INTRODUCTION À LA THÉORIE DE DELIGNE-LUSZTIG

<u>But</u> : construire et étudier les représentations des groupes réductifs finis

Les joueurs : groupes réductifs finis

$GL_n(q)$, $SL_n(q)$, $PGL_n(q)$, $SO_n(q)$, $Sp_{2n}(q)$, ..., $E_8(q)$

$\mathbb{F}_q$

~~$PSL_n(q)$~~

Groupes finis → résolubles ; → simples

<u>Classification des groupes finis simples</u> (CFSG, '83 ...)

- $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ p premier
- $A_n \subseteq \mathfrak{S}_n$ groupe alterné, $n \geqslant 6$
- Groupe simple de type de Lie $PSL_n(q)$, $PSp_{2n}(q)$, $P\Omega_n(q)$ ...
- 26 groupes sporadiques

$[SO, SO]/Z(\cdots)$

⇝ presque tous les groupes finis simples sont de type de Lie

Le jeu : représentations linéaires

<u>sur $\mathbb{C}$</u> : il suffit de "connaître" les représentations irréductibles
ou leur caractère

→ paramétrage permettant d'avoir :

- classification
- dimension des représentations
- valeur des caractères

] informations numériques

(<u>sur k</u> de caractéristique >0
→ information homologique Ext^i entre représentations)

La stratégie si $H \leq G$ sont des groupes finis

$$\begin{tikzcd} \text{représentations de } H \arrow[r, bend left, "\mathrm{Ind}_H^G"] & \text{représentations de } G \arrow[l, bend left, "\mathrm{Res}_H^G"] \end{tikzcd}$$

<u>Ex</u> : $\mathfrak{S}_n \leq \mathfrak{S}_{n+1}$ ✓

$GL_n(q) \leq GL_{n+1}(q)$ ✗

⇝ on utilisera des foncteurs d'induction/restriction plus "petits" provenant de la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

Quelques motivations

p nombre premier, G groupe fini

P p-Sylow, $N_G(P)$, $C_G(P)$ ...

Philosophie de Brauer : il y a un lien très fort entre

représentations de G (sur $\mathbb{F}_p$) $\dashleftarrow\dashrightarrow$ représentations / structure P, $N_G(P)$, $C_G(P)$

2 exemples :

(1) $H^\bullet(G, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathrm{Res}^G_{N_G(P)}} H^\bullet(N_G(P), \mathbb{F}_p)$

est un isomorphisme si P est abélien [Burnside]

Conjecture de Broué : $D^b(B_0(G)) \xrightarrow{\sim} D^b(B_0(N_G(P)))$

[1988]

blocs contenant $\mathbb{F}_p$ la rep. triviale

$B_0(G)$ contient : la rep. triviale $\mathbb{F}_p$

les irrep. L tq $\mathrm{Ext}^1(L, \mathbb{F}_p) \neq 0$

les irrep. L' tq $\mathrm{Ext}^1(L, L') \neq 0$ ...

"Devinée" grâce à la géométrie des groupes réductifs finis !!

Démontrée dans certains cas : G résoluble, $G = \mathfrak{S}_n$, $GL_n(q)$

ou P cyclique ...

(2) $\mathrm{Irr}_{p'} G = \{ V \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G \mid p \nmid \dim V \}$

<u>Conjecture de McKay</u> [1971]

$$\# \mathrm{Irr}_{p'} G = \# \mathrm{Irr}_{p'} N_G(P)$$

Démontrée pour $p = 2, 3$

Réduction aux groupes finis simples, mais cas G de type de Lie est difficile !

(3)

$$\begin{tikzcd}
 & & ?? \arrow[dll, dashed] \arrow[d, dashed] \\
\text{McKay (numérique)} \arrow[d, Rightarrow] & & \text{Broué (homologique)} \ P \text{ abélien} \arrow[dll, Rightarrow] \\
\text{McKay } \ P \text{ abélien} & &
\end{tikzcd}$$

Le cas géométrique des groupes réductifs finis pourrait donner un candidat pour ??

Dans ce cours

Exemple de $SL_2(q)$ / Cas général / approche moderne

(calculs) (preuves) (on pipeaute)

I - Induction / restriction parabolique

(pas encore de géométrie)

I.0 - Cas de $Sl_2(q)$

$$Sl_2(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{F}_q \text{ et } ad-bc=1 \right\}$$

$$|Sl_2(q)| = \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{q-1} = q(q^2-1)$$

bases de $\mathbb{F}_q^2$

Im (det)

$\# \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G = \#$ classes de conjugaison de G

Classes de conjugaison

- éléments semi simples (i.e diagonalisables sur $\overline{\mathbb{F}_q}$)

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & \cdot \\ \cdot & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{“}\begin{pmatrix} \mu & \cdot \\ \cdot & \mu^{-1} \end{pmatrix}\text{”}$$

$\lambda^q = \lambda$, $\lambda \neq \pm 1$ $\qquad \mu^q = \mu^{-1}$, $\mu \neq \pm 1$

- éléments unipotents (i.e Id + nilpotent)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

α n'est pas un carré de $\mathbb{F}_q$

- éléments mixtes

$$-\begin{pmatrix}1 & 1\\ \cdot & 1\end{pmatrix} \qquad -\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \cdot & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ 1+1+\frac{((q-1)-2)}{2}+\frac{((q+1)-2)}{2}+2+2 = q+4 \text{ classes}$$

Sous-groupes remarquables

$$T = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda & \cdot\\ \cdot & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{F}_q^\times \right\} \simeq \mathbb{F}_q^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$$

$$\cap$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda & a\\ \cdot & \lambda^{-1}\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{F}_q^\times,\ a \in \mathbb{F}_q \right\} \simeq \mathbb{F}_q^\times \ltimes \mathbb{F}_q$$

$$\triangledown$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix}1 & a\\ \cdot & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_q \right\} \simeq \mathbb{F}_q$$

action par λ^2

$T' \simeq \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z}$ construit via

$$\underset{\text{mult}}{\mathbb{F}_{q^2}^\times \circlearrowright} \mathbb{F}_{q^2} \underset{\text{comme } \mathbb{F}_q\text{-ev}}{\simeq} \mathbb{F}_q^{\oplus 2} \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_{q^2}^\times \arrow[r, hook] & GL_2(\mathbb{F}_q) \\ T' \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & SL_2(\mathbb{F}_q) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$T' \simeq \left\{ \mu \in \mathbb{F}_{q^2}^\times \,\middle|\, \mu^q = \mu^{-1} \right\}$$

Induction des représentations

Représentations de T, T' easy !

- irréductibles de dim 1
- données par une racine de $q-1$ / $q+1$ sur un générateur

On notera $\theta : T \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ caractère (multiplicatif)

$V_\theta = \mathbb{C}$ avec action de T donnée par

$$t \cdot v = \theta(t) v$$

$\mathrm{Ind}_T^G V_\theta$ est une représentation de G

de caractère $\mathrm{Ind}_T^G \theta$

* dimension : $\dfrac{|G|}{|T|} \dim V_\theta = q(q+1)$ $(q(q-1)$ pour $T')$

* "taille" : si $\chi = n_1 \chi_1 + \dots + n_r \chi_r$ $\quad \chi_i$ irred.

alors $\langle \chi, \chi \rangle = \sum n_i^2$

$$\langle \mathrm{Ind}_T^G \theta, \mathrm{Ind}_T^G \theta \rangle_G = \langle \theta, \mathrm{Res}_T^G \mathrm{Ind}_T^G \theta \rangle_G$$

<u>Digression</u> : formule de Mackey $H, K \leq G$

$$\mathrm{Ind}_H^G = {}_G\mathbb{C}[G]_H \otimes_{\mathbb{C}[H]} -$$

$$\mathrm{Res}_K^G = {}_K\mathbb{C}[G]_G \otimes_{\mathbb{C}[G]} -$$

$$\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G = {}_K\mathbb{C}[G]_H \otimes_{\mathbb{C}[H]} -$$

mais $\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{g \in K\backslash G/H} \mathbb{C}[KgH]$

$$KgH = K \cdot {}^gH g \simeq (K \times_{K \cap {}^gH} {}^gH) \cdot g$$

donc $\mathbb{C}[KgH] \simeq \mathbb{C}[K] \otimes_{\mathbb{C}[K \cap {}^gH]} \mathbb{C}[{}^gH] \curvearrowleft {}^gH$

et $\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G \simeq \bigoplus_{g \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{K \cap {}^gH}^K \mathrm{Res}_{K \cap {}^gH}^{{}^gH} ({}^g-)$

En part. $\langle \mathrm{Ind}\,\theta, \mathrm{Ind}\,\theta \rangle = \sum_{g \in T\backslash G/T} \langle \mathrm{Res}_{T \cap {}^gT}^T \theta, \mathrm{Res}_{T \cap {}^gT}^{{}^gT} {}^g\theta \rangle$

Maintenant : $T \cap {}^gT = \begin{cases} T & \text{si } {}^gT = T \\ \{\pm \mathrm{Id}\} = Z(G) & \text{sinon} \end{cases}$

$\rightsquigarrow \langle \mathrm{Ind}\,\theta, \mathrm{Ind}\,\theta \rangle \sim \# T\backslash G \backslash N_G(T) / T \sim q^2$ GROS

Induction parabolique

On regarde plutôt V_θ comme représentation de $B = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a \\ \cdot & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \right\}$

$\tilde{V}_\theta = \mathbb{C}$ où b agit par $b \cdot v = \tilde{\theta}(b) v$

et $\tilde{\theta}\begin{pmatrix} \lambda & a \\ \cdot & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \theta\begin{pmatrix} \lambda & \cdot \\ \cdot & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$

autrement dit $\tilde{V}_\theta$ est obtenu par inflation le long de $B \twoheadrightarrow T$

de sorte que $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ & 1 \end{pmatrix} \right\}$ agisse trivialement.

On pose $R_T^G(\theta) := \mathrm{Ind}_B^G \tilde{\theta}$

* dimension : $\frac{|G|}{|B|} \dim \tilde{\theta} = q+1$

* taille : $\langle R_T^G(\theta) ; R_T^G(\theta) \rangle = 1$ ou 2 grâce à :

Lemme : $\theta, \theta' : T \to \mathbb{C}^\times$

$$\langle R_T^G(\theta) ; R_T^G(\theta') \rangle_G = \langle \theta, \theta' \rangle_T + \langle \bar{\theta}, \theta' \rangle_T$$

preuve : $\langle R_T^G(\theta) ; R_T^G(\theta') \rangle_G$

$= \langle \tilde{\theta} ; \mathrm{Res}_B^G \mathrm{Ind}_B^G \tilde{\theta}' \rangle_B$

$$= \sum_{g \in B\backslash G/B} \left\langle \mathrm{Res}^{B}_{B\cap {}^gB} \tilde\theta \, ; \, \mathrm{Res}^{{}^gB}_{B\cap {}^gB} {}^g\tilde\theta' \right\rangle_{B\cap {}^gB}$$

Mackey

$B\backslash G/B$ a deux élts : classe de Id $\quad B\cap B = B$

classe de $s = \begin{pmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad B\cap {}^sB = T$

$$\langle R_T^G(\theta) ; R_T^G(\theta') \rangle_G = \langle \tilde\theta, \tilde\theta' \rangle_B + \langle \theta, {}^s\theta' \rangle_T$$
$$= \langle \theta, \theta' \rangle_T + \langle \theta, {}^s\theta' \rangle_T$$

et ${}^s\theta' = \bar\theta$ $\square$

<u>On fait le compte</u>

si $\theta \neq \bar\theta$ alors $R_T^G(\theta)$ irréductible

si $\theta = \bar\theta$ alors $R_T^G(\theta) = \chi_1 + \chi_2$ $\quad \chi_i$ irred $\chi_1 \neq \chi_2$

et $R_T^G(\theta), R_T^G(\theta')$ sont disjoints si $\theta \neq \theta', \bar\theta'$

d'où : * $\frac{q-3}{2}$ irréd. de la forme $R_T^G(\theta)$, $\theta \neq \bar\theta$

* $R_T^G(1_T) = 1_G + \mathrm{St}_G$ $\leftarrow$ de dim q

* $R_T^G(\theta) = \chi_1 + \chi_2$ avec $\theta \neq 1$, $\theta = {}^s\theta$ $\quad (\theta^2 = 1)$

$\dim \chi_1 = \dim \chi_2 = \frac{q+1}{2}$

$\rightsquigarrow \quad 4 + \frac{q-3}{2} = \frac{q+5}{2}$ rep. irréductible

$\approx$ la moitié

= série principale

<u>Autres représentations</u> : $R^G_{T'}(\theta) = ??$

on a pas $T' \subseteq B$!!

$\rightsquigarrow$ construction géométrique à venir.

I.1 Crash course sur les groupes réductifs (finis)

Groupe algébrique G :

- groupe abstrait
- variété algébrique

\+ compatibilité entre les deux structures

(la multiplication et l'inverse sont des opérations algébriques)

Tous les groupes algébriques rencontrés ici seront :

* linéaires ie $G \overset{\text{fermé}}{\hookrightarrow} GL_n(F)$ pour un certain $n \geq 1$
* définis sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$

(en général $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}_p}$)

* <u>Tores</u> : un tore est connexe et constitué d'élts simultanément diagonalisables

Tore de dim. 1 : $T = \mathbb{G}_m := (\mathbb{F}^\times, \times)$

Tore général : $T \simeq (\mathbb{G}_m)^n$ pour $n \geqslant 0$

G groupe algébrique fixé, $T \leq G$ tore maximal s'il est maximal pour l'inclusion

<u>Ex</u> : $\underset{\substack{\wr\\ (\mathbb{G}_m)^n}}{T} = \left\{ \begin{pmatrix} * & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix} \right\} \leq GL_n(\mathbb{F})$

$\underset{\substack{\wr\\ \mathbb{G}_m}}{T} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{F}^\times \right\} \leq SL_2(\mathbb{F})$

<u>Prop</u> : si G connexe, tous les tores max de G sont conjugués sous G

* <u>Sous-groupes de Borel</u>

G résoluble si $G \supseteq [G,G] \supseteq [[G,G],[G,G]] \supseteq \cdots$ se termine par le groupe trivial

[Lie-Kolchin] G résoluble connexe

$$\Rightarrow \quad G \hookrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix}}_{\text{résoluble !}} \subseteq Gl_n(\mathbb{F})$$

par un certain $n \geq 1$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix} \right\}$ est le prototype d'un gp résoluble connexe

Il s'écrit $B = T \ltimes U$

où $T = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

avec U = ens. des élts unipotents de B

[Unipotent $\Leftrightarrow$ Id + Nilpotent]

<u>Conséquence</u> : G résoluble connexe s'écrit toujours

$$G = T \ltimes U$$

où T est (n'importe quel) tore max de G

U est l'ensemble des élts unipotents de G

[égal ici au radical unipotent de G]

G qcq, $B \leq G$ est un sous-gp de Borel si B est résoluble connexe maximal

Ex : $\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$ Borel de $GL_n(\mathbb{F})$

Prop : Soit G connexe

(i) Tous les sous gps de Borel sont conjugués

(ii) Tout élt de G appartient à un Borel

$\left(\Leftrightarrow G = \bigcup_{g \in G} {}^g B \right.$, B Borel fixé $\left. \right)$

[Provient du fait que $G/_B$ est une variété projective]

* Groupes semi simples, groupes réductifs

$Rad(G)$ = radical de G

= + gd groupe connexe résoluble distinguée de G

$\cup\!|$

$R_u(G)$ = radical unipotent de G

= + gd groupe connexe distingué formé d'élts unipotents

def : G semisimple si $Rad(G) = \{1\}$

G réductif si $R_u(G) = \{1\}$

semisimple $\Rightarrow$ réductif

$Gl_n(\mathbb{F})$, $(\mathbb{G}_m)^n$ sont réductifs

$Sl_n(\mathbb{F})$, $PGl_n(\mathbb{F})$, $Sp_{2n}(\mathbb{F})$, $SO_n(\mathbb{F})$ sont semi simples

G réductif $\Rightarrow$ $Rad(G) = Z(G)^\circ$

composante connexe contenant l'élt neutre

* <u>Sous-groupes paraboliques, de Levi</u>

G connexe

$P \subseteq G$ est un sous-groupe parabolique si $P \supseteq$ Borel

Dans ce cas $P \twoheadrightarrow P/R_u(P)$ se scinde

$$P = L \ltimes R_u(P)$$

est appelée décomposition de Levi et L un sous-gp de Levi de G

(aussi complément de Levi de P)

<u>Ex</u> :

$$\underset{P}{\underset{\shortparallel}{\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline (0) & * \end{array}\right)}} \underset{=}{=} \underset{L}{\left(\begin{array}{c|c} Gl_{n_1} & (0) \\ \hline (0) & Gl_{n_2} \end{array}\right)} \ltimes \underset{R_u(P)}{\begin{pmatrix} I_{n_1} & * \\ (0) & I_{n_2} \end{pmatrix}}$$

dans $Gl_n(\mathbb{F})$ avec $n_1 + n_2 = n$

Prop : (i) Si $T \leq P$ tore maximal, il y a un unique Levi contenant T

(ii) Deux compléments de Levi sont conjugué par un unique élt de $R_u(P)$

* **Groupe de Weyl**

G réductif connexe, T tore maximal

Alors $T = C_G(T) = N_G(T)^\circ$

donc $W = N_G(T)/C_G(T) = N_G(T)/T$ est un groupe fini

appelé groupe de Weyl, et c'est un groupe engendré par des reflexions

⇝ donne un premier élt de classification

Rmq : le choix de $B \supseteq T$ Borel donne à W une structure de gp de Coxeter (voir plus tard)

Structure rationelle

$$Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p}) \overset{?}{\rightsquigarrow} Gl_n(\mathbb{F}_q)$$

$F : (a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^q)$ endomorphisme de $Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ de groupes algébriques

$$Gl_n(\mathbb{F}_q) = \left(Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p})\right)^F = \{ g \in Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p}) \mid g = F(g) \}$$

F est appelé endomorphisme de Frobenius

(ici "standard")

Plus généralement, si $G \hookrightarrow Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p})$

$F : G \to G$ Frobenius si F^m est la restriction d'un Frobenius sur $Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p})$

G réductif + F Frobenius $\rightsquigarrow$ G^F groupe réductif fini

Ex : $Gl_n(q)$, $SO_n(q)$, $Sp_{2n}(q)$, ..

$$GU_n(q) = \{ g \in Gl_n(q^2) \mid g\, {}^t\bar{g} = Id \}$$
$$= Gl_n(\overline{\mathbb{F}_p})^{F'}$$

$\bar{a} = a^q$ dans $\mathbb{F}_{q^2}$

où $F'(g) = {}^tF(g)^{-1}$

H sous-gp F-stable de G $\rightsquigarrow$ $H^F \leq G^F$

Thm [Lang–Steinberg] G connexe, $F : G \to G$ Frobenius
alors $\underbrace{g \mapsto g^{-1}F(g)}_{\text{application de Lang}}$ est surjective

Preuve : $x \in G$, on définit
$$\phi_x : g \mapsto g^{-1} x F(g)$$
$\leftarrow$ Frobenius

Fibres de ϕ_x sont isomorphes à G^{xF} qui est fini

$\Rightarrow \operatorname{Im}\phi_x$ dense dans G, connexe

$\Rightarrow \operatorname{Im}\phi_x \cap \operatorname{Im}\phi_1 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, g, h \in G$ tq $g^{-1}x F(g) = h^{-1}F(h)$ i.e. $x = (hg^{-1})^{-1}F(hg^{-1})$ $\square$

Autrement dit $G \circlearrowright G.F$ transitivement par conjugaison
et $\dfrac{G.F}{G}$ " $= F/\mathrm{Stab}_G(F) = \mathrm{pt}/G^F$ "

connexe

Conséquences : supposons $G \curvearrowright X$ variété avec F
tq $F(g\cdot x) = F(g)\cdot F(x)$

(1) $F(G\cdot x) = G\cdot x \Rightarrow (G\cdot x)^F \neq \emptyset$

Cas particulier : $G \subseteq H$ F-stables, $X = H/G$

$$\boxed{(H/G)^F = H^F/G^F}$$

(2) G^F-orbites de $(G\cdot x)^F \longleftrightarrow$ classes de conjugaison
de $(C_G(x)/C_G^\circ(x)).F$

I-3 Induction/restriction parabolique

Λ anneau qcq tq $p \in \Lambda^\times$ (ex : $\mathbb{Z}_\ell$, $\ell \nmid p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_\ell$)

P parabolique F-stable de G

$P = L \ltimes U \quad U = R_u(P)$

$$R^G_{L \subseteq P} := \underset{G^F \curvearrowright}{\Lambda}\left[G^F/U^F\right]_{\curvearrowleft L^F} \otimes_{\Lambda L^F} - \qquad \text{induction parabolique}$$

de manière équivalente : $R^G_{L \subseteq P}(V) = \mathrm{Ind}_{P^F}^{G^F}\left(\underbrace{\mathrm{Inf}_{L^F}^{P^F} V}_{V \text{ avec action triviale de } U^F}\right)$

$$^*R^G_{L \subseteq P} := \mathrm{Hom}_{G^F}\left(\Lambda G^F/U^F, -\right)$$

de manière équivalente $^*R^G_{L \subseteq P}(V) = V^{U^F}$

<u>Propriétés</u> : (i) R, $^*R$ exacts

(ii) R, $^*R$ biadjoints

preuve : $e := \frac{1}{|U^F|} \sum_{u \in U} u \in \Lambda U^F$, normalisé par L^F

alors $\Lambda G^F / U^F \simeq (\Lambda G^F) e$ iso de (G^F, L^F)-bimodule

$$g U^F \mapsto ge$$

$\Lambda G^F = \Lambda G^F e \oplus \Lambda G^F (1-e)$

$\Rightarrow$ $\Lambda G^F e$ est projectif comme ΛG^F-module

et ΛL^F-module (donc plat)

ce qui donne (i).

(ii) ${}^* R^G_{L \subseteq P}(V) \xrightarrow{\sim} eV \xrightarrow{\sim} e\Lambda G^F \otimes_{\Lambda G^F} V$

$$f \mapsto f(e)$$

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda L^F}(e\Lambda G^F, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda L^F}(e\Lambda G^F, \Lambda L^F) \otimes_{\Lambda L^F} -$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\Lambda L^F}(\Lambda G^F, \Lambda L^F) e \otimes_{\Lambda L^F} -$$

$\downarrow\wr$ car ΛG^F symétrique !

$$\xrightarrow{\sim} \quad \Lambda G^F e \otimes_{\Lambda L^F} - \quad = R^G_{L \subseteq P}$$

[$t : \sum \lambda_\ell \ell \mapsto \lambda_e$ forme symétrisante sur ΛL^F

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda L^F}(\Lambda G^F, \Lambda L^F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda G^F, \Lambda) \xleftarrow{\sim} \Lambda G^F$$

$$f \mapsto t \circ f$$

$$\delta_{g^{-1}} \leftarrow g \quad]$$

donc $(R, {}^*R)$ et $({}^*R, R)$ sont adjoints via $\otimes$-Hom $\square$

<u>Transitivité</u> $P = LU$, $Q = MV$ paraboliques avec

$P \subseteq Q$, $L \subseteq M$

alors $P \cap M$ est un sous-gp parabolique de M

$P \cap M = L \ltimes (U \cap M)$

$$R^G_{M \subseteq Q} \circ R^M_{L \subseteq P \cap M} \simeq R^G_L$$

<u>Preuve</u> : $G^F/V^F \times M^F/(U\cap M)^F \xrightarrow[\sim]{\Phi} G^F/U^F$

$(gV^F, m(U\cap M)^F) \longmapsto gmU^F$

- bien définie car $V \subseteq U$, M normalise V
- surjective
- équivariant pour action de G^F à gauche, L^F à droite
- $gmU^F = g'm'U^F \iff m^{-1}g^{-1}g'm' \in U^F = V^F \rtimes (U\cap M)^F$

$\iff m^{-1}g^{-1}g'm' = vu$

on remplace m' par mu^{-1}

et g par $gmv^{-1}m^{-1}$

$\rightsquigarrow$ $gm = g'm'$

d'où $G^F/U^F \overset{\phi}{\simeq} G^F/V^F \times^{M^F} M^F/(U\cap M)^F$

et on passe aux fonctions sur Λ. $\square$

<u>Rmq</u> : par adjonction $\quad {}^*R^M_L \, {}^*R^G_M = {}^*R^G_L$

<u>Thm</u> : P, Q F-stables tq $P = LU \quad Q = LV$

L F-stable

$\Rightarrow \quad R^G_{L\subseteq P} \simeq R^G_{L\subseteq Q}$

On verra une "preuve" dans le cas $\Lambda = \mathbb{C}$

⇝ on notera R^G_L au lieu de $R^G_{L\subseteq P}$.

I - 4 - Formule de Mackey

<u>Thm</u> : $P = LU$, $Q = MV$ F-stables

$$ {}^*R^G_{L\subseteq P} \, R^G_{M\subseteq Q} \simeq \bigoplus_{x\in L^F\backslash \mathcal{S}(L,M)^F/M^F} R^L_{{}^xM\cap L \subseteq {}^xQ\cap L} \; {}^*R^{{}^xM}_{{}^xM\cap L\subseteq {}^xM\cap P} \, {}^x(\ \ )$$

avec $\mathcal{S}(L,M) = \{ x\in G \mid L\cap {}^xM \supseteq \text{tore max de } G \}$

<u>Digression</u> : X, Y ensembles finis, H gp fini

agissant à droite sur X

à gauche sur Y

Produit amalgamé

$$X \times^H Y$$

est $(X \times Y)/_H$ où H agit par $h \cdot (x,y) = (xh^{-1}, hy)$

Ex : $H \times^H H \xrightarrow{\sim} H$
$(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2$

Alors $\Lambda[X \times^H Y] \simeq \Lambda[X] \otimes_{\Lambda H} \Lambda[Y]$

Preuve du thm : $* R^G_{L \subseteq P} \circ R^G_{M \subseteq Q}$ s'obtient par

$$\Lambda[{}_{U^F}\backslash G^F] \otimes_{\Lambda G^F} \Lambda[G^F/_{V^F}] \otimes_{\Lambda M^F} -$$

$$\wr\wr$$

$$\Lambda[{}_{U^F}\backslash G^F/_{V^F}] \otimes_{\Lambda M^F} -$$

donc on cherche à décomposer $\Lambda[{}_{U^F}\backslash G^F/_{V^F}]$ par les actions de L^F à gauche et M^F à droite
$\rightsquigarrow$ on calcule les orbites de $L^F \times (M^F)^{op}$ sur l'ensemble ${}_{U^F}\backslash G^F/_{V^F}$

<u>Etape 1</u> : $$G = \bigcup_{x \in \mathcal{S}(L,M)} PxQ$$

En effet si $g \in G$ alors ${}^gQ$, P contiennent chacun un sous-groupe de Borel B', B

Or, l'intersection de 2 Borel contient un tore max T de G
$\rightsquigarrow$ $\exists$ T tore maximal $\leq P \cap {}^gQ$

T tore max de $P \Rightarrow \exists\, p \in P$ tq ${}^pT \leq L$
T ——— ${}^gQ \Rightarrow \exists\, q \in Q$ tq ${}^{qg^{-1}}T \leq M$

d'où ${}^pT \leq L \cap {}^{pgq^{-1}}M$ ie $pgq^{-1} \in \mathcal{S}(L,M)$

<u>Etape 2</u> : pour $x, y \in \mathcal{S}(L,M)$

$$PxQ \cap PyQ = \begin{cases} PxQ & \text{si } x \in LyM \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

(admis ! Exemple : $L = M = T$ tore max
et $P = Q = B$ Borel, on a
$\mathcal{S}(T,T) = N_G(T)$
$G = \bigsqcup_{w \in N_G(T)/T} BwB$ déc. de Bruhat)

On en déduit

$$U\backslash G/V = \bigsqcup_{L\backslash \mathcal{S}(L,M)/M} U\backslash PxQ/V$$

d'où, puisque U, V, L, M sont connexes

$$U^F\backslash G^F/V^F = \bigsqcup_{L^F\backslash \mathcal{S}_G(L,M)^F/M^F} U^F\backslash P^F x\, Q^F/V^F$$

<u>Etape 3</u> :

$$\begin{array}{ccc} U^F\backslash P^F x\, Q^F/V^F & \xleftarrow{\sim} & L^F/_{L^F\cap {}^xV^F} \times_{(L\cap {}^xM)^F} ({}^xM\cap U)^F\backslash {}^xM^F \\ lxm & \longleftarrow\!\shortmid & (l, {}^xm) \end{array}$$

est bijective.
Bien définie & surjective ok, injectivité demande de savoir que $P\cap {}^xQ = (L\cap {}^xM)\cdot(L\cap {}^xV)\cdot(U\cap {}^xM)$ décomposition unique.

et on conclut en prenant les fonctions sur Λ $\square$

Corollaire : $\Lambda = \mathbb{C}$, $R^G_{L\subseteq P}$ ne dépendent pas de G et ${}^*R^G_{L\subseteq P}$

Preuve : par récurrence sur $\dim G/Z(G)^\circ$
(cas initial G est un tore)

Soit P, Q deux paraboliques de G, $P = LU$, $Q = LV$ et $\chi \in \mathrm{Irr}\, L^F$

On note $X_{P,Q} = \langle R^G_{L\subseteq P}(\chi) ; R^G_{L\subseteq Q}(\chi)\rangle$

On a

$$\| R^G_{L\subseteq P}(\chi) - R^G_{L\subseteq Q}(\chi)\|^2 = X_{P,P} + X_{Q,Q} - X_{P,Q} - X_{Q,P}$$

$$X_{P,Q} \overset{\text{Mackey}}{=} \bigoplus_{L^F\backslash \mathcal{S}_G(L,L)^F/L^F} \langle \underbrace{{}^*R^L_{L\cap {}^xL \subseteq L\cap {}^xQ}(\chi)}, \underbrace{{}^*R^{{}^xL}_{L\cap {}^xL \subseteq P\cap {}^xL}({}^x\chi)} \rangle$$

ne dépendent pas de P et Q
par récurrence

$\Rightarrow X_{P,Q} = X_{P,P} = X_{Q,P} = X_{Q,Q}$ et donc $R^G_{L\subseteq P}(\chi) = R^G_{L\subseteq Q}(\chi)$
par adjonction ${}^*R^G_{L\subseteq P} = {}^*R^G_{L\subseteq Q}$ $\square$

I-5 Théorie de Harish-Chandra

Maintenant que l'on dispose d'un procédé d'induction raisonnable on cherche à savoir quelles représentations de G^F peuvent "apparaître" dans un certain $R_L^G(V)$ par $L \subsetneq G$ Levi propre

"Apparaître" peut signifier :

- sous-représentation
- quotient ← adaptée à notre cadre
- sous-quotient

Rmq : les 3 notions sont équivalentes pour $\Lambda = \mathbb{C}$

Lemme : $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$ et M rep. de G^F quelconque

- $V \hookrightarrow M \iff \mathrm{Hom}_{\Lambda G^F}(V, M) \neq 0$
- $M \twoheadrightarrow V \iff \mathrm{Hom}_{\Lambda G^F}(M, V) \neq 0$
- V sous-quotient de $M \iff \mathrm{Hom}_{\Lambda G^F}(P_V, M) \neq 0$

enveloppe proj. de V

preuve : les 2 premières assertions sont évidentes car $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$

Pour la troisième, on utilise le fait qu'il existe des enveloppes projectives

(digression : $P \xrightarrow{\pi} V$ (et par abus P)

est une enveloppe projective de V si :

- π surjective
- si $M \subseteq P$ on a $M \cap \ker \pi = 0 \iff M = 0$

En particulier pour $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$ on demande

- $\pi \neq 0$
- $\pi(M) = 0 \quad \forall M \subseteq P,\ M \neq P$

Les enveloppes projectives existent pour les anneaux semi-parfaits, incluant ΛG^F lorsque Λ corps ou Λ anneau local)

$$\mathrm{Hom}(P_V, M) \neq 0 \implies \exists f : P_V \twoheadrightarrow \mathrm{Im} f \subseteq M$$

d'où $$P_V/\ker\pi = V \twoheadrightarrow \mathrm{Im} f / f(\ker \pi)$$

De plus, $\ker f \neq P_V \implies \ker f \subseteq \ker \pi$ par propriété de P_V

$$\implies \begin{tikzcd} P_V/\ker f \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Im} f \arrow[d, dashed, two heads] \\ P_V/\ker \pi \arrow[r, "\sim"] & V \end{tikzcd}$$

d'où $\mathrm{Im} f / f(\ker \pi) \simeq V$

Réciproquement, si il existe $N' \subseteq N \subseteq M$ tq $N/_{N'} = V$
on a

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, two heads] & V \\ & P_V \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \end{tikzcd}$$

par projectivité de P_V

et ainsi $P_V \longrightarrow N \hookrightarrow M$ morphisme non nul $\square$

Si $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$ "apparaît" dans $R_L^G(M)$ on a
$0 \neq \mathrm{Hom}(R_L^G(M), V) = \mathrm{Hom}(M, {}^*R_L^G(V))$
ce qui motive la déf suivante

déf : $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$ est cuspidal si ${}^*R_L^G(V) = 0$
par tout Levi L propre de G
(et F-stable, et complément d'un parabolique F-stable)

Thm : Λ corps, $V \in \mathrm{Irr}\, G^F$
(i) $\exists\, P = LU$ Fstable et $S \in \mathrm{Irr}\, L^F$ cuspidale tq
$$R_L^G(S) \twoheadrightarrow V$$
(ii) (L, S) unique à G^F-conjugaison près

(L,S) est appelé support cuspidal de V

<u>Preuve</u> : (i) Soit L minimal tq ${}^*R_L^G(V) \neq 0$
et $S \hookrightarrow {}^*R_L^G(V)$, $S \in \mathrm{Irr}\, L^F$
(existe car Λ est un corps !)

Alors • $R_L^G(S) \twoheadrightarrow V$ par adjonction

• Par M Levi propre de L on a

$$\underset{\uparrow \atop {}^*R \text{ exact}}{{}^*R_M^L(S) \hookrightarrow} {}^*R_M^L\, {}^*R_L^G(V) \underset{\uparrow \atop \text{transitivité}}{=} {}^*R_M^G(V) \underset{\uparrow \atop \text{minimalité de } L}{=} 0$$

donc S est cuspidal.

(ii) Soit (L',S') tq $R_{L'}^G(S') \twoheadrightarrow V$ et S' cuspidale

$R_L^G(P_S)$ projectif et
$$\begin{tikzcd} R_L^G(P_S) \arrow[r, two heads] \arrow[drr, dashed] & R_L^G(S) \arrow[r, two heads] & V \\ & & R_{L'}^G(S') \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d'où $0 \neq \mathrm{Hom}\left(R_L^G(P_S), R_{L'}^G(S')\right)$

$$\overset{\text{Mackey}}{\cong} \bigoplus_{x \in L^F \backslash \mathcal{S}_{G^F}(L,L')/L'^F} \mathrm{Hom}\left({}^*R^L_{L\cap {}^xL'}(P_S), {}^*R^{{}^xL'}_{L\cap {}^xL'}({}^xS')\right)$$

est non nul. Mais ${}^{x}S'$ cuspidal donc cela force l'existence d'un $x \in \mathcal{S}_{G^F}(L, L')$ tq $L \supseteq {}^{x}L'$

De manière symétrique, $\exists\, y \in \mathcal{S}_{G^F}(L', L)$ tq $L' \supseteq {}^{y}L$ donc en analysant les tailles on a forcément

$$L = {}^{x}L'$$

et

$$\mathrm{Hom}\left(R_L^G(P_S), R_{L'}^G(S')\right) = \bigoplus_{L^F \backslash \{x \in G^F \mid L = {}^{x}L'\} / L'^F} \mathrm{Hom}\left(P_S, {}^{x}S'\right)$$

est non nul ssi $\exists\, x \in G^F$ tq $L = {}^{x}L'$ et $S \simeq {}^{x}S'$ $\square$

Par L Levi F-stable de G, complément d'un par. F-stable
$S \in \mathrm{Irr}\, L^F$ cuspidal on note
appelée paire cuspidale on note

$$\mathrm{Irr}(G^F \mid (L, S)) = \{ V \in \mathrm{Irr}\, G^F \mid R_L^G(S) \twoheadrightarrow V \}$$

appelée série de Harish-Chandra au dessus de (L, S)

On a $$\mathrm{Irr}\, G^F = \bigsqcup_{(L,S) \text{ paire cuspidale} / \sim_{G^F}} \mathrm{Irr}(G^F \mid (L, S))$$

Ex : $G^F = Sl_2(q)$ on a 2 types de séries :

- les rep. cuspidales (il y en a $q+3$)
- les rep. dans la série (T, θ) avec $\theta \in \mathrm{Irr}\, T^F$
  (et avec $(T, \theta) \sim_{G^F} (T, {}^s\theta) = (T, \bar{\theta})$)

Rmq : en changeant la définition de "apparaît" dans $R_L^G(S)$ on obtient :

déf : V supercuspidale si V n'est pas facteur de composition d'un $R_L^G(S)$ pour L Levi propre

De manière équivalente, V supercuspidale

$\iff$ $\mathrm{Hom}(P_V, R_L^G(S)) = 0$ $\forall L$ propre, $S \in \mathrm{Irr}\, G^F$

$\iff$ $\mathrm{Hom}({}^*R_L^G(P_V), S) = 0$ ——————

$\iff$ ${}^*R_L^G(P_V) = 0$ ——————

$\iff$ P_V cuspidale

Mais en général, le support supercuspidal n'est pas unique à conjugaison près.

I-6 Décomposition de $R_L^G(S)$

(L, S) paire cuspidale
On $M = R_L^G(S)$

On dispose d'un foncteur

$$\Theta : \Lambda G\text{-mod} \longrightarrow \mathrm{End}(M)^{op}\text{-mod}$$
$$V \longmapsto \mathrm{Hom}_G(M, V)$$

appelé Hom-foncteur ou foncteur de Schur
et d'un adjoint

$$\Psi : \mathrm{End}(M)^{op}\text{-mod} \longrightarrow \Lambda G\text{-mod}$$
$$H \longmapsto M \otimes_{\mathrm{End}(M)} H$$

Thm : on suppose que Λ est un corps.
Alors Θ induit une bijection entre

$$\mathrm{Irr}(G^F \mid (L,S)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}\, \mathrm{End}(R_L^G(S))$$

preuve : Supposons que $M = R_L^G(S)$ est un ΛG^F-module projectif. Alors Θ est exact.

Si $T \in \mathrm{Irr}\, G^F$, alors $\Theta(T) \neq 0 \iff R_L^G(S) \twoheadrightarrow T$

$\iff T \in \mathrm{Irr}(G^F | (L,S))$

Dans ce cas $\Theta(T)$ est engendré par n'importe quel élt non nul comme $\mathrm{End}(M)^{op}$-module

En effet : soit $f : M \to T \quad \neq 0$

alors $f : M \twoheadrightarrow T$

et $\Theta(f) : \underbrace{\Theta(M)}_{\mathrm{End}(M)} \twoheadrightarrow \Theta(T)$

Θ est exact

qui est le morphisme $h \in \mathrm{End}(M) \mapsto f \circ h =: h \cdot f$

ms $\Theta(T)$ est irréductible

De plus, si $T, T' \in \mathrm{Irr}\, G^F$ avec $M \twoheadrightarrow T$

$T \not\cong T'$ $\qquad M \twoheadrightarrow T'$

on a $M = P_T^{\oplus r} \oplus Q$ avec $\mathrm{Hom}(Q,T) = 0$

enveloppes projectives

On choisit $\pi : M \twoheadrightarrow P_T^{\oplus r} \hookrightarrow M$ la projection

Si $\Theta(T) \simeq \Theta(T')$ comme $\mathrm{End}(M)^{op}$-modules

on a que l'action de π sur $\Theta(T')$ n'est pas identiquemt nulle, or si $f : M \to T'$

on a $\pi \cdot f = f \circ \pi$: $M \twoheadrightarrow P_T^{\oplus r} \hookrightarrow M \to T$,
est forcément nulle.

Enfin, si $H \in \mathrm{Irr}\,\mathrm{End}(M)^{op}$ on a

$$\begin{aligned}
\Theta(\Psi(H)) &= \mathrm{Hom}_{G^F}(M, M \otimes_{\mathrm{End}(M)} H) \\
&= \mathrm{Hom}_{G^F}(M, \Lambda G^F) \otimes_{\Lambda G^F} (M \otimes_{\mathrm{End}(M)} H)
\end{aligned}$$

M projectif

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Hom}_{G^F}(M, M) \otimes_{\mathrm{End}(M)} H \\
&= H
\end{aligned}$$

comme H irréductible et Θ est exact, il existe un facteur de composition T de $\Psi(H)$ tq $\Theta(T) = H$

$\rightsquigarrow$ Θ induit bijection $\mathrm{Irr}(G^F \mid (L,S)) \leftrightarrow \mathrm{Irr}(\mathrm{End}(M))$

Dans le cas général on prend $I = \mathrm{Ann}(M)$
et on montre que M est un $\Lambda G^F/_I$-module projectif. $\square$

<u>Compatibilité des inductions / restrictions</u>

(L,S) fixés, avec $L \subseteq M \subseteq G$ M Levi

On dispose des séries $\mathrm{Irr}(M^F \mid (L,s))$ et $\mathrm{Irr}(G^F \mid (L,s))$

Notons $\mathcal{H}_? = \mathrm{End}_{\Lambda ?^F}(R_L^?(s))$

et $\Psi_? = \mathrm{Hom}_{\Lambda ?^F}(R_L^?(s), -)$

<u>Lemme</u> : le diagramme suivant "commute"

$$\begin{tikzcd}
\Lambda G^F\text{-mod} \arrow[r, "\Psi_G"] \arrow[d, "{}^*R_M^G"'] & \mathcal{H}_G^{op}\text{-mod} \arrow[d, "\mathrm{Res}^{\mathcal{H}_G}_{\mathcal{H}_M}"] \\
\Lambda M^F\text{-mod} \arrow[r, "\Psi_M"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & \mathcal{H}_M^{op}\text{-mod}
\end{tikzcd}$$

On a $R_M^G : \mathcal{H}_M \longrightarrow \mathcal{H}_G$

donc on peut considérer la restriction via ce morphisme.

<u>Preuve</u> : Soit $X \in \Lambda M^F\text{-mod}$

$$\Psi_M \circ {}^*R_M^G(X) = \mathrm{Hom}_{\Lambda M^F}(R_L^M(s), {}^*R_M^G(X))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\Lambda G^F}(R_L^G(s), X)$$

naturel en X $\square$

I - 7 Algèbres de Hecke

Rappel : $\mathrm{Irr}\, G^F = \bigsqcup_{(L,s)\ \mathrm{cusp}/\sim} \mathrm{Irr}(G^F \mid (L,s))$

$$\mathrm{Irr}(G^F \mid (L,s)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}\,\mathrm{End}(R_L^G(s))$$

Reste à calculer $\mathrm{End}(R_L^G(s))$!

<u>Notation</u> : $W_G(L,s) = N_{G^F}(L^F,s) / L^F$

$$\{ g \in G^F \mid {}^g L^F = L^F \text{ et } {}^g s \simeq s \}$$

Thm : $\Lambda = \mathbb{C}$

Alors $\mathrm{Irr}\,\mathrm{End}(R_L^G(s)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}\, W_G(L,s)$

et

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Irr}(G^F \mid (L,s)) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, shift left, "{}^*R_L^G"] & \mathrm{Irr}\, W_G(L,s) \arrow[d, shift left, "\mathrm{Res}"] \\ \mathrm{Irr}(M^F \mid (L,s)) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, shift left, "R_M^G"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Irr}\, W_M(L,s) \arrow[u, shift left, "\mathrm{Ind}"] \end{tikzcd}$$

On va s'intéresser au cas $(L, S) = (T, \mathbb{C})$ ← rep. triviale

<u>Exemple de SL_2</u>

$$R_T^G(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[G^F/B^F] = \mathbb{C}[G^F]e_B \quad \text{où } e_B = \frac{1}{|B^F|}\sum_{b\in B^F} b$$

$$\mathrm{End}_{\Lambda G^F}(R_T^G(\mathbb{C})) = \mathbb{C}[{}_{B^F}\backslash G^F/_{B^F}] = e_B\mathbb{C}[G^F]e_B$$

iso d'algèbres pour la convolution / multiplication

On a vu que $G^F = SL_2(q)$ avait 2 orbites pour $B^F \times B^F$

- l'orbite de 1
- l'orbite de $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{End}_{G^F}(R_T^G(1))$ est de dimension 2, avec base e_B et $e_B s e_B$

élt neutre

De plus, $(e_B s e_B)^2 = e_B s e_B s e_B$

. si $b \notin T^F$, alors $sbs \notin B^F$

donc $sbs \in B^F s B^F = G^F \setminus B^F$

donc $e_B sbse_B = e_B s e_B$

- si $b \in T^F$ on a $sbs \in T^F$ donc $e_B sbse_B = e_B$

$\rightsquigarrow$ $(e_B s e_B)^2 = \frac{|T^F|}{|B^F|} e_B + \frac{|B^F|-|T^F|}{|B^F|} e_B s e_B$

avec $|B^F| = q(q-1)$ et $|T^F| = q-1$ on trouve

$$(e_B s e_B)^2 = \frac{1}{q} e_B + \frac{q-1}{q} e_B s e_B$$

Si on pose $T_s := q\, e_B s e_B$ on obtient

$$\boxed{T_s^2 = (q-1) T_s + q}$$

<u>Cas général</u> : on dispose de la décomposition de Bruhat

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

(Rappel : $W = N_G(T)/T$)

En posant $S := \{ w \in W \setminus \{1\} \mid \dim BwB \text{ minimale} \}$
on a

(W, S) est un système de Coxeter

$\rightsquigarrow$ • S engendre W

• si $\ell(w) = \min\{ r \in \mathbb{N} \mid w = s_1 \cdots s_r, \ s_i \in S \}$
alors

$$\ell(ws) = \begin{cases} \ell(w) - 1 & \text{si } w = s_1 \cdots s_{\ell(w)-1} s \\ \ell(w) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\ell(sw) = \begin{cases} \ell(w) - 1 & \text{si } w = s s_1 \cdots s_{\ell(w)-1} \\ \ell(w) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Au niveau de la décomposition de Bruhat on a :

- $BwBw'B = Bww'B$ si $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$
- $BsBsB = BsB \sqcup B$ pour $s \in S$

Thm : Pour $M = R_T^G(\mathbb{C})$ et $F_{|W} = Id_W$

l'algèbre $\mathrm{End}_{G^F}(M)$ a une base

$\{ T_w \}_{w \in W}$

vérifiant (1) $T_w T_{w'} = T_{ww'}$ si $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$

(2) $T_s^2 = (q-1) T_s + T_1$ pour $s \in S$

Preuve : $\mathrm{End}(M) \simeq e_B \mathbb{C}G^F e_B$

on pose $T_w \longmapsto q^{\ell(w)} e_B w e_B$

alors (1) provient de $BwBw'B = Bww'B$ lorsque
$\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$

Pour (2), on peut choisir un Levi L contenant T et s
et le fait que

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{End}_{L^F}(R_T^L(\mathbb{C})) & \xrightarrow{R_L^G} & \mathrm{End}_{G^F}(R_T^G(\mathbb{C})) \\
\wr\!\wr & & \\
e_{B_L} \Lambda L^F e_{B_L} & \hookrightarrow & e_B \Lambda G^F e_B \\
\| & & \\
e_B \Lambda P^F e_B & & e_B p e_B \\
e_B p e_B & \longmapsto &
\end{array}$$

et on se ramène au cas de $\left| \begin{array}{l} SL_2(q) \\ PGL_2(q) \end{array} \right.$ $\square$

Cette structure particulière d'algèbre est appelée algèbre de Hecke. C'est une q-déformation de l'algèbre de groupe de W (obtenue à "$q=1$")

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_{G^F}(R_T^G(\mathbb{C})) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} W$ essentiel !!!

(il faut la semisimplicité pour garder de la rigidité)

Si M est un Levi de G contenant T

$W_M = N_M(T)/T$ son groupe de Weyl

on a $\mathrm{End}(R_T^M(\mathbb{C})) \hookrightarrow \mathrm{End}(R_T^G(\mathbb{C}))$

envoit T_w sur T_w pour $w \in W_M$

donc on obtient

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}G^F\text{-mod} \arrow[r] \arrow[d, "{}^*R^G_M"'] & \mathcal{H}_G\text{-mod} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathbb{C}W\text{-mod} \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\
\mathbb{C}M^F\text{-mod} \arrow[r] & \mathcal{H}_M\text{-mod} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{C}W_M\text{-mod}
\end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G^F \mid (T,\mathbb{C})) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "{}^*R^G_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\,W \arrow[d, "\mathrm{Res}^W_{W_M}"] \\
\mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(M^F \mid (T,\mathbb{C})) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\,W_M
\end{tikzcd}$$

et pareil pour l'induction par adjonction.

En particulier pour $M = T$ on a un paramétrage

$$\chi \in \mathrm{Irr}\,W \longmapsto \rho_\chi \in \mathrm{Irr}(G^F \mid (T,\mathbb{C}))$$

tq $\quad R_T^G(1) = \sum_{\chi \in \operatorname{Irr} W} \chi(1)\, \rho_\chi$

Ex : $G = SL_2(q)$ $\quad R_T^G(1_?) = 1_{G^F} + St$

Cas général : $\quad \rho_{1_W} = 1_{G^F} \qquad \rho_{\varepsilon_W} = St$

où $\varepsilon_W : w \mapsto (-1)^{\ell(w)}$ caractère signature.

II - Théorie de Deligne-Lusztig

II-0 Cas de $SL_2(q)$

Rappels : $T^F = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & \cdot \\ \cdot & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right\} \simeq \mathbb{F}_q^\times \quad \leq \quad B = \left\{\begin{pmatrix} \lambda & * \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix}\right\}$

$(T')^F \simeq \mu_{q+1}$

$SL_2(q)$ a :
- $q+4$ irreps
- $\frac{q+5}{2}$ irreps provenant de $R_T^G(\theta) = \operatorname{Ind}_{B^F}^{G^F} \tilde{\theta}$ avec $\theta \in \operatorname{Irr} T^F$

inflation de θ

On cherche un analogue pour $\theta \in \operatorname{Irr} T'^F$

$R_T^G(\theta) = \operatorname{Ind}_{B^F}^{G^F} \tilde{\theta} = \mathbb{C}[G^F/U^F] \otimes_{\mathbb{C}T^F} \theta$

$$G/U \xleftarrow{\sim} \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$$ isomorphisme de variétés

$$\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} U \longleftrightarrow (x,y)$$

(on avait vu $\quad G/B \ni \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} B \xleftarrow{\sim} [x:y] \in \mathbb{P}^1$)

isomorphisme T-équivariant avec $(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$

$\rightsquigarrow \quad G^F/U^F \simeq \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$ avec action de $\mathbb{F}_q^\times$ donnée par

$$(x,y)\cdot\lambda = (\lambda x, \lambda^{-1} y)$$

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)\setminus\{0\} \subseteq \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2\setminus\{0\} \mid xy^q - yx^q = 0 \}$$
$$= \{0\}\times \mathbb{A}^1\setminus\{0\} \cup \mathbb{A}^1\setminus\{0\} \times \{0\} \cup \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_q)\setminus\{0\}$$

On pose $\quad Y = \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2\setminus\{0\} \mid xy^q - yx^q = 1 \}$

courbe de Drinfeld

La variété Y est :

* irréductible, de dimension 1
* affine
* lisse

De plus T^{F} agit sur Y par $(x,y)\cdot\lambda = (\lambda x, \lambda y)$

G^F ——————— $g\cdot(x,y) = g(x,y)$

$\rightsquigarrow$ situation similaire à G^F/U^F

$+ \quad U^F \backslash Y \simeq \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

On a

$$Y/T'^F \xrightarrow{\sim} \{ [x:y] \in \mathbb{P}^1 \mid xy^q - yx^q \neq 0 \} = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$$
$$(x,y) \mapsto [x:y]$$

similaire à $\left(G^F/U^F\right)/T^F \xrightarrow{\sim} G^F/B^F = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$

II-1 Variétés de Deligne-Lusztig

II-2 Boîte à outils de cohomologie

$H^{<d} = 0 \qquad H^{>2d} = 0 \qquad H^{2d} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si irred

$\to H^i_c(U) \to H^i_c(X) \to H^i_c(F) \to \cdots$

$H^i_c(\mathbb{A}^n) \qquad\qquad H^i_c(\mathbb{P}^n)$

p-sp^H agissant librement $\to \sum (-1)^i H^i_c = \lambda \,\mathrm{reg}_H$

II-3 Retour à $Sl_2(q)$

$$Y = \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy^q - yx^q = 1 \}$$

$Sl_2(q) \curvearrowright Y \curvearrowleft T'^F \simeq \mu_{q+1}$

$H^i_c(Y, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ bimodule pour $Sl_2(q)$ et T'^F

$\leadsto$ on peut, pour $\theta \in \mathrm{Irr}\, T'^F$ considérer

$$R^G_{T'}(\theta) := \left(g \longmapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \, \mathrm{Tr}(g \mid H^i_c(Y)_\theta) \right)$$

caractère virtuel de $Sl_2(q)$

(autrement dit un elt de $K_0(\mathrm{Rep}\, Sl_2(q))$)

<u>Rmq</u> : $H^i_c(Y) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq 1,2 \\ \overline{\mathbb{Q}_\ell} \text{ si } i=2 \quad \text{(avec action triviale de } G \text{ et } T'^F) \\ ?? \text{ si } i = 1 \end{cases}$

$\leadsto$ si $\theta \neq 1$ $\quad R^G_{T'}(\theta) = -H^1_c(Y)_\theta$

$\theta = 1$ $\quad R^G_{T'}(\theta) = 1_{Sl_2(q)} - H^1_c(Y)_1$

- <u>Cas de $\theta = 1$</u> $\quad e_\theta$ = projection sur $\mathbb{P}_0$ invariant par T'^F

donc $H^i_c(Y)_1 = H^i_c(Y)^{T'^F} = H^i_c(Y/_{T'^F})$

$= H^i_c(\mathbb{P}_1 \setminus \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q))$

Suite exacte longue

$$0 \to H^0(\mathbb{P}_1) \to H^0(\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_q)) \to H^1_c(Y/_{T'^F}) \to H^1(\mathbb{P}_1) \to 0$$
$$\to H^2_c(Y/_{T'^F}) \to H^2(\mathbb{P}_1) \to 0$$

$\rightsquigarrow \quad R^G_{T'}(1) = -St + 1$

<u>Rmq</u> : $\langle R^G_{T'}(1), R^G_T(1) \rangle = 0$ mais pas disjoint !!

$1 + St$

- <u>Dimension</u> : $\sum (-1)^i H^i_c(Y) = \lambda \cdot \mathrm{reg}_{T'^F}$

  comme rep. de T'^F

  et $\lambda = \dim R^G_{T'}(1) = q-1$

  $\Rightarrow \quad \dim R^G_{T'}(\theta) = q-1$

- <u>Orthogonalité</u>

<u>Thm</u> [Mackey]

(1) $\langle R^G_T(\theta), R^G_{T'}(\theta') \rangle = 0$

(2) $\langle R^G_{T'}(\theta), R^G_{T'}(\theta') \rangle = \langle \theta, \theta' \rangle_{T'^F} + \langle \theta, {}^{s}\theta' \rangle_{T'^F}$

<u>preuve</u> : (1) $\quad R^G_T(\theta) = \mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F} \mathrm{Inf}_{T^F}^{B^F} \theta$

$*\ \theta \neq 1$

$\langle R_T^G(\theta), R_{T'}^G(1)\rangle = 0$

$\langle R_T^G(\theta), R_{T'}^G(\theta')\rangle = 0 \Leftarrow \langle R_T^G(\theta), R_{T'}^G(\mathrm{reg}_{T'^F})\rangle = 0$

$= \sum (-1)^i H_c^i(Y)$

mais $H_c^i(Y)^{U^F} = H_c^i({}_{U^F}\backslash Y) = H^i(\mathbb{A}^1(\mathbb{F})\setminus\{0\})$

action triviale du tore

(faire plutôt avec $\theta' \neq 1$ et $\mathrm{reg}_{T'^F}$)

(2) difficile !! On verra une "preuve" générale

- <u>Conséquence</u> :

$* \ R_{T'}^G(1) = 1 - St$

$* \ -R_{T'}^G(\theta) \in \mathrm{Irr}\,SL_2(q)$, dim $q-1$ si $\theta \neq \bar\theta$

$-R_{T'}^G(\theta) = -R_{T'}^G(\theta')$ ssi $\theta = \bar\theta'$

$* \ -R_{T'}^G(\text{"}-1\text{"}) = \chi_3 + \chi_4$ de dim $\frac{q-1}{2}$

$\rightsquigarrow \ \frac{q+1-2}{2} + 2 = \frac{q+3}{2}$ irred tous !!

- <u>Vérification</u> $\sum (\dim \chi)^2 = |SL_2(q)|$

$$1+q^2+\left(\frac{q-1-2}{2}\right)(q+1)^2+\left(\frac{q+1-2}{2}\right)(q-1)^2+2\left(\frac{q-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{q+1}{2}\right)^2$$

$$=1+q^2+\frac{1}{2}(q-3)(q+1)^2+\frac{1}{2}(q-1)^3+\frac{1}{2}(q-1)^2+\frac{1}{2}(q+1)^2$$

$$=1+q^2+\frac{1}{2}(q-2)(q+1)^2+\frac{1}{2}q(q-1)^2$$

$$=1+q^2+\frac{1}{2}\left[(q-2)(q^2+2q+1)+q^3-2q^2+q\right]$$

$$=1+q^2+\frac{1}{2}\left[q^3+2q^2+q-2q^2-4q-2+q^3-2q^2+q\right]$$

$$=\cancel{1}+\cancel{q^2}+q^3-\cancel{q^2}-q-\cancel{1}=q(q^2-1)$$

II - 4 Variétés de Deligne-Lusztig

Soit L Levi F-stable de G

$P = L \ltimes U$ parabolique

Si P est F-stable, U aussi et on peut considérer

$$\mathbb{C}[(G/U)^F]$$

bimodule pour l'action de G^F (à gauche) et L^F (à droite)

$\leadsto$ $R_L^G = \mathbb{C}[(G/U)^F] \otimes_{L^F} -$

${}^*R_L^G = \mathrm{Hom}_{G^F}(\mathbb{C}[(G/U)^F], -)$

induction et restriction parabolique

Si $F(P) \neq P$, il faut remplacer

- $(G/U)^F$ par une sous-variété de G/U
- $\mathbb{C}[(G/U)^F]$ par la cohomologie de cette variété

$\leadsto$ les "bonnes" variétés sont données par la définition suivante

déf: $Y_{L \subseteq P} := \{ gU \in G/U \mid g^{-1}F(g) \in U \cdot F(U) \}$

variété de Deligne-Lusztig associée à $L \subseteq P$

Ex : Si $F(P) = P$ alors $F(U) = U$

donc $Y_{L\subseteq P} = \{ gU \in G/U \mid g^{-1}F(g) \in U \}$

$= \{ gU \in G/U \mid F(gU) = gU \}$

$= (G/U)^F = G^F/U^F$

↑ U connexe (on peut utiliser Lang-Steinberg)

Propriétés : (1) les actions de G et L à gauche et droite de G/U induisent des actions de G^F et L^F sur $Y_{L\subseteq P}$

(2) $Y_{L\subseteq P} \simeq \{ g \in G \mid g^{-1}F(g) \in F(U) \} / U \cap F(U)$

(3) $\dim Y_{L\subseteq P} = \dim U - \dim U \cap F(U)$

(4) $Y_{L\subseteq P} \longrightarrow X_{L\subseteq P} = \{ g \in G/P \mid g^{-1}F(g) \in P.F(P) \}$
induit un isomorphisme

$$Y_{L\subseteq P}/L^F \xrightarrow{\sim} X_{L\subseteq P}$$

Preuve : (1) ok

(2) $\{ g \in G \mid g^{-1}F(g) \in F(U) \} \twoheadrightarrow Y_{L\subseteq P}$ surj.

$g \mapsto gU$

et de fibre $\{ gu \mid u \in U \text{ et } u^{-1}\underbrace{g^{-1}F(g)}_{\in F(U)}\underbrace{F(u)}_{\in F(U)} \in F(U) \}$

$\simeq U \cap F(U)$

(3) se déduit de (2)

(4) $Y_{L\subseteq P} \to X_{L\subseteq P}$ surjective

$B\cdot F(B) = L\cdot UF(U)$

si $g^{-1}F(g) \in \ell\cdot UF(U)$ pour $\ell \in L$

alors en prenant $m\in L$ tq $m^{-1}F(m) = \ell^{-1}$ on a

$$(gm)^{-1}F(gm) = m^{-1}(g^{-1}F(g))F(m)$$
$$= m^{-1}F(m)\Big(\underbrace{F(m)^{-1}g^{-1}F(g)F(m)}\Big)$$
$$\in \cancel{\ell^{-1}}\cancel{\ell}\, U\cdot F(U)$$

$\in U\cdot F(U)$ car L normalise U
$F(L)=L$ ___ $F(U)$

Soit $g\in X_{L\subseteq P}$, quitte à multiplier par un elt de B
on peut supposer $g^{-1}F(g) \in F(U)$
et alors $(gm)^{-1}F(gm) \in F(U) \Leftrightarrow m^{-1}F(m) \in F(U)$
$\Leftrightarrow m\in L^F$

d'où (4) □

<u>Cas des tores</u> : on fixe $T\subseteq B$ F-stables, $U = R_u(B)$

Pour $T'\subseteq B'$, on peut trouver $h\in G$ tq
$${}^h(T',B') = (T,B)$$

Si $F(T') = T'$ on a $h^{-1}F(h) \in N_G(T)$

On pose $\dot{w} := h^{-1}F(h) \in N_G(T)$

$w :=$ image de $\dot{w}$ dans $W = N_G(T)/T$

$$\begin{tikzcd}
Y_{T'\subseteq B'} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "/T'^F"] & Y(\dot{w}) := \{ gU \in G/U \mid g^{-1}F(g) \in U\dot{w}U \} \arrow[d, "/T^{wF}"] \\
X_{T'\subseteq B'} \arrow[r, "\sim"] & X(w) := \{ gB \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in BwB \}
\end{tikzcd}$$

$gU' \longmapsto gU'h = ghU$

$gB' \longmapsto gB'h = ghB$

car $g^{-1}F(g) \in U'F(U')$

$\Leftrightarrow g^{-1}F(g) \in hUh^{-1}F(h)UF(h^{-1})$

$\Leftrightarrow (gh)^{-1}F(gh) \in U\dot{w}U$

Rmq : il existe une version pour les sous-gps de Levi

Avec cette description on a

$\dim Y(\dot{w}) = \dim Y(w) = \dim U - \dim U \cap {}^{\dot{w}}U$

$= \ell(w)$ longueur dans le gp de Weyl

Ex : (1) $Y(1) = G^F/U^F$, $X(1) = G^F/B^F$

(2) Si $G = SL_2$, $G^F = SL_2(q)$

$$\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{\sim} G/U$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} U$$

$$\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}^{-1} F\begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^q & * \\ y^q & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ xy^q - yx^q & * \end{pmatrix}$$

d'autre part $U\dot{s}U = \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ avec $\dot{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $Y(\dot{s}) = \{ (x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy^q - yx^q = 1 \}$
courbe de Drinfeld.

II-5 Induction / restriction de Deligne-Lusztig

1- Approche fonctorielle

$\Lambda = \mathbb{Q}_\ell, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{F}_\ell$ ou extension

$$R^G_{L\subseteq P} = \underbrace{R\Gamma_c(Y_{L\subseteq P}, \Lambda)}_{\in D^b(\mathrm{Rep}_\Lambda(G^F \times L^{F\,\mathrm{opp}}))} \overset{L}{\otimes}_{\Lambda L^F} -$$

$$^*R^G_{L\subseteq P} = R\mathrm{Hom}_{\Lambda G^F}(R\Gamma_c(Y_{L\subseteq P}, \Lambda), -)$$

$$\leadsto \quad D^b(\mathrm{Rep}_\Lambda L^F) \underset{^*R^G_{L\subseteq P}}{\overset{R^G_{L\subseteq P}}{\rightleftarrows}} D^b(\mathrm{Rep}_\Lambda G^F)$$

Plus concrètement, si $\Lambda \supseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

$$R^G_{L\subseteq P} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i_c(Y_{L\subseteq P}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{L^F} -$$

$$^*R^G_{L\subseteq P} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{G^F}(H^i_c(Y_{L\subseteq P}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), -)$$

foncteurs exacts $\quad \mathrm{Rep}^{gr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} L^F \rightleftarrows \mathrm{Rep}^{gr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} G^F$ ($\mathbb{Z}$-gradués)

<u>Motivation</u> : considérons

$$GF = \{ gF \mid g \in G \} \subseteq G \rtimes \langle F \rangle$$

avec action de conjugaison de G

$$h \cdot (gF) = hgFh^{-1} = hgF(h)^{-1}F \quad \text{dans } G\rtimes\langle F\rangle$$

Lang-Steinberg $\Rightarrow$ tout élt de G s'écrit $hF(h^{-1})$

$\iff$ G agit transitivement sur $G.F$

De plus $\mathrm{Stab}_G(F) = G^F$ groupe fini

$\rightsquigarrow \quad \dfrac{GF}{G} = \text{“} pt/G^F \text{”}$ quotient champêtre

et $\underbrace{D^b\left(\dfrac{GF}{G}\right)}_{\text{catégorie des faisceaux constructibles}} = D^b(pt/G^F) = D^b(\mathrm{Rep}\, G^F)$

Soit L Levi F-stable

$P = LU$ avec $F(P) = P$

On peut considérer les morphismes

$$\begin{tikzcd} & \frac{PF}{P} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \frac{LF}{L} & & \frac{GF}{G} \end{tikzcd}$$

alors $\beta_! \alpha^* : D^b(\mathrm{Rep}\, L^F) \to D^b(\mathrm{Rep}\, G^F)$

induction de P^F à G^F

inflation de L^F à P^F

Cas où $P \neq F(P)$? La variété $P.F$ n'est pas stable par P, mais $P.F(P)F$ oui !

On regarde alors

$$\begin{tikzcd} & \frac{P.F(P)F}{P} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[r, leftrightarrow] & X_{L\subseteq P} \arrow[d] \\ \frac{LF}{L} & & \frac{GF}{G} = \bullet/G^F \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{pt} \end{tikzcd}$$

et alors $\beta_! \alpha^* = R^G_{L\subseteq P}$

<u>Exemple</u> : $\beta_! \alpha^*(\underline{\Lambda}) = \beta_!(\underline{\Lambda})$

faisceau constant

et $(\beta_!(\underline{\Lambda}))_F = R\Gamma_c(\beta^{-1}(F)) = R\Gamma_c(X_{L\subseteq P})$
$= R^G_{L\subseteq P}(\Lambda)$

Fin de la digression !

On dispose de propriétés similaires au cas $F(P) = P$

<u>Prop</u> : (i) R, ${}^*R$ exacts (au sens dérivé/gradué)
(ii) R, ${}^*R$ biadjoints

On montre en fait que $R\Gamma_c(Y_{L\subseteq P}, \Lambda)$ peut être représenté par un complexe borné dont les termes sont des $\Lambda G^F, \Lambda L^F$ - bimodules

- projectifs comme ΛG^F - modules
- ——————— ΛL^F - modules

<u>Transitivité</u> : $L \subseteq M \quad P = LU, \ Q = MV \quad P \subseteq Q$

$$R^G_{L\subseteq P} = R^G_{M\subseteq Q} \circ R^M_{L\subseteq M\cap P}$$

vient de l'isomorphisme

$$G/_V \times^M M/_{U\cap M} \xrightarrow{\sim} G/_U$$

induisant

$$Y^{(G)}_{M\subseteq Q} \times^{M^F} Y^{(M)}_{L\subseteq P\cap M} \xrightarrow{\sim} Y^{(G)}_{L\subseteq P}$$

et on utilise la formule de Künneth.

<u>Cas des tores</u>

Si on fixe une paire $T\subseteq B$ F-stable, on peut changer de point de vue avec

$$\mathcal{R}^G_{\dot w} = R\Gamma_c(Y(\dot w), \Lambda) \otimes_{\Lambda T^{wF}} -$$

où $\dot w$ relevé dans $N_G(T)$ de $w\in W$

La transitivité donne par exemple, pour $w\in N_L(T)/_T = W_L$ et L tq $P=LU$ et $F(P)=P$, $F(L)=L$

$$R_L^G(\mathcal{R}^L_{\dot w}) \simeq \mathcal{R}^G_{\dot w}$$

induction parabolique

soit $\quad R_L^G(R\Gamma_c(Y^L(\dot w))) = R\Gamma_c(Y^G(w))$

ce qui permet de calculer la cohomologie des variétés de DL de manière inductive par les élts dans les sous-groupes de Levi

<u>Représentation triviale</u>

$$ {}^*\mathcal{R}^G_{L\subseteq P}(\Lambda) \simeq \Lambda[-2\dim Y_{L\subseteq P}] $$

Car $\quad {}^*\mathcal{R}^G_{L\subseteq P} = R\mathrm{Hom}_{G^F}(R\Gamma_c(Y_{L\subseteq P}), \Lambda)$

$$ = R\Gamma_c(Y_{L\subseteq P}/G^F)^* $$

$Y_{L\subseteq P}/G^F$ n'est pas directement calculable mais

$$ \begin{array}{ccc} Y_{L\subseteq P} & \xleftarrow[/U\cap F(U)]{} & \{g\in G \mid g^{-1}F(g)\in F(U)\} = \tilde{Y} \\ & & \Big\downarrow /G^F \\ & & F(U) \end{array} $$

$$ R\Gamma_c(\tilde{Y}) \overset{G^F\text{-éq}}{\simeq} R\Gamma_c(Y)[-2\dim U\cap F(U)] $$

et $R\Gamma_c(\tilde{Y}/G^F) = R\Gamma_c(F(U)) = \Lambda[-2\dim U]$

on conclut avec $\dim Y = \dim U - \dim U\cap F(U)$

__Indépendance de P__ si $P = LU$, $Q = LV$

$$\mathcal{R}^G_{L \subseteq P} \neq \mathcal{R}^G_{L \subseteq Q}$$

en fait, il n'y a pas de raison que
$$\dim Y_{L \subseteq P} = \dim Y_{L \subseteq Q}$$
car $\dim U \cap F(U) \neq \dim V \cap F(V)$

__Ex__ : dans le cas des tores on peut vérifier que
$$\underset{\ell(w)}{\underset{\shortparallel}{\dim Y(w)}} \neq \underset{\ell(w')}{\underset{\shortparallel}{\dim Y(w')}}$$
même si w et w' sont F-conjugués dans W
(et correspondent donc au "même" tore maximal)

__Formule de Mackey__
$$^*\mathcal{R}^G_{L \subseteq P} \circ \mathcal{R}^G_{M \subseteq Q} \neq \bigoplus \mathcal{R}^L_{L \cap {}^xM} \, {}^*\mathcal{R}^{{}^xM}_{L \cap {}^xM} \operatorname{ad} x$$

__ex__ : dans SL_2, T tore déployé
T' autre tore
$$^*\mathcal{R}^G_T \mathcal{R}^G_{T'} = {}^*R^G_T(H^\bullet_c(Y)) \neq 0$$
bien que ${}^xT \cap T'$ ne soit jamais un tore max pr $x \in G^F$.

⇝ nécessité de travailler avec une version moins fine de l'induction / restriction.

2- Groupes de Grothendieck

$\mathcal{A}$ catégorie abélienne (e.g $\mathrm{Rep}_\Lambda G^F$)

On dispose de suites exactes courtes

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

déf : le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$ est le groupe abélien obtenu par :

* générateurs $[A]$ pour $A \in \mathcal{A}/\sim_{iso}$
* relations $[B] = [A] + [C]$ pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$

Un foncteur exact (préserve l'exactitude des suites exactes) $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induit un morphisme $[F] : K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$

Exemple : H groupe fini, $\mathcal{A} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} H$

alors $V \mapsto \chi_V := h \mapsto \mathrm{Tr}(h \mid V)$

caractère de la représentation

induit un isomorphisme

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} H) \xrightarrow{\sim} \text{fonctions centrales sur } H$$

$$K_0(\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} H) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} H$$

"caractères virtuels"

<u>Rmq</u> : (1) la propriété $K_0(\mathrm{Rep}_{\mathbb{k}} H) \simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{k}} H$ reste vraie pour tout corps alg^t clos $\mathbb{k}$, même si $\mathrm{Rep}_{\mathbb{k}} H$ n'est pas semisimple

(2) On peut définir $K_0(\mathscr{C})$ pour une catégorie triangulée en remplaçant suites exactes courtes par triangles distingués et on a alors

$$\begin{aligned} K_0(D^b(\mathcal{A})) &\xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{A}) \\ [C_\bullet] &\longmapsto \sum(-1)^i [C_i] = \sum(-1)^i [H^i(C)] \end{aligned}$$

Dans notre cas, si X est une variété algébrique muni d'une action d'un groupe fini H on aura

$$[R\Gamma_c(X,\Lambda)] = \sum(-1)^i [H^i_c(X,\Lambda)] \in K_0(\mathrm{Rep}_\Lambda H)$$

et on dira que c'est une représentation virtuelle de H

3 - Induction / restriction virtuelle

On definit $R^G_{L\subseteq P} = [\mathcal{R}^G_{L\subseteq P}]$

$${}^*R^G_{L\subseteq P} = [{}^*\mathcal{R}^G_{L\subseteq P}]$$

de sorte que

$$R^G_{L\subseteq P}([V]) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[H^i_c(Y_{L\subseteq P}) \otimes_{L^F} V \right]$$

$${}^*R^G_{L\subseteq P}([V']) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[\mathrm{Hom}_{G^F}(H^i_c(Y_{L\subseteq P}), V') \right]$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[H^i_c(Y_{L\subseteq P})^* \otimes_{G^F} V' \right]$$

L'adjonction entre $\mathcal{R}$ et ${}^*\mathcal{R}$ se traduit par

$$\langle R^G_{L\subseteq P}([V]), [V'] \rangle = \langle [V], {}^*R^G_{L\subseteq P}[V'] \rangle$$

pour $[V] \in K_0(\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} L^F)$ $(\simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} L^F)$

$[V'] \in K_0(\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} G^F)$ $(\simeq \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}} G^F)$

En termes de caractères :

$$R^G_{L\subseteq P}(\chi)(g) = \frac{1}{|L^F|} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \sum_{\ell\in L^F} \mathrm{Tr}((g,\ell^{-1}) \mid H^i_c(Y_{L\subseteq P}))\, \chi(\ell)$$

$${}^*R^G_{L\subseteq P}(\rho)(\ell) = \frac{1}{|G^F|} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \sum_{g\in G^F} \mathrm{Tr}((g^{-1},\ell) \mid H^i_c(Y_{L\subseteq P}))\, \rho(g)$$

Dimension

$$R^G_{L\subseteq P}(\chi) = \pm \left|\frac{G^F}{L^F}\right|_{p'} \dim \chi$$

Formule de Mackey

$$^*R^G_{L\subseteq P}\, R^G_{M\subseteq Q} = \sum_{L^F\backslash \mathcal{S}(L,M)^F/M^F} R^L_{L\cap {}^xM} \circ {}^*R^{^xM}_{L\cap {}^xM} \circ \operatorname{ad} x$$

avec $\mathcal{S}(L,M) = \{ x\in G \mid L\cap {}^xM \supseteq \text{tore maximal} \}$

Démontrée pour $q>2$ ou G ne contenant pas de composante de type E_n

Conséquence $R^G_{L\subseteq P}$ ne dépend pas de P

$\rightsquigarrow$ noté R^G_L

II - 6 Caractères de Deligne-Lusztig

T tore maximal F-stable de G

$\theta \in \operatorname{Irr} T^F$

$$R^G_T(\theta) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[H^i_c(Y_{T\subseteq B}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes_{T^F} \theta \right]$$

avec B n'importe quel sous gp de Borel de G contenant T est appelé caractère de Deligne Lusztig

Attention : $R_T^G(\theta) \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}\, G^F$ fait apparaître des caractères irréductibles avec signes

Thm : $\dim R_T^G(\theta) = \dim R_T^G(1) = \left|\dfrac{G^F}{T^F}\right|_{p'}$

Preuve : On utilise le fait suivant : si h est un p'-elt agissant sur X alors

$$\sum (-1)^i \,\mathrm{Tr}(h \mid H_c^i(X)) = \sum (-1)^i \dim H_c^i(X^h)$$

points fixes par h

Dans notre cas, pour $t \in T^F$ on a, avec

$$\tilde{Y} = \{ g \in G \mid g^{-1}F(g) \in F(U) \}$$

$\tilde{Y}^t = \emptyset$ pour $t \neq 1$

Puisque $H_c^i(\tilde{Y})$ et $H_c^i(Y_{T\subseteq B})$ diffèrent d'un décalage pair uniquement, on en déduit que

$$\forall t \in T^F \setminus \{1\}, \quad \sum (-1)^i \,\mathrm{Tr}(t \mid H_c^i(Y_{T\subseteq B})) = 0$$

donc $\sum (-1)^i [H^i_c(Y_{T\subseteq B})]$ est un multiple de la représentation régulière de T^F, et ainsi

$$\dim R_T^G(\theta) = \dim R_T^G(1) = \sum (-1)^i \dim H^i_c(X_{L\subseteq B})$$

et on admet le résultat pour $\theta = 1$ $\square$

Thm (formules d'orthogonalité)

(1) Si $T \not\sim_{G^F} T'$ alors

$$\langle R_T^G(\theta) ; R_{T'}^G(\theta') \rangle = 0$$

(2) $\langle R_T^G(\theta) ; R_T^G(\theta') \rangle = \# \{ w \in N_G^F(T)/_{T^F} \mid {}^w\theta = \theta' \}$

$\rightsquigarrow$ découle de la formule de Mackey car

$$\mathcal{Y}(T, T') = \{ x \in G \mid {}^x T' = T \}$$

preuve du thm (sans utiliser la formule de Mackey !)

On commence par remarquer que

$$R_T^G(\theta)^* = R_T^G(\theta^*)$$

donc il suffit d'étudier

$$R_T^G(\theta^*) \otimes_{G^F} R_{T'}^G(\theta') = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} H^i_c(Y_{T\subseteq B})_{\theta^*} \otimes_{G^F} H^j_c(Y_{T'\subseteq B'})_{\theta'}$$

$$= \sum_k (-1)^k H^k_c\left(Y_{T\subseteq B} \times^{G^F} Y_{T'\subseteq B}\right)_{\theta^* \otimes \theta'}$$

On a déjà vu que l'on pouvait remplacer $Y_{T\subseteq B}$ par
$\tilde{Y} = \{ g \in G \mid g^{-1}F(g) \in U \}$
idem par $Y_{T'\subseteq B'}$. Il suffit donc de considérer

$$\tilde{Z} := \tilde{Y} \times^{G^F} \tilde{Y}' = \{ (g,g') \in G \times^{G^F} G \mid g^{-1}F(g) \in U,\ g'^{-1}F(g') \in U' \}$$

<u>1ère étape</u>: on récrit $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} \xleftarrow{\sim} \{ (u,u',h) \in U \times U' \times G \mid u F(h) = h u' \} = Z$$
$$(g,g') \longmapsto (g^{-1}F(g), g'^{-1}F(g'), g^{-1}g')$$

Action de $T^F \times T'^F$ donnée par
$$(u,u',h)\cdot(t,t') = (t^{-1}ut,\ t'^{-1}u't',\ t^{-1}ht')$$

<u>2ème étape</u>: décomposition en sous-variétés local^t fermées.
$\leadsto$ on utilise la décomposition de Bruhat
(légèrement modifiée car $B' \neq B$ en général)

Soit g tq ${}^g(T',B') = (T,B)$, $g \in G$

$$\mathcal{S}(T,T') = \{ x \in G \mid {}^xT' = T \} = N_G(T)g$$

$$\Rightarrow \quad T \backslash \mathcal{S}(T,T')/T' = Wg \quad \text{où } W = N_G(T)/T$$

Bruhat : $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$

$$G = Gg = \bigsqcup_{w \in W} BwBg = \bigsqcup_{w \in W} B(wg)\, g^{-1} B g$$

$$= \bigsqcup_{T \backslash \mathcal{S}(T,T')/T'} B x B'$$

d'où $$Z = \bigsqcup_{T \backslash \mathcal{S}(T,T')/T'} \underbrace{\{ (u,u',h) \in U \times U' \times BxB' \mid uF(h) = hu' \}}_{Z_x}$$

3ème étape : réécriture de Z_x

$$U \times T \times U' \xrightarrow{\pi} BxB'$$
$$(a,s,b) \longmapsto asxb$$

et les fibres sont des espaces affines

De même

$$Z'_x = \{ (u,u',a,s,b) \in U \times U' \times U \times T \times U' \mid uF(asxb) = asxbu' \}$$
$$\downarrow$$
$$Z_x$$

a des fibres affines donc même cohomologie

L'action de $T^F \times T'^F$ est donné par

$$(u,u',a,s,b)\cdot(t,t') = (t^{-1}ut,\ t'^{-1}u't',\ t^{-1}at,\ t^{-1}sxt'x^{-1},\ t'^{-1}bt')$$
$$= (u^t,\ u'^{t'},\ a^t,\ t^{-1}s({}^x t'),\ b^{t'})$$

Maintenant, $u\,F(asxb) = asxbu'$

s'écrit $\quad F(asxb) = (u^{-1}a)\cdot sx\,(bu')$

et un chang^t de variable $v = u^{-1}a$, $v' = bu'$ donne

$$Z''_x = \{ (v,v',a,s,b) \in U\times U'\times U\times T\times U' \mid F(asxb) = vsxv' \}$$

avec $\hat{m}$ action de $T^F \times T'^F$

<u>4 ème étape</u> : action d'un tore algébrique étendant $T^F \times T'^F$

On définit

$$H_x = \{ (t,t') \in T\times T' \mid t\,F(t)^{-1} = {}^x(t'F(t')^{-1}) \}$$

par $(v,v',a,s,b)\cdot(t,t') = (v^{F(t)},\ v'^{F(t')},\ a^t,\ t^{-1}s\,{}^x t',\ b^{t'})$

si $\quad F(asxb) = vsxv'$

alors $\quad F(t)^{-1}F(asxb)\,F(t') = F(t)^{-1}\,vsxv'\,F(t')$

$$= v^{F(t)}\ F(t)^{-1}sx\,F(t')\ v'^{F(t')}$$

donc l'action de (t,t') stabilise Z''_x si et seul^t si

$$F(t)^{-1} s x F(t') = t^{-1} s x t'$$

ie $\quad F(t)^{-1} x F(t') = t^{-1} x t'$, ou $\quad t F(t^{-1}) = x t' F(t')^{-1} x^{-1}$

i.e $\quad (t, t') \in H_x$.

Attention H_x n'est pas connexe !

Lemme : Soit $n \geq 1$ tq $F^n(x) = x$

$$H_x^\circ = \{ (N_{F^n/F}(z), N_{F^n/F}({}^x z) \mid t \in T \}$$

où $N_{F^n/F}(z) = z F(z) \cdots F^{n-1}(z)$

Preuve : Soit $H = \{ (N_{F^n/F}(z), N_{F^n/F}({}^x z)) \mid t \in T \}$

* H est connexe (image de T)
* $H \subseteq H_x$ car pour $t = N_{F^n/F}(z)$ on a

$$t F(t)^{-1} = z F^n(z)^{-1}$$

et ainsi pour $t' = N_{F^n/F}({}^x z)$, $\quad t' F(t')^{-1} = {}^x z \, {}^{F^n(x)} F^n(z)^{-1}$

$$= {}^x(z F^n(z)^{-1})$$

$\rightsquigarrow \quad H_x^\circ \subseteq H \subseteq H_x$

Mais $\quad H_x \xrightarrow{pr_1} T$ reste surjective sur H

$\quad (t, t') \longmapsto t$

et les fibres sont finies, donc H_x/H est fini
ce qui prouve $H_x^\circ = H$ $\square$

Cas particulier : $n = 1 \Rightarrow H_x^\circ = \{ (t, {}^x t) \mid t \in T \}$

5ème étape : calcul de la cohomologie à l'aide de la propriété

$$\sum (-1)^i H^i_c(X^{\mathbb{G}_m}) = \sum (-1)^i H^i_c(X)$$

On distingue deux cas :

* $(Z''_x)^{H_x^\circ} = \phi$, alors $\sum (-1)^i H^i_c(Z''_x) = 0$
* $(Z''_x)^{H_x^\circ} \neq \phi$, alors il existe

$(v, v', a, s, b) \in U \times U' \times U \times T \times U$ tq $\forall\ t, t' \in H_x^\circ$

$$v^{F(t)} = v, \quad v'^{F(t')} = v, \quad a^t = a, \quad t^{-1} s\, {}^x t' = s, \quad b^{t'} = b$$

Puisque $H_x^\circ \xrightarrow{pr_1} T$ on a $v = v' = a = b = 1$
et d'autre par $t = {}^x t'$ pour tout $(t, t') \in H_x^\circ$
ce qui implique $t F(t)^{-1} = \begin{cases} {}^x(t' F(t'^{-1})) & \text{car } t, t' \in H_x^\circ \\ {}^x t'^{F(x)} F(t') \end{cases}$

et la surjectivité de Lang $\Rightarrow x = F(x)$

Donc
$$\left(Z''_x\right)^{H^\circ_x} \simeq \{ s \in T \mid F(sx) = sx \}$$
$$= T^F$$

avec action donnée par $(t,t') \in T^F \times T'^F = T^F \times (T^x)^F$
$$s \cdot (t,t') = t^{-1} s \, {}^x t'$$

On a donc $H^\bullet_c\left(\left(Z''_x\right)^{H^\circ_x}\right)_{\check{\theta} \otimes \theta'} = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_\ell & \text{si } \theta' = \theta^x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et on conclut en sommant sur les $x \in \left(T \backslash \mathcal{S}(T,T')/T'\right)^F$. $\square$

III - Classification des caractères

<u>But</u> : retrouver tous les caractères irréductibles dans les
$$R_T^G(\theta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \left[H^i_c(Y_{T \subset B})_\theta \right]$$

par T tore maximal F-stable, et $\theta \in \operatorname{Irr} T^F$

<u>Stratégie</u> :

- Montrer que tous irreps apparaissent ds $R_T^G(\theta)$
- Regrouper les paires (T,θ) selon les irreps apparaissant dans $R_T^G(\theta)$
- Montrer que $R_T^G(\theta) \sim R_T^{G_\theta}(1)$ pour G_θ autre

groupe réductif

- Classifier les ireps apparaissant dans $R_T^G(1)$

III-1 Fonctions uniformes

déf : une fonction de classe $G^F \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est dite uniforme si elle s'écrit comme combinaison linéaire de $R_T^G(\theta)$

Ex : $G^F = SL_2(q)$ $\quad R_T^G(1) = 1 + St$

$\quad R_{T'}^G(1) = 1 - St$

$\Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}\left(R_T^G(1) + R_{T'}^G(1)\right)$ sont uniformes

$\quad St = \frac{1}{2}\left(R_T^G(1) - R_{T'}^G(1)\right)$

idem pour $R_T^G(\theta)$ lorsque $\theta^2 \neq 1$

$R_{T'}^G(\theta)$

mais $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ ne sont pas uniformes.

Proposition : Sont uniformes :

(1) le caractère trivial 1_{G^F}

(2) le caractère de Steinberg St_{G^F}

(3) le caractère de la représentation régulière reg_{G^F}

preuve : On note

$$p = \frac{1}{|G^F|} \sum_{T \in \mathcal{T}} |T^F| \, R_T^G \circ {}^*R_T^G$$

où $\mathcal{T} = \{ T \subseteq G \text{ tore maximal } F\text{-stable} \}$

On montre que p est la projection orthogonale sur l'espace des fonctions uniformes :

$$\langle p(\chi) ; R_T^G(\theta) \rangle = \frac{1}{|G^F|} \sum_{\mathcal{T}} |T'^F| \langle R_{T'}^G \, {}^*R_{T'}(\chi) , R_T^G(\theta) \rangle$$

$$= \frac{1}{|G^F|} \sum_{\mathcal{T}} |T'^F| \langle {}^*R_{T'}^G(\chi), {}^*R_{T'}^G R_T^G(\theta) \rangle$$

$${}^*R_{T'}^G R_T^G(\theta) = \sum_{x \in T'^F \backslash \mathcal{S}(T',T)/T^F} {}^x\theta$$

de plus, $\langle {}^*R_{T'}^G(\chi), {}^x\theta \rangle_{T'^F} = \langle {}^*R_T^G(\chi), \theta \rangle$

$$\langle p(\chi) ; R_T^G(\theta) \rangle = \frac{1}{|G^F|} \left(\sum_{\mathcal{T}} |T'^F| . | T'^F \backslash \mathcal{S}(T',T)^F / T^F | \right) \langle \chi, R_T^G(\theta) \rangle$$

$$= \frac{1}{|G^F|} \left(\sum_{T' \sim_{G^F} T} |N_{G^F}(T)| \right) \langle \chi, R_T^G(\theta) \rangle$$

$$= \langle \chi, R_T^G(\theta) \rangle$$

Il faut maintenant vérifier que $p(\chi) = \chi$ pour $\chi \in \{ 1, St, reg \}$

$\Leftrightarrow \quad \langle x, p(x)\rangle = \langle x, x\rangle$ (en utilisant $\langle p(x)-x, p(x)-x\rangle$)

(1) $\langle 1 ; p(1)\rangle = \dfrac{1}{|G^F|} \sum_{\tau} |T^F| \underbrace{\langle 1, R_T^G {}^*R_T^G(1)\rangle}$

$$\langle {}^*R_T^G(1), {}^*R_T^G(1)\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle 1_{T^F}, 1_{T^F}\rangle = 1$$

donc $\langle 1 ; p(1)\rangle = \dfrac{1}{|G^F|} \sum_{\tau} |T^F| = \sum_{\tau/G^F} |W(T)^F|^{-1}$

déployé

$$\tau/G^F \longleftrightarrow F\text{-classes de conjugaison de } W(T_0)$$
$$T_w \longleftarrow w$$

et # orbite de w dans $W(T_0)F = \dfrac{|W(T_0)|}{|W(T_0)^{wF}|} = \dfrac{|W(T_0)|}{|W(T)^F|}$

d'où $\langle 1, p(1)\rangle = \dfrac{1}{|W(T_0)|} \sum_{w\in W(T_0)} 1 = 1$

(2) Le raisonnement précédent montre que

$$p = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} R_{T_w}^G {}^*R_{T_w}^G$$

$$\langle St ; p(St)\rangle = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} \langle {}^*R_{T_w}^G(St), {}^*R_T^G(St)\rangle$$

on admet que ${}^*R_{T_w}^G(St) = (-1)^{\ell(w)} \rightsquigarrow$ ok !

(3) On montre que ${}^*R_T^G(\mathrm{reg}_{G^F}) = \underbrace{\left(R_T^G(1_{T^F})(1)\right)}_{= \pm \frac{|G^F|_{p'}}{|T^F|}} \mathrm{reg}_{T^F}$

On a
$$ {}^*R_T^G(\mathrm{reg}_{G^F})(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \,\mathrm{Tr}\left(t \mid H^i_c(Y_{T\subseteq B})\right)$$

points fixes par t

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \,\mathrm{Tr}\left(1 \mid H^i_c(Y^t_{T\subseteq B})\right)$$

t semisimple

si $t \neq 1$ on a $(Y_{T\subseteq B})^t = \emptyset$, et si $t=1$ $(Y_{T\subseteq B})^t = Y_{T\subseteq B}$
d'où la formule.

Ensuite : $\langle \mathrm{reg}, p(\mathrm{reg})\rangle = \frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} \frac{|G^F|^2_{p'}}{|T_w^F|^2} |T_w^F|$

$$= \left(\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} \frac{|G^F|_{p'}}{|T_w^F|} q^{-N}\right)\langle \mathrm{reg}, \mathrm{reg}\rangle$$

Mais $\mathrm{St} = \frac{1}{|W|}\sum (-1)^{\ell(w)} R_{T_w}^G(1)$

d'où $\mathrm{St}(1) = \dim \mathrm{St} = \frac{1}{|W|}\sum_{W} (-1)^{\ell(w)}(-1)^{\ell(w)} \frac{|G^F|_{p'}}{|T_w^F|}$

$$= \frac{1}{|W|}\sum_{W} \frac{|G^F|_{p'}}{|T_w^F|}$$

$\rightsquigarrow$ $\langle reg, p(reg)\rangle = q^{-N} \dim St \langle reg, reg\rangle$

et on admet que $\dim St = q^N$ q-partie de $|G^F| = q^{\#\text{racines positives}}$ $\square$

on obtient donc

$$1 = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} R_{T_w}^G(1)$$

$$St = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} R_{T_w}^G(1)$$

et $$reg = \frac{1}{|W|} \sum_{w\in W} (-1)^{\ell(w)} \frac{|G^F|_{p'}}{|T_w^F|} R_{T_w}^G(reg)$$

Corollaire : pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}\, G^F$, il existe T F-stable et $\theta \in \mathrm{Irr}\, T^F$ tels que $\langle \chi, R_T^G(\theta)\rangle \neq 0$

II-2 Séries géométriques

On cherche maintenant si $R_T^G(\theta)$ et $R_{T'}^G(\theta')$ peuvent avoir des composant irréductibles en commun

e.g : $G^F = SL_2(q)$ et $R_T^G(1) = 1 + St$

$R_{T_s}^G(1) = 1 - St$

ne sont pas disjoints alors que $T_s \not\sim_{G^F} T$

Thm : Soit (T,θ) et (T',θ') avec T, T' des tores maximaux F-stables et $\theta \in \mathrm{Irr}\, T^F$, $\theta' \in \mathrm{Irr}\, T'^F$

Si il existe $\chi \in \mathrm{Irr}\, G^F$ avec $\langle \chi, R_T^G(\theta)\rangle \neq 0$

$$\langle \chi, R_{T'}^G(\theta')\rangle \neq 0$$

alors il existe $n \geq 1$ et $g \in G^{F^n}$

- ${}^g T' = T$
- ${}^g(\theta' \circ N_{F^n/F}) = \theta \circ N_{F^n/F}$

avec $N_{F^n/F} : t \mapsto t F(t) \cdots F^{n-1}(t)$

Si (T,θ) et (T',θ') satisfont les conclusions de l'énoncé on dit qu'elles sont géométriquement conjuguées

$\rightsquigarrow$ partition de $\mathrm{Irr}\, G^F$ selon les classes de conjugaison géométriques des paires (T,θ)

preuve : on reprend la preuve de la formule d'orthogonalité à l'étape 5 : il doit exister $x \in {}_{T'}\backslash \mathcal{S}(T',T)/_T$ tel que

$$H_c^\bullet(Z''_x)_{\theta \otimes \theta'^\vee} \neq 0$$

(sinon grâce aux suites exactes longues "ouvert-fermé" on trouve une cohomologie de l'espace total nulle)

Soit $n \geq 1$ tq $F^n(x) = x$, alors

$$H_x^\circ = \{ (N_{F^n/F}(t), N_{F^n/F}({}^x t)) \mid t \in T \}$$

agit trivialement sur Z''_x, donc $(\theta \otimes \theta'^\vee)_{| H_x^\circ \cap T^F \times T'^F}$ doit être trivial

$\Rightarrow {}^x(\theta' \circ N_{F^n/F}) = \theta \circ N_{F^n/F}$

<u>Formulation duale</u> : on va remplacer (T, θ) par $(T^\vee, s)$

où $T^\vee$ est un tore dual de T et $s \in T^\vee$

Fixons T un tore max. F-stable

$\mathcal{X}^*(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ $(\simeq \mathbb{Z}^n \quad n = \dim T)$

$\mathcal{X}_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$

groupes abéliens des caractères et cocaractères de T

On a
$$\begin{aligned} \mathcal{X}^*(T) \times \mathcal{X}_*(T) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \\ (\lambda, \gamma) &\longmapsto \gamma \circ \lambda \end{aligned}$$

forme bilinéaire sym. non-dégénérée.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{X}_*(T)$ et $\mathcal{X}^*(T)$ sont duaux l'un de l'autre comme $\mathbb{Z}$-modules libres

<u>Lemme</u> : On a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \to X_*(T) \xrightarrow{F-1} X_*(T) \xrightarrow{\psi} T^F \to 0$$

générateur de $\mathbb{F}_{q^n}^\times$

avec $\psi(\gamma) = N_{F^n/F}\left(\gamma\left(\sqrt[q^n-1]{1}\right)\right)$

et $n \geq 1$ tq T est déployé sur $\mathbb{F}_{q^n}$

<u>preuve</u> : supposons $n=1$, de sorte que

$$T \simeq \mathbb{G}_m \times \cdots \times \mathbb{G}_m$$

avec F agissant par $a \mapsto a^q$ sur chaque copie de $\mathbb{G}_m$

On a
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X(\mathbb{G}_m) \arrow[r, "q-1"] & X(\mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathbb{F}_q^\times \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "q-1"] \arrow[u, phantom, "\wr"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\wr"] & \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\wr", "\text{choix de } \sqrt[q-1]{1}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ même suite pour $T \simeq (\mathbb{G}_m)^r$

Soit $n \geq 1$, on peut considérer le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_*(T) \arrow[r, "F^n-1"] \arrow[d, "N_{F^n/F}"] & X_*(T) \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, equal, "id"] & T^{F^n} \arrow[r] \arrow[d, "N_{F^n/F}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_*(T) \arrow[r, "F-1"] & X_*(T) \arrow[r, "\psi"] & T^F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

est commutatif si on a choisit $\sqrt[q^n-1]{1}$ et $\sqrt[q-1]{1}$ de sorte que $\left(\sqrt[q^n-1]{1}\right)^{\frac{q^n-1}{q-1}} = \sqrt[q-1]{1}$

- $F-1$ est injectif car $F^n = q^n \, id$
- $\mathcal{X}_*(T)$ est surjectif car $N_{F^n/F} : T^{F^n} \longrightarrow T^F$ l'est
- Si $\gamma \in \operatorname{Ker}\Psi = \operatorname{Ker}(N_{F^n/F}(\Psi'))$
  $= \operatorname{Ker}(\Psi' \circ N_{F^n/F})$

  alors $N_{F^n/F}(\gamma) \in \operatorname{Ker}\Psi' = \operatorname{Im}(F^n - 1)$

Mais $F^n - 1 = (F-1) \circ N_{F^n/F}$

et $N_{F^n/F} : \mathcal{X}_* \longrightarrow \mathcal{X}_*$ est injective

$\Rightarrow \gamma \in \operatorname{Im} F-1$ $\square$

Le lemme montre que tout caractère θ de T^F se relève en un caractère de $\mathcal{X}_*(T)$

par $\quad \tilde{\theta} : \gamma \mapsto \theta(\Psi(\gamma))$

et le diagramme $(*)$ montre que θ et $\theta \circ N_{F^n/F}$ ont le même relevé

Corollaire : (T, θ) est géométriquement conjugué à (T', θ')

$\Longleftrightarrow \exists g \in G \mid {}^g\tilde{\theta}' = \tilde{\theta}$

<u>Groupe de Langlands dual</u>

racines et coracines

G est paramétré par $(X^*(T), X_*(T), \Phi, \Phi^\vee)$

$G^\vee$ ——————— $(X_*(T), X^*(T), \Phi^\vee, \Phi)$

autrement dit on dispose d'un tore maximal $T^\vee \leq G^\vee$ avec un isomorphisme $X_*(T) \xrightarrow{\sim} X^*(T^\vee)$ envoyant $\Phi(T)^\vee$ sur $\Phi(T^\vee)$

De plus, si T F-stable on peut définir $F^\vee$ sur $G^\vee$ tq $T^\vee$ est $F^\vee$-stable

<u>Lemme</u> : $\mathrm{Irr}\, T^F \simeq (T^\vee)^{F^\vee}$

<u>preuve</u> : $(T^\vee)^{F^\vee} \simeq X_*(T^\vee)/(F^\vee - 1)X_*(T^\vee)$

$$\simeq X^*(T)/(F-1)X^*(T)$$

$$= \mathrm{Irr}\, T^F$$

par la suite exacte

$$0 \to X^*(T) \xrightarrow{F-1} X^*(T) \xrightarrow{\mathrm{res}_{T^F}} \mathrm{Irr}\, T^F \to 0 \quad \square$$

On a donc

$$\underset{\theta \in \mathrm{Irr}\, T^F}{(T, \theta)} \longmapsto \underset{s \in (T^\vee)^{F^\vee}}{(T^\vee, s)}$$

qui induit une bijection entre

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{classes de conjugaison} \\ \text{géométrique de paires } (T,\theta) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'él}^{ts} \\ \text{semisimples de } G^{\vee F^\vee} \end{array} \right\}$$

III - 3 Décomposition de Jordan

- Décomposition des classes

$s \in G$ semisimple $\iff$ diagonalisable sur $\overline{\mathbb{F}_q}$

$u \in G$ unipotent $\iff$ $u - 1$ nilpotent

$\iff$ toutes les vp de u sont égales à 1

(par plong^t $G \hookrightarrow Gl_n$)

[Jordan-Chevalley] Tout $g \in G$ s'écrit

$$g = su$$

avec
- s semi simple
- u unipotent
- $su = us$

i.e $u \in C_G(s)_{unip}$

$\rightsquigarrow$ décomposition de Jordan des classes de conjugaison

$$G/_{\sim} \longleftrightarrow \bigsqcup_{s \in G_{ss}/_{\sim}} C_G(s)_{unip}/_{\sim}$$

$$su \longleftarrow u$$

avec $\quad C_G(su) = C_{C_G(s)}(u)$

$\left(\text{donc } A_G(su) := \pi_0\left(C_G(su)\right) = \pi_0\left(C_{C_G(s)}(u)\right) = A_{C_G(s)}(u)\right)$

<u>Rappel</u> : si $g = su \in G^F$

G^F-orbites de $(su)^F \longleftrightarrow$ classes de conjugaison de $A_G(su)F$

- <u>Décomposition de Jordan des caractères</u>

On a vu que $\quad \operatorname{Irr} G^F = \bigsqcup_{s \in G^{*F}_{ss}/_{\sim}} \operatorname{Irr}(G^F \mid s)$

où $\operatorname{Irr}(G^F \mid s) = \left\{ \rho \mid \langle \rho, R_T^G(\theta) \rangle \neq 0 \text{ pour un } (T,\theta) \sim (s) \right\}$

<u>Thm</u> [Lusztig] Si $Z(G)$ est connexe, il existe une bijection

$$\operatorname{Irr}(G^F \mid s) \xleftarrow[\sim]{J_s} \operatorname{Irr}\left(C_{G^*}^F(s) \mid 1\right)$$

caractères unipotents

$\boxed{\text{tq}}$ $\quad R_T^G(\theta) \longleftrightarrow R_{T^*}^{C_{G^*}(s)}(1)$

Ex : (1) $s = 1$, rien à montrer !

(2) s régulier, i.e $C_{G^*}(s) = T^*$

alors $\mathrm{Irr}(C_{G^{*F}}(s) \mid 1) = \{1\}$ caractère trivial

$s \in T^{*F} \rightsquigarrow$ caractère $\hat{s}$ de T^F tq $\langle R_T^G(\hat{s}), R_T^G(\hat{s})\rangle = 1$

par la formule de Mackey.

donc $J_s(1_{T^{*F}}) = \pm R_T^G(\hat{s})$

(3) Plus généralt, si $C_{G^*}(s) = L^*$ Levi de G

et $\hat{s} \in \mathrm{Irr}\, L^F/[L^F, L^F]$ correspond à $s \in Z(L^F)$

on a

$$J_s = R_L^G(\hat{s} \otimes -)$$

Conséquence : $\dim J_s(\chi) = \dfrac{|G^F|_{p'}}{|C_{G^*}(s)^F|_{p'}} \dim \chi$

[vrai pour $\chi = R_{T^*}^{C_{G^*}(s)}(1)$, et dim ne dépend que de la projection uniforme]

A comparer avec $\#(su)_{G^F} = \dfrac{|G^F|}{|C_G(s)^F|} \#(u)_{C_G(s)^F}$

- <u>Digression : LLC</u>

F corps local, $\mathcal{O}$ idéal max de F et $F/\mathcal{O} = \mathbb{F}_q$

$$\begin{tikzcd}
 & \text{gp d'inertie} & & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\
1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \arrow[r] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & I_F \arrow[r] \arrow[u, equal] & W_F \arrow[r] \arrow[u, hook] & \langle \mathrm{Frob} \rangle \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 \\
 & & \text{groupe de Weil} \arrow[u, phantom, "="] & \mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "="] & \\
 & P_F \arrow[uu, hook] & \text{inertie sauvage} & &
\end{tikzcd}$$

avec $I_F/P_F \simeq \varprojlim_n \mathbb{F}_{q^n}^\times$

Paramètre de Langlands pour $G(F)$: $\phi : W_F \longrightarrow \check{G}(\mathbb{C})$

$\qquad$ ——— modéré ——— : $\phi_{|P_F} = 1$

Paramètre de Langlands pour $G(\mathbb{F}_q)$: restriction à I_F d'un paramètre modéré de $G(F)$

$\Leftrightarrow \quad \tilde{\phi} : \varprojlim_n \mathbb{F}_{q^n}^\times \simeq I_F/P_F \longrightarrow \check{G}(\mathbb{C})$

équivariante pour l'action du Frobenius

Si on choisit un générateur topologique γ de I_F/P_F

c'est équivalent à la donnée de $\hat{\phi}(\gamma)$, élt semi simple de $G^*(\mathbb{C})$ conjugué à sa puissance q-ième

$$\{\text{Paramètres de Langlands pr } G(\mathbb{F}_q)\} /\sim G^\vee(\mathbb{C})$$

$$\updownarrow$$

classes de conjugaison F-stables d'élts semisimples de $G^\vee(\mathbb{F}_q)$

Rmq : le choix du générateur est aussi présent dans l'identification $T^F \simeq X_*(T) / (wF-1) X_*(T)$

Donc séries géométriques $=$ L-paquets

[Deligne - Langlands] On rajoute un élt nilpotent de Lie $(C_{G^\vee}(\phi))$

$\leadsto$ on rajoute un elt unipotent de $C_{G^\vee}(s)$

et $\pi_0(C_{G^\vee}(\text{param}))$ intervient dans le paramétrage du L-paquet

i.e $A_{C_{G^\vee}(s)}(u)$ par le groupe fini

III - 4 Caractères unipotents

Classes unipotentes $\quad\quad$ Caractères unip $= \mathrm{Irr}(G^F|1)$

$\cap$ $\quad\quad\quad\quad$ $\cap$

Classes de conj de G $\quad\quad$ $\mathrm{Irr}\, G^F$

<u>Rappel</u> : $\mathrm{Irr}(G^F|1) = \{ \rho \in \mathrm{Irr}\, G^F \mid \langle \rho, R_T^G(1) \rangle \neq 0$ pour un certain $T \}$

Les caractères unipotents vont être

* insensible à $Z(G)$ et $G/[G,G]$
* indépendants de q (dur)

On va les paramétrer en utilisant les classes unipotentes, notamment

* $A_G(u) := C_G(u)/C_G(u)^\circ$
* l'ordre $(u) \le (v) \iff (u) \subseteq \overline{(v)}$

$\mathcal{O}_{reg}$ $\quad$ élts "réguliers" $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ des GL_n

$\vdots$

$\{1\}$ $\quad$ trivial

- <u>Cas de GL_n</u>(q)

Série principale unipotente = constituents de $\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F}(1_{B^F})$
$= R_T^G(1)$, T déployé

On a vu $R_T^G(1) = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{Irr} W} \rho_\chi^{\oplus \dim \chi}$

avec $\rho_1 = 1_{G^F}$ rep. triviale
$\rho_{sgn} = St$ —— Steinberg

Ici, $W = \mathfrak{S}_n$ et on a un paramétrage des représentations irr. par les partitions de n
$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0)$ $\quad \sum \lambda_i = n$

$$\{\text{partitions de } n\} \longleftrightarrow \{\mathrm{Irr}\, W\} \longleftrightarrow \mathrm{Irr}(G^F | 1)$$
$$\lambda \longmapsto \chi_\lambda \longmapsto \rho_\lambda := \rho_{\chi_\lambda}$$

avec $\chi_{(n)} = 1$, $\chi_{(1,\dots,1)} = \chi_{(1^n)} = \mathrm{sgn}$

et $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_r}}^{\mathfrak{S}_n}(1) = \chi_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} m_{\lambda\mu} \chi_\mu$

$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{\lambda_1^*} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\lambda_r^*}}^{\mathfrak{S}_n}(\mathrm{sgn}) = \chi_\lambda + \sum_{\mu \lhd \lambda} m'_{\lambda\mu} \chi_\mu$

χ_λ unique intervenant dans les deux

<u>Ex</u> : $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_3}(1) = 1 + \mathrm{ref}$ $\qquad \mathrm{ref} = \chi_{(21)}$

$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_3}(\mathrm{sgn}) = \mathrm{sgn} + \mathrm{ref}$

On définit $R_\lambda = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \chi_\lambda(w) R_{T_w}^G (1_{T_w^F})$

combinaison de caractères unipotents

Alors : $* \ \langle R_\lambda, R_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ par les formules d'orthogonalité

$* \ R_\lambda \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}\, G^F$

en utilisant le fait que $\chi_\lambda \in \mathbb{Z}\,\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\mu}^{\mathfrak{S}_n} 1$

on a $\qquad R_\lambda \in \mathbb{Z}\, R_{GL_\mu}^{GL_n}(R_{(\mu)})$

$* \ R_\lambda \in \mathrm{Irr}\, G^F$ car $\langle R_\lambda, R_\lambda \rangle = 1$

donc $\pm R_\lambda \in \mathrm{Irr}\, G^F$ mais $R_{T_1}^G(1) = \sum \chi_\lambda(1) R_\lambda$

$\leadsto \ \mathrm{Irr}(GL_n(q) | 1) = \{R_\lambda\}_{\lambda \vdash n} = \{\rho_\lambda\}_{\lambda \vdash n}$

On peut montrer que $R_\lambda = \rho_\lambda$

D'autre part

$\{\text{classes unipotentes de } GL_n\} \longleftrightarrow \{\text{partitions de } n\}$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \{ \\ \lambda_2 \{ \\ \vdots \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} = u_\lambda \qquad \lambda = \lambda_1 \geq \cdots$$

Thm : Soit $\lambda, \mu \vdash n$

(1) $\rho_\lambda(\mathcal{O}_\mu) \neq 0 \Rightarrow \mu \trianglelefteq \lambda$ ie $\mathcal{O}_\mu \subseteq \overline{\mathcal{O}_\lambda}$

(2) $\rho_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) = q^{d_\lambda}$ avec $d_\lambda = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda$

$\rightsquigarrow$ bijection directe entre

$\{\text{car. unip de } GL_n(q)\} \longleftrightarrow \{\text{classes unip de } GL_n\}$

$\rho \longmapsto$ plus gd classe $\mathcal{O}$ tq $\rho_{|\mathcal{O}} \neq 0$

- Cas général

On définit le support unipotent de ρ, noté $\mathcal{O}_\rho$ comme (l'unique !) classe unipotente F-stable maximale tq

$$\sum_{u \in \mathcal{O}_\rho^F} \rho(u) \neq 0$$

$\{\text{caractères unipotents}\} \longrightarrow \{\text{classes unipotentes}\}$

À l'exception du type A_n, cette application n'est ni injective ni surjective

- image $=:$ classes spéciales
- fibres $=:$ familles de caractères

$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Irr}(G^F \mid 1) = \bigsqcup_{\mathcal{O} \text{ spéciale}} \underbrace{\mathrm{Irr}(G^F \mid \mathcal{O})}$$

caractères unipotents de support $\mathcal{O}$

classe régulière

Ex : $\mathrm{Irr}(G^F \mid \mathcal{O}_{reg}) = \{1_{G^F}\}$

$\mathrm{Irr}(G^F \mid \{1\}) = \{St_{G^F}\}$

$\mathrm{Irr}(GL_n(q) \mid \mathcal{O}_\lambda) = \{\rho_\lambda\}$

Thm [Lusztig] Supposons F ↻ W trivialement (+ simple)

Soit $\mathcal{O}$ spéciale et $u \in \mathcal{O}^F$

Il existe $\bar{A} \twoheadleftarrow C_G(u)/C_G(u)^\circ$ quotient canonique

tq

$$\mathrm{Irr}(G^F \mid \mathcal{O}) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{(a, \psi) \mid a \in \bar{A},\ \psi \in \mathrm{Irr}\, C_{\bar{A}}(a)\}/\sim_A$$

conjugaison

De plus, on connait la décomposition de $R_T^G(1)$ selon ce paramétrage

Ex : • $G = GL_n$, $C_G(u) = C_G(u)^\circ$ donc $\bar{A} = 1$

• $G = Sp_4$ $\quad W = \overset{s}{\bullet} = \overset{t}{\bullet}$

$\mathrm{Irr}\, W = \{ \underbrace{1, \varepsilon, \theta, \theta\varepsilon}_{\dim 1}, \underbrace{\chi}_{\dim 2} \}$

$\rightsquigarrow$ 5 caractères de la série principale et par $T = T_1$ déployé

$$R_{T_1}^G(1) = 1 + St + \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + 2\rho_\chi$$

On peut calculer tous les $R_{T_w}^G(1)$:

• si $w = s$ ou t, on peut utiliser le Levi contenant w et on a

$$\begin{aligned} R_{T_w}^G(1) &= R_L^G\left(R_{T_w}^L(1)\right) \\ &= \mathrm{Ind}_{W_L}^W(1 - St) \\ &= 1 \underset{\text{selon } w = s \text{ ou } t}{\pm} (\rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon}) - St \end{aligned}$$

• si $w = st$ on a $R_{T_w}^G(1) = 1 + St + ?$
avec $\langle R_{T_w}^G(1), R_{T_w}^G(1) \rangle = \# C_W(w) = 4$

donc $R_{T_w}^G(1) = 1 + St + \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2$
avec $\rho_1, \rho_2 \in Irr(G^F | 1)$
et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$

$\langle R_{T_w}^G(1), R_{T_1}^G(1) \rangle = 0$
$\Rightarrow \quad \langle \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 , \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + 2\rho_\chi \rangle = -2$

$\langle R_{T_w}^G(1), R_{T_s}^G(1) \rangle = 0$
$\Rightarrow \quad \langle \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 , \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} \rangle = 0$

$\leadsto$ deux possibilités :
(1) $\varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 = -\rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon}$

(2) $\varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 = -\rho_\chi \pm \rho$ cuspidal

le cas (1) est exclu par analyse des dimensions

Pour $R_{T_{w_0}}^G$ on utilise $1_{G^F} = \frac{1}{|W|} \sum_w R_{T_w}^G$

et on trouve

- $R^G_{T_{w_0}} = 1 + St - \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} - 2\rho$

<u>Bilan</u> :

w	$R^G_{T_w}$
1	$1 + St + \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + 2\rho_\chi$
$s,\ tst$	$1 - St + \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon}$
$t,\ sts$	$1 - St - \rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon}$
$st,\ ts$	$1 + St - \rho_\chi + \rho$
$stst$	$1 + St - \rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} - 2\rho$

on en déduit les $R_\psi = \frac{1}{|W|} \sum \psi(w) R^G_{T_w}(1)$
pour $\psi \in \mathrm{Irr}\, W$

ψ	R_ψ
1	1
ε	St
θ	$\frac{1}{2}(\rho_\theta - \rho_{\theta\varepsilon} + \rho_\chi - \rho)$
$\theta\varepsilon$	$\frac{1}{2}(-\rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} + \rho_\chi - \rho)$
χ	$\frac{1}{2}(\rho_\theta + \rho_{\theta\varepsilon} - \rho_\chi + \rho)$

À mettre en parallèle aux familles

$\mathcal{O}$	$C_G(u)/C_G(u)^\circ$	$\bar{A}$	$\mathrm{Irr}(G^F \mid \mathcal{O})$
(4)	$\mathbb{Z}/2$	1	$\{1\}$
(2^2)	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\{\rho_\theta, \rho_{\theta\varepsilon}, \rho_x, \rho\}$
~~(21^2)~~	~~$\mathbb{Z}/2$~~	pas spéciale	
(1^4)	1	1	$\{\mathrm{St}\}$

Pour $\bar{A} = \mathbb{Z}/2$ on a

$$\{(a, \psi) \mid a \in \bar{A}, \psi \in \mathrm{Irr}(C_{\bar{A}}(a))\}/_\sim = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$
$$= \{\pm\} \times \{\pm\}$$

Le paramétrage de Lusztig est

$$\rho_\theta \longleftrightarrow + -$$
$$\rho_{\theta\varepsilon} \longleftrightarrow - +$$
$$\rho_x \longleftrightarrow + +$$
$$\rho \longleftrightarrow - -$$

matrice de Fourier

et on a

$$(R_\chi, R_\theta, R_{\theta\varepsilon}, R) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} (\rho_\chi, \rho_\theta, \rho_{\theta\varepsilon}, \rho)$$

correspond à un faisceau caractère cuspidal