Y}$ induit par restriction un isomorphisme*

$$\mathrm{Br}_Q(G\Gamma_c(\mathbb{Y},\mathcal{O}))\xrightarrow{\sim}G\Gamma_c(\mathbb{Y}^Q,k)$$

dans $\mathsf{Ho}^b(kN_H(Q)\text{-}\mathsf{perm})$.

Idée de preuve. — Supposons pour simplifier que Q est un ℓ-sous-groupe de Sylow de H et qu'il est cyclique, isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$. On définit la sous-variété fermée

$$\mathbb{Y}_\ell = \{y \in \mathbb{Y} \mid \ell \text{ divise l'ordre de } \mathrm{Stab}_H(y)\}.$$

Avec les hypothèses sur Q, on vérifie facilement que $\mathbb{Y}_\ell \simeq H \times_{N_H(Q)} \mathbb{Y}^Q$. Au niveau des complexes de cohomologie cela se traduit par un isomorphisme

$$G\Gamma_c(\mathbb{Y}_\ell, \Lambda) \simeq \mathrm{Ind}_{N_H(Q)}^H G\Gamma_c(\mathbb{Y}^Q, \Lambda) \tag{12}$$

dans $\mathsf{Ho}^b(\Lambda H\text{-}\mathsf{perm})$. Par définition, les ℓ-éléments de H (non triviaux) agissent sans point fixe sur $\mathbb{Y} \smallsetminus \mathbb{Y}_\ell$. Le complexe de cohomologie associé est donc homotope à un complexe dont les termes sont des ΛH-modules projectifs, ce qui implique que son image par le foncteur de Brauer Br_Q est nulle. On en déduit que le morphisme de restriction de $\mathbb{Y}$ à $\mathbb{Y}_\ell$ induit un isomorphisme $\mathrm{Br}_Q(G\Gamma_c(\mathbb{Y}, \Lambda)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_Q(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_\ell, \Lambda))$ et on conclut en remarquant que d'après (12) on a $\mathrm{Br}_Q(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_\ell, \Lambda)) \simeq G\Gamma_c(\mathbb{Y}^Q, k)$ dans $\mathsf{Ho}^b(kN_H(Q)\text{-}\mathsf{perm})$.

Cet argument se généralise à un ℓ-sous-groupe Q quelconque de H en considérant une filtration de $\mathbb{Y}$ selon la taille de la ℓ-partie des stabilisateurs sous H. $\square$

On en déduit facilement le corollaire numérique suivant, généralisant la propriété des actions de ℓ-groupes sur les ensembles finis.

Corollaire 3.3. — *Soit Q un ℓ-groupe agissant sur $\mathbb{Y}$. Les caractéristiques d'Euler de $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{Y}^Q$ sont congrues modulo ℓ.*

Remarque 3.4. — Ce corollaire illustre le pouvoir de la caractéristique positive : si $\mathbb{Y}$ a une caractéristique d'Euler non nulle (par exemple si $\mathbb{Y}$ est un espace affine), alors Q admet forcément des points fixes sur $\mathbb{Y}$. Plus généralement, si $\mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{X}$ est un morphisme (surjectif) Q-équivariant dont les fibres sont des espaces affines, alors $\mathbb{Y}^Q \longrightarrow \mathbb{X}^Q$ est automatiquement surjectif. En effet, la fibre en tout point fixe $x \in \mathbb{X}^Q$ est un espace affine, donc contient à son tour un point fixe.

3.2. Du local au global

Revenons maintenant au cas des groupes réductifs. Lorsque s est un élément semi-simple ℓ-régulier de G^* vérifiant $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$ et $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ un sous-groupe parabolique de complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$, on veut montrer que l'équivalence de Morita induite par $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$, c'est-à-dire par le complexe de cohomologie $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \Lambda)$, est en fait une équivalence splendide.

La construction de Rickard nous donne un complexe de modules de ℓ-permutation $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \Lambda)$ dont il faut vérifier qu'il possède les propriétés (S1)–(S3) données en 3.1.4. Au vu du théorème 3.2, le point clé est donc de calculer les points fixes de la variété de Deligne–Lusztig $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ sous l'action de certains ℓ-groupes.

3.2.1. *Points fixes des variétés de Deligne–Lusztig.* — Fixons donc pour cette section un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ de radical unipotent $\mathbf{U}$ possédant un complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$. On rappelle que la définition de la variété de Deligne–Lusztig $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ est donnée au §1.2.2.

LEMME 3.5. — *Soit R un ℓ-sous-groupe de $G \times L^{\mathrm{op}}$ tel que $(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^R \neq \emptyset$.*

(i) *R est conjugué à un sous-groupe diagonal de $G \times L^{\mathrm{op}}$. Autrement dit, il existe un ℓ-sous-groupe Q de L et $x \in G$ tel que $R = \{({}^x b, b^{-1}) \mid b \in Q\}$.*

(ii) *L'inclusion $C_{\mathbf{G}}(Q) \hookrightarrow \mathbf{G}$, suivie de la translation à gauche par $x \in G$ induit des isomorphismes*

$$\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^{\Delta Q} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^R$$

où $\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)}$ désigne la variété de Deligne–Lusztig associée au sous-groupe parabolique $C_{\mathbf{P}}(Q)$ de $C_{\mathbf{G}}(Q)$ et à sa décomposition de Levi $C_{\mathbf{P}}(Q) = C_{\mathbf{L}}(Q)C_{\mathbf{U}}(Q)$ (12).

Idée de preuve. — Le calcul des points fixes sur $\mathbf{G}$ étant plus simple que sur $\mathbf{G}/\mathbf{U}$, on considère la variété

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{\mathbf{U}} = \{g \in \mathbf{G} \mid g^{-1}F(g) \in F(\mathbf{U})\}.$$

L'application quotient $\mathbf{G} \twoheadrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$ induit un morphisme $\alpha : \widetilde{\mathbb{Y}}_{\mathbf{U}} \twoheadrightarrow \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ dont les fibres sont des espaces affines isomorphes à $\mathbf{U} \cap F(\mathbf{U})$. Grâce à la remarque 3.4 on se ramène donc à un calcul de points fixes sur la variété $\widetilde{\mathbb{Y}}_{\mathbf{U}}$. Une application standard du théorème de Lang–Steinberg permet de déterminer la forme de R. De plus, l'inclusion $C_{\mathbf{G}}(Q) \hookrightarrow \mathbf{G}$ induit clairement un isomorphisme $\widetilde{\mathbb{Y}}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{\mathbb{Y}}_{\mathbf{U}})^{\Delta Q}$ où $\widetilde{\mathbb{Y}}_{C_{\mathbf{U}}(Q)}$ est la variété de Deligne–Lusztig modifiée associée au sous-groupe parabolique $C_{\mathbf{P}}(Q)$ de $C_{\mathbf{G}}(Q)$ et à sa décomposition de Levi $C_{\mathbf{P}}(Q) = C_{\mathbf{L}}(Q)C_{\mathbf{U}}(Q)$, c'est-à-dire définie par

$$\widetilde{\mathbb{Y}}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} = \big\{g \in C_{\mathbf{G}}(Q) \mid g^{-1}F(g) \in F(C_{\mathbf{U}}(Q))\big\}.$$

On déduit alors du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{Y}}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (\widetilde{\mathbb{Y}}_{\mathbf{U}})^{\Delta Q} \arrow[d] \\ \mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} \arrow[r, hook] & (\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^{\Delta Q} \end{tikzcd}$$

que $\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)} \hookrightarrow (\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^{\Delta Q}$ est un isomorphisme. □

On déduit de ce lemme que le complexe $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})$ satisfait la condition (S1) des équivalences splendides donnée au §3.1.4.

COROLLAIRE 3.6. — *Le complexe de cohomologie $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ est isomorphe dans $\mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{perm}\text{-}\mathcal{O}L)$ à un complexe dont les termes ont des facteurs indécomposables de vortex diagonaux dans $G \times L^{\mathrm{op}}$.*

12. Notons que les groupes $C_{\mathbf{P}}(Q)$ et $C_{\mathbf{G}}(Q)$ ne sont pas forcément connexes. La définition des variétés de Deligne–Lusztig donnée au §1.2.2 s'étend néanmoins directement à ce contexte. On trouvera plus de détails dans [DM].

Démonstration. — Soit R un ℓ-sous-groupe de $G \times L^{\mathrm{op}}$ qui n'est pas conjugué à un sous-groupe de ΔL. Alors d'après le lemme précédent on a $(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^R = \emptyset$ et ainsi $\mathrm{Br}_R(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})) \simeq G\Gamma_c((\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^R, k) \simeq 0$.

Soit C un représentant de $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ minimal, c'est-à-dire n'ayant aucun facteur direct homotope à zéro. Supposons par l'absurde qu'il existe un terme C_i de C ainsi qu'un facteur direct indécomposable M de C_i tel que $\mathrm{Br}_R(M) \neq 0$. On supposera aussi que R est maximal pour cette propriété. Autrement dit, si N est un facteur indécomposable d'un terme de C tel que $\mathrm{Br}_R(N) \neq 0$, alors R est un vortex de N. Ainsi $\mathrm{Br}_R(N)$ est soit nul, soit un $k[N_{G\times L^{\mathrm{op}}}(R)/R]$-module projectif. On en déduit que $\mathrm{Br}_R(C)$ est un complexe dont tous les termes sont projectifs ; c'est aussi un complexe acyclique puisque $\mathrm{Br}_R(C) \simeq \mathrm{Br}_R(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})) \simeq G\Gamma_c((\mathbb{Y}_{\mathbf{U}})^R, k) \simeq 0$.

En prenant pour C_i le terme de plus haut degré tel que $\mathrm{Br}_R(C_i) \neq 0$, on dispose donc d'une surjection $\mathrm{Br}_R(C_{i-1}) \twoheadrightarrow \mathrm{Br}_R(M)$ entre modules projectifs. Par [BDR, Lem. A.1], l'application $C_{i-1} \longrightarrow M$ est aussi une surjection scindée, ce qui montre que le complexe $(\cdots 0 \to M \xrightarrow{\sim} M \to 0 \cdots)$ est facteur direct de C et contredit la minimalité de C. ☐

3.2.2. *Compatibilité avec les séries.* — Le théorème 3.2, combiné avec le calcul de points fixes donné au lemme 3.5, montre que pour tout ℓ-sous-groupe Q de L on a

$$\mathrm{Br}_{\Delta Q}(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})) \simeq G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)}, k)$$

dans $\mathsf{Ho}^b(kC_G(Q)\text{-}\mathsf{perm}\text{-}kC_L(Q))$. D'autre part, la décomposition de Jordan fait intervenir un facteur direct du complexe de cohomologie $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})$ associé à une classe semi-simple ℓ-régulière (s) de L^*. Autrement dit, pour vérifier la condition (S2) donnée au §3.1.4 il faut calculer

$$\mathrm{Br}_{\Delta Q}\big(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})e_{(s)}\big) \simeq G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)}, k)\mathrm{br}_Q(e_{(s)}).$$

Ce problème peut se résoudre en comparant les séries rationnelles de L et de $C_L(Q)$.

La difficulté technique principale à laquelle il faut faire face vient du fait que même si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}$ sont des groupes connexes, les centralisateurs $C_{\mathbf{G}}(Q)$ et $C_{\mathbf{L}}(Q)$ ne le sont pas forcément. Il convient donc de travailler avec des généralisations de tores, de sous-groupes de Borel, de sous-groupes de Levi, de sous-groupes paraboliques et d'éléments semi-simples au cadre des groupes non connexes. Le lecteur intéressé par le cas général trouvera un grand intérêt à la lecture des travaux de Digne–Michel sur ce sujet [DM].

Afin de ne pas surcharger les constructions exposées dans ce texte, nous détaillerons uniquement le cas où les centralisateurs de ℓ-sous-groupes sont des sous-groupes de Levi. C'est le cas par exemple dès que ℓ est bon pour $\mathbf{G}$ et qu'il ne divise pas l'ordre du groupe fini $Z(\mathbf{G}^*)/Z(\mathbf{G}^*)^\circ$ [13]. On notera $\mathbf{G}_Q = C_{\mathbf{G}}(Q)$ et on choisira un sous-groupe de Levi $(\mathbf{G}_Q)^*$ de $\mathbf{G}^*$ dual de $\mathbf{G}_Q$. Puisque $\mathbf{G}_Q$ est de même rang que $\mathbf{G}$, une paire $(\mathbf{T}, \theta)$

13. Cela donne des conditions assez faibles sur ℓ, qui sont par exemple vérifiées dès que ℓ est plus grand que le nombre de Coxeter de $\mathbf{G}$. Dans ce cas un ℓ-sous-groupe Q de G est toujours inclus dans un tore F-stable $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ tel que $C_{\mathbf{G}}(Q) = C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.

formée d'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}_Q$ et d'un caractère irréductible de T peut être vue dans une série rationnelle de $\mathbf{G}_Q$ ou de $\mathbf{G}$. De même, les classes semi-simples de $(G_Q)^*$ donnent lieu à des classes semi-simples de G^*. On en déduit que deux paires $(\mathbf{T},\theta)$ et $(\mathbf{T}',\theta')$ sont rationnellement conjuguées dans $\mathbf{G}$ dès qu'elles le sont dans $\mathbf{G}_Q$. Enfin, étant donnés un sous-groupe de Levi F-stable $\mathbf{L}^*$ de $\mathbf{G}^*$ et $s \in (G_Q)^*$ tel que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$ alors $C_{(\mathbf{G}_Q)^*}(s) \subset (\mathbf{G}_Q)^* \cap \mathbf{L}^*$, lequel groupe est un sous-groupe de Levi F-stable de $(\mathbf{G}_Q)^*$.

Plus généralement, pour un centralisateur $C_{\mathbf{G}}(Q)$ quelconque, Bonnafé–Dat–Rouquier associent à une paire $(\mathbf{T},\theta)$ formée d'un tore maximal F-stable de $C_{\mathbf{G}}(Q)$ et d'un ℓ'-caractère irréductible θ de T :

– un tore maximal $\mathbf{T}^+$ de $\mathbf{G}$ tel que $\mathbf{T} \subset \mathbf{T}^+$,

– un ℓ'-caractère irréductible θ^+ de T^+ tel que $(\theta^+)_{|T} = \theta$,

construits de telle sorte que $(\mathbf{T},\theta) \sim_{C_{\mathbf{G}}(Q)} (\mathbf{T}',\theta')$ entraîne $(\mathbf{T}^+,\theta^+) \sim_{\mathbf{G}} ((\mathbf{T}')^+,(\theta')^+)$ (voir [BDR, §4]). Autrement dit l'application $(\mathbf{T},\theta) \longmapsto (\mathbf{T}^+,\theta^+)$ est compatible avec la conjugaison rationnelle. Dans le cas simplifié où $C_{\mathbf{G}}(Q)$ est un sous-groupe de Levi, on a bien sûr $\mathbf{T}^+ = \mathbf{T}$ et $\theta^+ = \theta$. Si cette construction donnée dans [BDR] est inductive, et dépend donc d'une filtration de Q, l'application induite sur les séries rationnelles ne dépend que de Q. On la notera simplement i_Q.

Le résultat de compatibilité des séries s'énonce alors en la proposition suivante, démontrée par Broué–Michel dans le cas où $C_{\mathbf{G}}(Q)$ est un sous-groupe de Levi [BMi] et étendue au cas général par Bonnafé–Dat–Rouquier (voir [BDR, Thm. 4.14]).

Proposition 3.7. — *Soit s un élément semi-simple ℓ-régulier de G^*. Si Q est un ℓ-sous-groupe de G, alors*

$$\mathrm{br}_Q(e_{(s)}^G) = \sum_{(t)\in i_Q^{-1}((s))} e_{(t)}^{C_G(Q)}.$$

Afin de rester cohérent avec les notations des précédentes sections, nous avons désigné dans cet énoncé les séries rationnelles de $C_G(Q)$ par des éléments semi-simples du groupe dual, même lorsque celui n'a pas vraiment de sens. Néanmoins, dans le cas simplifié où $C_{\mathbf{G}}(Q) = \mathbf{G}_Q$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, alors $(t) \in i_Q^{-1}((s))$ si et seulement si t est un élément de $(G_Q)^*$ conjugué à s sous G^*.

3.2.3. *Décomposition de Jordan splendide.* — Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour montrer que la décomposition de Jordan est une équivalence splendide.

Théorème 3.8 (Bonnafé–Dat–Rouquier). — *Soit $s \in G^*$ un élément semi-simple ℓ-régulier de G^*. On suppose que $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subset \mathbf{L}^*$. Alors pour tout sous-groupe parabolique $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ de complément de Levi F-stable $\mathbf{L}$, le foncteur $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L \otimes -$ induit une équivalence splendide*

$$\mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Le_{(s)}^L\text{-}\mathsf{perm}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Ge_{(s)}^G\text{-}\mathsf{perm}).$$

Idée de preuve. — Il s'agit de démontrer que le complexe $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L$ vérifie les propriétés (S1)–(S3) requises pour induire une équivalence splendide.

Le corollaire 3.6 permet d'obtenir (S1). D'autre part, les travaux de Bonnafé–Rouquier exposés au §2 entraînent que $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L$ est quasi-isomorphe à un module M concentré en un seul degré, induisant une équivalence de Morita entre $\mathcal{O}Le_{(s)}^L$ et $\mathcal{O}Ge_{(s)}^G$. Par conséquent,

$$\mathcal{O}Le_{(s)}^L \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(M) \simeq \mathrm{End}_{\mathsf{D}^b(\mathcal{O}G\text{-}\mathsf{mod})}(R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L)$$

d'où on déduit (S3).

Vérifions (S2) pour tout ℓ-sous-groupe diagonal ΔQ de $G\times L^{\mathrm{op}}$. En combinant le théorème 3.2, le calcul de points fixes donné au lemme 3.5 ainsi que la proposition 3.7, on trouve

$$\mathrm{Br}_{\Delta Q}\big(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L\big) \simeq G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)},k)\mathrm{br}_Q(e_{(s)}^L) \simeq \bigoplus_{(t)\in i_Q^{-1}((s))} G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)},k)e_{(t)}^{C_L(Q)}.$$

Posons $C_{(t)} = R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{C_{\mathbf{U}}(Q)},k)e_{(t)}^{C_L(Q)}$ de sorte que l'on peut écrire

$$\mathrm{Br}_{\Delta Q}\big(G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\mathcal{O})e_{(s)}^L\big) \simeq \bigoplus_{(t)\in i_Q^{-1}((s))} C_{(t)} \tag{13}$$

dans $\mathsf{D}^b(kC_G(Q)\text{-}\mathsf{mod})$. Supposons pour simplifier que $C_{\mathbf{G}}(Q)=\mathbf{G}_Q$ et $C_{\mathbf{L}}(Q)=\mathbf{L}_Q$ sont des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}$ respectivement. Alors un élément t apparaissant dans la somme précédente est un élément semi-simple de $(L_Q)^*$ conjugué à s sous L^*. Puisque $C_{\mathbf{G}^*}(t)\subset \mathbf{L}^*$ on a donc $C_{(\mathbf{G}_Q)^*}(t)\subset(\mathbf{L}_Q)^*$. Cette condition assure alors que le complexe $C_{(t)}$ est quasi-isomorphe à un module concentré en un degré, induisant une équivalence de Morita entre $kC_L(Q)e_{(t)}^{C_L(Q)}$ et $kC_G(Q)e_{(t)}^{C_G(Q)}$. En particulier, le groupe

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}^b(kG_Q\text{-}\mathsf{mod})}\big(C_{(t)},C_{(t')}[i]\big)$$

est non nul seulement si $(t)=(t')$ et $i=0$. Cette propriété se généralise au cas où les centralisateurs de Q sont quelconques, ce qui termine la vérification de (S2) grâce à la décomposition (13). □

L'équivalence de Morita entre les algèbres $\Lambda Le_{(s)}^L$ et $\Lambda Ge_{(s)}^G$ induit un isomorphisme entre le centre de $\Lambda Le_{(s)}^L$ et celui de $\Lambda Ge_{(s)}^G$, et donc une bijection entre les blocs de ces deux algèbres. La propriété d'être en outre une équivalence splendide donne l'invariance de la structure locale de ces blocs grâce à [Pu, §19].

Corollaire 3.9. — *Si $C_{\mathbf{G}^*}(s)\subset\mathbf{L}^*$, la bijection entre blocs induite par $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ préserve leurs groupes de défauts.*

4. GÉNÉRALISATION

Nous discutons dans cette partie d'une généralisation de la décomposition de Jordan au cas où les centralisateurs d'éléments semi-simples de $\mathbf{G}^*$ ne sont pas forcément connexes (c'est le cas dès que le centre $Z(\mathbf{G})$ de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe, par exemple pour $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$ ou Sp_{2n}). Un ingrédient essentiel de la démonstration de la décomposition dans ce cas est un résultat d'indépendance de l'induction de Deligne–Lusztig par rapport au sous-groupe parabolique considéré (14) ; nous avons pris le parti de détailler les arguments géométriques en lien avec ce résultat (voir §4.2). Une fois de plus, un retour aux sources (*i.e.* à l'article originel de Deligne–Lusztig [DL]) sera très instructif.

4.1. Isolé *vs* quasi-isolé

Nous avons observé à l'exemple 1.3 que tous les centralisateurs d'éléments semi-simples de $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ sont des sous-groupes de Levi. Lorsqu'on se restreint à G ou G^*, un tel centralisateur est F-stable et son groupe des points rationnels est isomorphe à un produit de groupes linéaires finis (par rapport à des extensions de $\mathbb{F}_q$). Par conséquent, on déduit du corollaire 3.9 que tout bloc de $\mathcal{O}G$-mod est isomorphe à un produit de blocs unipotents de groupes linéaires finis. C'est la situation idéale pour réduire un problème aux blocs unipotents.

Lorsque $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ on aimerait pouvoir disposer d'une telle réduction. Malheureusement, puisque dans ce cas le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe, il existe des éléments semi-simples de $\mathbf{G}^* \simeq \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ dont le centralisateur n'est pas un sous-groupe de Levi. On peut même construire des exemples extrêmes : si ζ est une racine primitive n-ième de l'unité et $s \in \mathbf{G}^*$ est l'image de la matrice $\mathrm{diag}(1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1})$, alors $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$ est un tore, formé des matrices diagonales, bien que $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ ne soit contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de $\mathbf{G}^*$.

Dans le cas d'un groupe $\mathbf{G}$ général, on dira qu'un élément semi-simple $s \in \mathbf{G}$ est *quasi-isolé* (resp. *isolé*) si $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ (resp. $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$) n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de $\mathbf{G}^*$. Ces attributs se transfèrent naturellement aux séries rationnelles, aux séries modulaires, ainsi qu'aux blocs : on dira par exemple qu'un bloc b de $\mathcal{O}G$ est un *bloc isolé* s'il apparaît dans une série modulaire isolée c'est-à-dire si l'unique classe semi-simple ℓ-régulière (s) de G^* telle que $be_{(s)} = b$ est la classe d'un élément isolé de G^*. On parlera de même de *bloc quasi-isolé* lorsque s est quasi-isolé. Un bloc isolé est toujours quasi-isolé, mais la réciproque est fausse en général dès que le centre de $\mathbf{G}$ n'est pas connexe. Avec cette terminologie, le corollaire 3.9 montre donc que tout bloc de $\mathcal{O}G$ est Morita équivalent à un bloc quasi-isolé d'un sous-groupe de Levi L de G. L'étude des blocs d'un groupe réductif fini se réduit donc aux cas des blocs quasi-isolés. Le théorème suivant (voir [BDR, Thm. 7.7]) donne une réduction supplémentaire au cas

14. Ce travail a été le détonateur de l'article [BDR], dont plusieurs résultats avaient déjà été annoncés en 2003 dans [BR1].

isolé, quitte à considérer certaines extensions des sous-groupes de Levi visant à prendre en compte le rôle du groupe fini $C_{\mathbf{G}^*}(s)/C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$.

THÉORÈME 4.1 (Bonnafé–Dat–Rouquier). — *Soit s un élément semi-simple ℓ-régulier de G^* et $\mathbf{L}^*$ le plus petit sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}^*$ contenant $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$. Posons $N = N_G(\mathbf{L}, e_{(s)})$. Si N/L est cyclique*[15]*, alors l'action de L sur $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})e_{(s)}$ s'étend en une action de N donnant lieu aux équivalences suivantes :*

SPLENDIDE — *le foncteur $G\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})e_{(s)} \otimes_{\mathcal{O}N} -$ induit une équivalence splendide*

$$\mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Ne_{(s)}^L\text{-}\mathsf{perm}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Ho}^b(\mathcal{O}Ge_{(s)}^G\text{-}\mathsf{perm}),$$

MORITA — *le foncteur $H_c^{\dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}}(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})e_{(s)} \otimes_{\mathcal{O}N} -$ induit une équivalence de Morita*

$$\mathcal{O}Ne_{(s)}^L\text{-}\mathsf{mod} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}Ge_{(s)}^G\text{-}\mathsf{mod}.$$

La bijection entre blocs induite par cette équivalence préserve la structure locale, donc en particulier les groupes de défaut.

La difficulté dans la démonstration de ce théorème est que contrairement à L, le groupe fini N n'a pas de raison d'agir sur la variété $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$. En effet, un élément $n \in N_G(\mathbf{L})$ ne normalise pas $\mathbf{U}$ en général, et ainsi son action fait intervenir une autre variété de Deligne–Lusztig, associée au groupe parabolique ${}^n\mathbf{P}$. L'idée de Bonnafé–Dat–Rouquier est de montrer que lorsque l'on se restreint à la série modulaire associée à s, les variétés $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{Y}_{{}^n\mathbf{U}}$ ont la même cohomologie. Plus précisément, il est donné au corollaire 4.5 des conditions sur les sous-groupes paraboliques $\mathbf{P} = \mathbf{LU}$ et $\mathbf{Q} = \mathbf{LV}$ pour que les complexes $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \Lambda)e_{(s)}$ et $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{V}}, \Lambda)e_{(s)}$ soient quasi-isomorphes à un décalage près. On en déduit alors que l'action de N normalise le bimodule

$$M = H_c^{\dim \mathbb{Y}_{\mathbf{U}}}(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}, \mathcal{O})e_{(s)}.$$

Dans le cas où N/L est cyclique, on en déduit que l'on peut étendre l'action de L en une action de N sur M.

4.2. Indépendance du parabolique

Comme promis, nous détaillons dans cette section un résultat auxiliaire (voir le corollaire 4.5), mais crucial dans la preuve du théorème 4.1.

15. Le théorème [BDR, Thm. 7.7] est énoncé sans cette hypothèse supplémentaire, mais l'argument de la démonstration est incomplet. Néanmoins, dans le cas où $\mathbf{G}$ est simple, N/L est toujours cyclique sauf si $(\mathbf{G}, F)$ est de type D_{2n}. Il existe alors une unique classe de $\mathbf{G}^*$-conjugaison (s) telle que N/L ne soit pas cyclique (il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

4.2.1. *Indépendance pour les caractères de Deligne–Lusztig.* — Lors de la définition des caractères de Deligne–Lusztig $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ à partir de la cohomologie des variétés $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ (voir (1)) nous avons éludé le problème de l'indépendance vis-à-vis du sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ contenant $\mathbf{T}$. C'est un des premiers résultats de l'article [DL] de Deligne–Lusztig, dont la preuve va motiver les constructions des sections suivantes.

Comme au §2.3.1, il sera commode d'utiliser la description des variétés $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{X}_{\mathbf{B}}$ à l'aide des éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Nous fixons donc pour cette sous-section et la suivante une paire $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ formée d'un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$, contenu dans un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$, lui aussi supposé F-stable. Étant donné une réflexion simple s de W et un élément quelconque w de W, nous allons comparer les variétés $\mathbb{X}(s,s,w)$, $\mathbb{X}(s,w)$ et $\mathbb{X}(w)$. D'après la décomposition de Bruhat, le produit $\mathbf{B}s\mathbf{B}s\mathbf{B}$ se décompose en les doubles classes $\mathbf{B} \sqcup \mathbf{B}s\mathbf{B}$; on peut donc former le morphisme de multiplication

$$\phi : \mathbf{B}s\mathbf{B} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{B}s\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}s\mathbf{B} \sqcup \mathbf{B}.$$

Au-dessus de $\mathbf{B}$, le morphisme ϕ est un fibré en droites : si on note α la racine simple associée à s et $u_\alpha : \overline{\mathbb{F}}_q \hookrightarrow \mathbf{U}$ le sous-groupe à un paramètre correspondant, la fibre en un élément $b \in \mathbf{B}$ s'écrit $\phi^{-1}(b) = \{[bu_\alpha(x)s : su_\alpha(-x)] \mid x \in \overline{\mathbb{F}}_q\}$. En revanche, au-dessus de $\mathbf{B}s\mathbf{B}$, la fibre est isomorphe à $\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$ car $su_\alpha(x)s \in \mathbf{B}s\mathbf{B}$ si et seulement si $x \neq 0$. Par changement de base, on en déduit l'existence d'un morphisme

$$\psi : \mathbb{X}(s,s,w) \twoheadrightarrow \mathbb{X}(\underline{s}, w) = \mathbb{X}(s,w) \sqcup \mathbb{X}(w)$$

tel que :

– au-dessus du fermé $\mathbb{X}(w)$, le morphisme ψ induit un fibré en droites de sorte que

$$H_c^i\big(\psi^{-1}(\mathbb{X}(w)), K\big) \simeq H_c^{i-2}(\mathbb{X}(w), K),$$

– au-dessus de l'ouvert $\mathbb{X}(s,w)$, le morphisme ψ est un fibré en droites auquel on a retiré les sections nulles, si bien que

$$\begin{aligned} H_c^i\big(\psi^{-1}(\mathbb{X}(s,w)), K\big) &\simeq H_c^i\big(\mathbb{X}(s,w) \times \overline{\mathbb{F}}_q^{\times}, K\big) \\ &\simeq H_c^{i-1}(\mathbb{X}(s,w), K) \oplus H_c^{i-2}(\mathbb{X}(s,w), K). \end{aligned}$$

Par conséquent, la caractéristique d'Euler de la variété $\mathbb{X}(s,s,w)$ est égale à celle de $\mathbb{X}(w)$. Les morphismes précédents étant de plus équivariants pour l'action de G, on en déduit que les caractères virtuels associés à ces variétés coïncident. En effectuant des permutations circulaires, cela implique que le caractère virtuel associé à la cohomologie de $\mathbb{X}(w)$ ne dépend que de la classe de F-conjugaison de w dans W ; en d'autres termes, le caractère $R_{\mathbf{T}' \subset \mathbf{B}'}^{\mathbf{G}}(1)$ ne dépend que du tore $\mathbf{T}'$ et pas du sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$.

4.2.2. *Le cas des tores.* — Les variétés $\mathbb{X}(s,s,w)$ et $\mathbb{X}(w)$ n'ayant pas la même dimension, il est exclu d'espérer que leurs complexes de cohomologie soient quasi-isomorphes, bien que leurs caractères coïncident. Autrement dit, le complexe $\mathcal{R}_{\mathbf{T}' \subset \mathbf{B}'}^{\mathbf{G}}(\Lambda)$ (voir §2.1 pour la définition) dépend fortement du choix de $\mathbf{B}'$, même lorsque $\Lambda = K$. Nous allons montrer que c'est néanmoins le cas à un décalage près lorsque l'on travaille avec certains système locaux non triviaux à la place de Λ.

Comme au §2, les systèmes locaux considérés sur $\mathbb{X}(w)$ proviennent du $\mathbf{T}^{wF}$-torseur $\mathbb{Y}(\dot{w}) \twoheadrightarrow \mathbb{X}(w)$, où $\dot{w}$ est un représentant de w dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. Nous travaillerons ici exclusivement avec des systèmes locaux associés à des représentations projectives de $\mathbf{T}^{wF}$. De manière équivalente, nous nous concentrerons sur les complexes

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)e_\theta$$

où e_θ est l'idempotent associé au §1.3.2 au caractère $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$.

Fixons une réflexion simple s de W. Un calcul dans les groupes de rang 1 (SL_2 ou PGL_2) montre qu'elle se relève dans $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ en l'élément $\dot{s} = u_\alpha(1)u_{-\alpha}(-1)u_\alpha(1)$. En relevant les constructions de la section précédente de $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ à $\mathbf{G}/\mathbf{U}$ on obtient une décomposition $\mathbb{Y}(\dot{s}, \dot{s}^{-1}, \dot{w}) = \mathbb{Y}_{\mathrm{o}} \sqcup \mathbb{Y}_{\mathrm{f}}$ selon le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Y}_{\mathrm{o}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{Y}(\dot{s}, \dot{s}^{-1}, \dot{w}) \arrow[d, "\mathbf{T}^{wF}"] & \mathbb{Y}_{\mathrm{f}} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\psi^{-1}(\mathbb{X}(s,w)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{X}(s, s, \dot{w}) \arrow[d, "\psi"] & \psi^{-1}(\mathbb{X}(w)) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\mathbb{X}(s,w) \arrow[r, hook] & \mathbb{X}(\underline{s}, \dot{w}) & \mathbb{X}(w) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Rappelons que le morphisme ψ induit un fibré en droites au-dessus de $\mathbb{X}(w)$. Il se relève au niveau du fermé $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}$ en un morphisme $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}} \twoheadrightarrow \mathbb{X}(w)$ qui se factorise par le revêtement $\mathbb{Y}(\dot{w}) \twoheadrightarrow \mathbb{X}(w)$ pour donner un fibré en droites $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}} \twoheadrightarrow \mathbb{Y}(\dot{w})$ équivariant pour les actions de G à gauche et de $\mathbf{T}^{wF}$ à droite. On peut résumer ces propriétés à l'aide du carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Y}_{\mathrm{f}} \arrow[r, dashed, two heads, "\mathbb{A}_1"] \arrow[d, "\mathbf{T}^{wF}"] & \mathbb{Y}(\dot{w}) \arrow[d, "\mathbf{T}^{wF}"] \\
\psi^{-1}(\mathbb{X}(w)) \arrow[r, two heads, "\mathbb{A}_1"] & \mathbb{X}(w)
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, on obtient un isomorphisme

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}, \Lambda) \simeq R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}), \Lambda)[-2] \tag{14}$$

dans $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$.

La description de l'ouvert $\mathbb{Y}_{\mathrm{o}}$ est moins élémentaire car le morphisme $\mathbb{Y}_{\mathrm{o}} \twoheadrightarrow \mathbb{X}(s,w)$ ne se factorise pas par $\mathbb{Y}(\dot{s}, \dot{w}) \twoheadrightarrow \mathbb{X}(s,w)$ mais seulement par un revêtement intermédiaire faisant intervenir comme au §2.3.4 un quotient commun des tores $\mathbf{T}^{wF}$ et $\mathbf{T}^{swF}$ par certains groupes H et H' définis plus bas. On aura en tête le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w}) \arrow[d] \\
\mathbb{Y}_{\mathrm{o}} \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, "\mathbf{T}^{wF}/H"] & \mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w})/H' \arrow[d, "\mathbf{T}^{swF}/H'"] \\
\psi^{-1}(\mathbb{X}(s,w)) \arrow[r, two heads] & \mathbb{X}(s,w)
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ induit une surjection $\psi^{-1}(\mathbb{X}(s,w)) \twoheadrightarrow \mathbb{X}(s,w)$ dont les fibres sont isomorphes au tore $\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$. Ce morphisme ne se trivialise pas en la projection $\mathbb{X}(s,w)\times\overline{\mathbb{F}}_q^{\times} \twoheadrightarrow \mathbb{X}(s,w)$ même si la cohomologie (à coefficients dans K) de $\psi^{-1}(\mathbb{X}(s,w))$ coïncide avec celle de $\mathbb{X}(s,w) \times \overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$. En revanche, le lemme 4.2 montre que c'est le cas au niveau de la variété $\mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w})$ quitte à considérer un revêtement fini $\mathbf{S}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$ (voir [BDR, §5.D]).

Lemme 4.2. — *Il existe*

(a) *un groupe algébrique commutatif* $\mathbf{S}$ *étendant l'action de* $\mathbf{T}^{wF}$ *sur* $\mathbb{Y}_{\mathrm{o}}$ *; et*

(b) *un plongement fermé* $\mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w}) \hookrightarrow \mathbb{Y}_{\mathrm{o}}$,

qui induisent un isomorphisme

$$\mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w}) \times_{\mathbf{T}^{swF}} \mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Y}_{\mathrm{o}}.$$

Le groupe $\mathbf{S}$ est non connexe, mais sa composante connexe $\mathbf{S}^\circ \simeq \overline{\mathbb{F}}_q^{\times}$ est un tore de rang 1 tel que

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{swF} \times_{H'} \mathbf{S}^\circ = \mathbf{S}^\circ \times_H \mathbf{T}^{wF}$$

avec $H = N_{\mathbf{T}^{wF}}(\mathbf{S}^\circ) = \mathbf{T}^{wF} \cap \mathbf{S}^\circ$ et $H' = N_{\mathbf{T}^{swF}}(\mathbf{S}^\circ)$. On retrouve l'isomorphisme $\mathbf{T}^{wF}/H \simeq \mathbf{T}^{swF}/H'$ mentionné plus haut. Il est important de noter aussi que la construction de $\mathbf{S}$ ainsi que des sous-groupes H et H' par Bonnafé–Dat–Rouquier est explicite, et permet d'en déduire quels systèmes locaux apparaissent sur $\mathbf{S}^\circ$ à partir de ceux sur $\mathbb{X}(s,s,w)$. Le lemme 4.2 se traduit au niveau des complexes de cohomologie par l'isomorphisme

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathrm{o}},\Lambda) \simeq R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{s},\dot{w}),\Lambda) \otimes_{\Lambda\mathbf{T}^{swF}} R\Gamma_c(\mathbf{S},\Lambda) \tag{15}$$

dans $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$.

Par définition, le groupe fini H est contenu dans la composante connexe de $\mathbf{S}$. En particulier, l'action de H s'étend en l'action du groupe connexe $\mathbf{S}^\circ$ sur $\mathbf{S}$, et par conséquent induit une action triviale sur la cohomologie. De cette observation et des isomorphismes (14) et (15) on déduit le corollaire suivant (voir [BDR, Thm. 5.16]).

Corollaire 4.3. — *Soit* $\theta : \mathbf{T}^{wF} \longrightarrow \Lambda^\times$ *un caractère irréductible de* $\mathbf{T}^{wF}$*. Avec les notations précédentes, supposons que* $\theta_{|H} \neq 1$*. Alors*

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{s},\dot{s}^{-1},\dot{w}),\Lambda)e_\theta \simeq R\Gamma_c(\mathbb{Y}(\dot{w}),\Lambda)e_\theta[-2]$$

dans $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda\mathbf{T}^{wF})$.

Des applications successives de ce corollaire combinées à des permutations circulaires permettent alors de passer d'une variété $\mathbb{Y}(\dot{w})$ à $\mathbb{Y}(\dot{v})$ pour w et v dans la même classe de F-conjugaison de W, à condition que θ remplisse certains critères de régularité.

4.2.3. *Extension au cas parabolique.* — Revenons maintenant au problème initial, à savoir la comparaison des foncteurs $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{Q}}^{\mathbf{G}}$. On cherche à montrer qu'à un décalage près, ces foncteurs sont isomorphes lorsqu'on les restreint à une série $\mathcal{E}_\ell(L,(s))$ satisfaisant certains critères vis-à-vis de $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$. En notant $\mathbf{U}$ (resp. $\mathbf{V}$) le radical unipotent de $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{Q}$) cela revient donc à comparer les complexes $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\Lambda)e_{(s)}$ et $R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{V}},\Lambda)e_{(s)}$. Pour faire le lien entre les variétés de Deligne–Lusztig $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ et $\mathbb{Y}_{\mathbf{V}}$ on considère une variété intermédiaire définie par

$$\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}} = \big\{(g,h)\in\mathbf{G}^2 \,\big|\, g^{-1}h\in\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} \text{ et } h^{-1}F(g)\in\mathbf{V}\cdot F(\mathbf{U})\big\}/\mathbf{U}\times\mathbf{V}.$$

Cette définition est entièrement similaire aux généralisations des variétés $\mathbb{Y}(n)$ à des suites d'éléments $\mathbf{n}$ de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ étudiées au §2.3.1. Comme à la section précédente, on peut considérer la sous-variété fermée

$$\mathbb{Y}_{\mathrm{f}} = \{(g,h)\in\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}} \mid g^{-1}F(g)\in\mathbf{U}\cdot F(\mathbf{U})\}.$$

La première projection induit un morphisme surjectif $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}\twoheadrightarrow\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ dont les fibres sont des espaces affines de dimension $d_{\mathbf{U},\mathbf{V}} = \dim(\mathbf{U}\cap F(\mathbf{U}))-\dim(\mathbf{U}\cap F(\mathbf{U})\cap\mathbf{V})$. À un décalage de $2d_{\mathbf{U},\mathbf{V}}$ près, les complexes de cohomologie à support compact de $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}$ et $\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}$ sont donc égaux. C'est la version parabolique de l'isomorphisme (14). Le théorème suivant (voir [BDR, Thm. 6.2]) donne une condition pour que la cohomologie du complémentaire ouvert de $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}$, coupé par la série de (s), soit acyclique. C'est la version parabolique du corollaire 4.3.

Théorème 4.4 (Bonnafé–Dat–Rouquier). — *Supposons que $C_{\mathbf{U}^*\cap F(\mathbf{U}^*)}(s)\subset C_{\mathbf{V}^*}(s)$. Alors l'inclusion $\mathbb{Y}_{\mathrm{f}}\hookrightarrow\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}}$ induit un isomorphisme*

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}},\Lambda)e_{(s)} \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\Lambda)e_{(s)}[-2d_{\mathbf{U},\mathbf{V}}]$$

dans $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda L)$.

Idée de preuve. — La preuve suit la même stratégie que la preuve du théorème 2.6. Le cône du morphisme que l'on cherche à étudier est donné par le complexe

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}}\smallsetminus\mathbb{Y}_{\mathrm{f}},\Lambda)e_{(s)}$$

dont on veut montrer qu'il est acyclique. On commence par utiliser le théorème d'engendrement de la catégorie des complexes parfaits (corollaire 2.5) ainsi que la transitivité de l'induction de Deligne–Lusztig pour se ramener au cas des tores. Il faut alors exprimer la condition $C_{\mathbf{U}^*\cap F(\mathbf{U}^*)}(s)\subset C_{\mathbf{V}^*}(s)$ sur les paires $(\mathbf{T},\theta)$ afin de montrer que l'on se trouve dans les conditions d'application du corollaire 4.3. □

L'application $(g,h)\longmapsto(h,F(g))$ induit un morphisme de variétés $\mathbb{Y}_{\mathbf{U},\mathbf{V}}\longrightarrow\mathbb{Y}_{\mathbf{V},F(\mathbf{U})}$ qui est un isomorphisme au niveau des complexes de cohomologie. En appliquant le théorème 4.4 aux couples $(\mathbf{U},\mathbf{V})$ et $(\mathbf{V},F(\mathbf{U}))$ on en déduit le résultat annoncé (voir [BDR, Cor. 6.5]).

Corollaire 4.5. — *Si $C_{\mathbf{U}^*\cap F(\mathbf{U}^*)}(s)\subset C_{\mathbf{V}^*}(s)$ et $C_{\mathbf{V}^*\cap F(\mathbf{V}^*)}(s)\subset C_{F(\mathbf{U}^*)}(s)$, alors*

$$R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\Lambda)e_{(s)}\simeq R\Gamma_c(\mathbb{Y}_{\mathbf{V}},\Lambda)e_{(s)}[\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{V}}-\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}]$$

dans $\mathsf{D}^b(\Lambda G\text{-}\mathsf{mod}\text{-}\Lambda L)$. Par conséquent, les foncteurs

$$\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}[\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}]\ :\mathsf{D}^b(\Lambda Le^L_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})\longrightarrow\mathsf{D}^b(\Lambda Ge^G_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})$$

et

$$\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{Q}}[\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{V}}]\ :\mathsf{D}^b(\Lambda Le^L_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})\longrightarrow\mathsf{D}^b(\Lambda Ge^G_{(s)}\text{-}\mathsf{mod})$$

sont isomorphes.

Remarque 4.6. — Une des difficultés de la preuve du théorème 4.4 réside dans le fait de trouver le bon énoncé. Nous avons appris des auteurs de [BDR] que leurs premiers calculs dans GL_4 et GL_6 faisaient apparaître l'hypothèse plus forte (mais plus simple à formuler) $C_{\mathbf{U}^*}(s)=C_{\mathbf{V}^*}(s)$. Dans le cas particulier de la décomposition de Jordan, cette hypothèse est trivialement vérifiée dès que la condition $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ\subset\mathbf{L}$ est remplie. Puisqu'alors les complexes de cohomologie sont concentrés en un degré, on en déduit un isomorphisme de ΛG-modules-ΛL

$$H_c^{\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{U}}}(\mathbb{Y}_{\mathbf{U}},\Lambda)e_{(s)}\simeq H_c^{\dim\mathbb{Y}_{\mathbf{V}}}(\mathbb{Y}_{\mathbf{V}},\Lambda)e_{(s)}.$$

Si la condition plus forte $C_{\mathbf{G}^*}(s)\subset\mathbf{L}$ est vérifiée, cela montre que les foncteurs réalisant l'équivalence de Morita entre $\Lambda Le^L_{(s)}$ et $\Lambda Ge^G_{(s)}$ sont isomorphes.

Notons pour finir qu'une version de ce résultat d'indépendance a permis à J.-F. Dat d'établir une décomposition de Jordan pour les représentations modulaires (lisses) de niveau zéro des groupes $\mathrm{GL}_n(F)$ lorsque F est un corps p-adique [Da].

RÉFÉRENCES

[Al] J. ALPERIN – *Local representation theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986).

[AB] J. ALPERIN, M. BROUÉ – *Local methods in block theory*, Ann. of Math. **110** (1979), 143–157.

[BDR] C. BONNAFÉ, J.-F. DAT, R. ROUQUIER – *Derived categories and Deligne-Lusztig varieties II*, Ann. of Math. **185** (2017), 609–670.

[BR1] C. BONNAFÉ, R. ROUQUIER – *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **97** (2003), 1–59.

[BR2] C. BONNAFÉ, R. ROUQUIER – *Compactification des variétés de Deligne-Lusztig*, Ann. Inst. Fourier **59** (2009), 621–640.

[Br1] M. BROUÉ – *Blocs, isométries parfaites, catégories dérivées*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988), 13–18.

[Br2] M. BROUÉ – *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **71** (1990), 45–63.

[Br3] M. BROUÉ – *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181-182** (1990), 61–92.

[BMa] M. BROUÉ, G. MALLE – *Zyklotomische Heckealgebren*, Astérisque **212** (1993), 119–189.

[BMM] M. BROUÉ, G. MALLE, J. MICHEL – *Generic blocks of finite reductive groups*, Astérisque **212** (1993), 7–92.

[BMi] M. BROUÉ, J. MICHEL – *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 56–67.

[Ca] P. CARTIER – *Détermination des caractères des groupes finis simples : travaux de Lusztig*, Séminaire Bourbaki 1985/86, Astérisque **145-146** (1987), 137–161.

[CR] J. CHUANG, R. ROUQUIER – *Derived equivalences for symmetric groups and $\mathfrak{sl}_2$-categorification*, Ann. of Math. **167** (2008), 245–298.

[Da] J.-F. DAT – *Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups*, prépublication `arXiv:1603.07226` (2016).

[DL] P. DELIGNE, G. LUSZTIG – *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103–161.

[DM] F. DIGNE, J. MICHEL – *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **27** (1994), 345–406.

[Ha] M. E. HARRIS – *Splendid derived equivalences for blocks of finite groups*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 71–82.

[KM] R. KESSAR, G. MALLE – *Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture*, Ann. of Math. **178** (2013), 321–384.

[Li] M. LINCKELMANN – *On derived equivalences and local structure of blocks of finite groups*, Turkish J. Math. **22** (1998), 93–107.

[Lu] G. LUSZTIG – *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematics Studies **107**, Princeton Univ. Press, Princeton (1984).

[Ma] G. MALLE – *Local-global conjectures in the representation theory of finite groups*, dans *Representation theory - current trends and perspectives*, Eur. Math. Soc., Zürich (2017), 519–539.

[Pu] L. PUIG – *On the local structure of Morita and Rickard equivalences between Brauer blocks*, Progress in Mathematics **178**, Birkhäuser Verlag, Basel (1999)

[Ri1] J. RICKARD – *Finite group actions and étale cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **80** (1994), 81–94.

[Ri2] J. RICKARD – *Splendid equivalences : derived categories and permutation modules*, Proc. London Math. Soc. **72** (1996), 331–358.

[Ro1] R. ROUQUIER – *Block theory via stable and Rickard equivalences* dans *Modular representation theory of finite groups* (Charlottesville, VA, 1998), de Gruyter, Berlin (2001), 101–146.

[Ro2] R. ROUQUIER – *Complexes de chaînes étales et courbes de Deligne-Lusztig*, J. Algebra **257** (2002), 482–508.

[Se1] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis « algébriques »*, Sém. Bourbaki 1975/76, Exp. n° 487, Lecture Notes in Math. **567**, Springer (1977) 256–273.

[Se2] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, 3ème édition, Hermann, Paris (1978).

[Sp] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, 2ème édition, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser, Boston (1998).

Olivier DUDAS

Université Paris–Diderot
UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain
5 rue Thomas Mann
F–75205 Paris CEDEX 13
E-mail : dudas@math.univ-paris-diderot.fr