SUR LA COHOMOLOGIE CONTINUE DES REPRESENTATIONS

UNITAIRES IRREDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE

SEMI-SIMPLES COMPLEXES

par P. DELORME

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

Plateau de Palaiseau 91128 PALAISEAU Cedex (France)

Abstract :

Let G a complex connected, simply connected, semi-simple Lie group. Let $\mathfrak{g}$, its Lie algebra, $\mathfrak{b}_o = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_o^+$ a Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$. To each parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ containing $\mathfrak{p}_o$, we associate a unitary irreducible representation of G, π_P, which has a trivial infinitesimal character and which is unitarily induced from P. Here P denotes the parabolic subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{p}$. Moreover we have :

$$H_c^{i+\ell_{\mathfrak{s}}}(G,H_P) \simeq \bigoplus_{r+s=i} H^r(\mathfrak{s},\mathbb{C}) \otimes \Lambda^s\mathfrak{h}^*$$

Here H_P is the space of π_P, $\ell_{\mathfrak{s}}$ is the number of positive roots of the pair $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_o)$, which do not belong to the system of roots of the pair $(\mathfrak{s},\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}_o)$. When the group is of rank less than 3, it is shown that every unitary irreducible representation of G with non trivial continuous cohomology is equivalent to one of the π_P. (*)

(*) T. Enright has proved that it holds in general, without assumptions on the rank of G.

0 - Introduction

Aux yeux de l'auteur cet article est un pas vers la détermination de toutes les représentations unitaires irréductibles des groupes semi-simples complexes possédant une cohomologie continue non triviale.
Une telle représentation doit avoir un caractère infinitésimal trivial.
Le module de Harish Chandra irréductible lui correspondant a la même propriété et est unitarisable. A fortiori il est hermitien. Comme conséquence de la classification des modules de Harish Chandra irréductibles rappelée en II.1, nous donnons une paramétrisation de ceux qui sont à la fois hermitien et de caractère infinitésimal trivial (II.3) .
Nous montrons que certains d'entre eux proviennent de représentations unitaires induites à partir de sous groupes paraboliques (II.4) . Au paragraphe III , nous calculons la cohomologie continue de ces représentations induites (unitaires irréductibles). Ce calcul repose sur l'utilisation d'un lemme de Shapiro et d'une suite spectrale de Hochschild Serre en cohomologie continue. L'étude de la dégénérescence de la suite spectrale ainsi obtenue est menée à bien grâce au théorème de B . Kostant sur la cohomologie du radical nilpotent d'une sous algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi simple complexe dans le module trivial (c.f. [VIII] 2.5.2.1.). Enfin au paragraphe IV nous étudions le cas des groupes de rang inférieur ou égal à deux.

I - NOTATIONS

1) Pour tout espace vectoriel V, on note V^* l'espace dual de V.

Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{m}$, on note $\mathbb{U}(\mathfrak{m})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{m}$, et $u \to \tilde{u}$ l'antiautomorphisme principal de $\mathbb{U}(\mathfrak{m})$.

On désigne par G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_o$ de $\mathfrak{g}$, on note Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}_o$ dans $\mathfrak{g}$ W le groupe de Weyl, $\mathbb{P}$ le réseau des poids. On fixe un système Δ^+ de racines positives, on note Σ l'ensemble des racines simples de Δ^+, on pose $\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$. On fixe une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$, on note X_α l'élément de cette base de poids $\alpha \in \Delta$, on pose $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ pour $\alpha \in \Delta^+$. On note $u \to {}^t u$ l'antiautomorphisme d'ordre 2 de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ défini par ${}^t X_\alpha = X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ et ${}^t H = H$ pour $H \in \mathfrak{h}_o$.

Pour tout espace vectoriel complexe V, on note V_R l'espace vectoriel réel obtenu par restriction des scalaires. Pour tout espace vectoriel réel V^1, on note V^1_C le complexifié de V^1. Ainsi, $(\mathfrak{g}_R)_C$ est l'algèbre de Lie complexifiée du groupe G considéré comme groupe de Lie réel. On identifie $(\mathfrak{g}_R)_C$ au produit direct $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par l'isomorphisme défini par $X \to (X, \bar{X})$ pour $X \in \mathfrak{g}_R$, où $\bar{X}$ est l'imaginaire conjugué de X par rapport à la forme réelle normale de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathbb{U} = \mathbb{U}[(\mathfrak{g}_R)_C]$. On note $\mathfrak{l}$ la forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$ formée des $X \in \mathfrak{g}$ tels que ${}^t X = -\bar{X}$. On note j l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $(\mathfrak{l}_R)_C \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ défini par $j(X) = (X, -{}^t X)$ pour $X \in \mathfrak{g}$.

On pose $\mathfrak{n}_o^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{C} X_\alpha$, $\mathfrak{n}_o^- = {}^t \mathfrak{n}_o^+$.

On note $\mathfrak{p}_o$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{p}_o = \mathfrak{h}_o \oplus \mathfrak{n}_o^+$.

On notera $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{p}_o$. On a $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, où $\mathfrak{n}^+$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$, et où $\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h}$ est la partie réductive, de centre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_o$ de $\mathfrak{p}$.

On pose $\Delta_{\mathfrak{s}}^+ = \{\alpha \in \Delta^+ , X_\alpha \in \mathfrak{s}\}$, $\Sigma_{\mathfrak{s}} = \Delta_{\mathfrak{s}}^+ \cap \Sigma$

$$\sigma_{\mathfrak{s}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}}^+} \alpha$$

$$P_{\mathfrak{s}}^+ = \{p \in \mathfrak{h}_o^* ; p(H_\alpha) \in \mathbb{N} , \forall \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}\}$$

On note $w_{\mathfrak{s}}$ l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}_o \cap \mathfrak{s})$. On note K , H_o , P_o , N_o^+ etc .. les sous-groupes analytiques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}_o$, $\mathfrak{p}_o$, $\mathfrak{n}_o^+$ etc .. On identifie comme plus haut, l'algèbre de Lie complexifiée de H_o à $\mathfrak{h}_o \times \mathfrak{h}_o$ et son dual à $\mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$. On pose $\rho = (\sigma,\sigma)$ et $\rho_{\mathfrak{s}} = (\sigma_{\mathfrak{s}} , \sigma_{\mathfrak{s}})$.
Pour $(p,q) \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$, $p-q \in P$, $h \in H_o$ on note $h^{(p,q)}$ la valeur en h du caractère de H_o de différentielle (p,q) .

Si $\mathfrak{T}$ est une représentation d'une algèbre de Lie , on note $E_{\mathfrak{T}}$ le module correspondant et $\mathfrak{T}^*$ la représentation contragrédiente de $\mathfrak{T}$.

2) Une représentation irréductible de dimension finie π de $\mathfrak{p}$ est triviale sur $\mathfrak{n}^+$ et scalaire sur $\mathfrak{h}$. Soit e un vecteur non nul de l'espace de π tel que $\pi(X_\alpha)e = o$ pour $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}}$. On appellera plus haut poids de π le poids p de e par rapport à $\mathfrak{h}_o$. Ce poids détermine π . Un élément p de $\mathfrak{h}_o^*$ est le plus haut poids d'une représentation irréductible de dimension finie de $\mathfrak{p}$ si et seulement si $p \in P_{\mathfrak{s}}^+$. Le plus haut poids de la contragédiente π^* de π est $-w_{\mathfrak{s}}p$.

On identifie $(\mathfrak{p}_R)_C$ à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$. Une représentation irréductible ξ de dimension finie de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est de la forme $\pi_1 \times \pi_2$ où π_1 et π_2 sont des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{p}$. Soit p_1 (resp. p_2) le plus haut poids de π_1 (resp. π_2) ; on dira que (p_1, p_2) est le plus haut poids de ξ. Comme S est simplement connexe, une représentation irréductible de dimension finie de plus haut poids (p_1, p_2) de $(\mathfrak{p}_R)_C$ est la différentielle d'une représentation de P si et seulement si $p_1 - p_2 \in \mathcal{P}$.

3) Soient $\xi = \pi_1 \times \pi_2$ une représentation irréductible de dimension finie de P, de plus haut poids (p_1, p_2) et E_ξ l'espace de ξ. Le groupe G opère par translations à gauche dans l'espace $\mathcal{L}_p^\infty(\xi)$ des fonctions φ indéfiniment différentiables sur G à valeurs dans E_ξ qui vérifient $\varphi(g\ s\ h\ n) = \xi(sh)^{-1}\ h^{-\rho}\ \varphi(g)$ pour $g \in G$, $s \in S$, $h \in H$, $n \in N$.

Le sous-espace (dense) de $\mathcal{L}_p^\infty(\xi)$ formé des éléments K-finis est stable par convolution à gauche avec les éléments de $\mathfrak{U}$, ce qui en fait un $\mathfrak{U}$-module. On le notera $\mathcal{L}_p(\xi)$, ou $\mathcal{L}_p(\pi_1, \pi_2)$, ou $\mathcal{L}_p(p_1, p_2)$. On posera $\mathcal{L}_{p_o}(p_1, p_2) = \mathcal{L}_o(p_1, p_2)$.

4) Identifiant $\mathfrak{t}_C$ à $\mathfrak{J}$, grâce à l'isomorphisme j, on appelle plus haut poids d'une représentation irréductible de K le plus haut poids de sa différentielle. Pour $\delta \in \mathcal{P}$, on note $\mathcal{L}_p^\delta(\xi)$ la K-composante isotypique de plus haut poids δ de $\mathcal{L}_p(\xi)$. Soit $(p,q) \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ tel que $p-q \in \mathcal{P}$; on note $\mathcal{L}_o^o(p,q)$ la K-composante isotypique de $\mathcal{L}_o(p,q)$ dont le plus haut poids est l'élément de la chambre de Weyl positive conjugué de $p-q$ sous l'action du groupe de Weyl. Le K-module $\mathcal{L}_o^o(p,q)$ est irréductible.

5) Le sous module de $\mathcal{L}_o(p,q)$, $\mathfrak{U}\mathcal{L}_o^o(p,q)$ a un et un seul sous module propre maximal (cf [V]3.4.) Nous noterons $V(p,q)$ le quotient irréductible de $\mathfrak{U}\mathcal{L}_o^o(p,q)$, et $r_{p,q}$ la représentation irréductible de $\mathfrak{U}$ dans $V(p,q)$.
<u>Remarque</u> : $V(p,q)$ est l'unique sous quotient irréductible de $\mathcal{L}_o(p,q)$ qui contient un sous K-module isomorphe à $\mathcal{L}_o^o(p,q)$.

II – Modules de Harish Chandra irréductibles, de caractère infinitésimal trivial. Etude partielle de l'unitarisibilité.

1) Théorème (c.f. [V] 1.9,4.1,4.5) :

(i) Soit V un module de Harish Chandra irréductible. Il existe $(p,q) \in (\mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*)$ tel que $p-q \in \mathcal{P}$ et tel que la représentation $r_{p,q}$, de $\mathbb{U}$, soit isomorphe à la représentation de $\mathbb{U}$ dans V.

(ii) Soient (p,q), $(p',q') \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ tels que $p-q$, $p'-q' \in \mathcal{P}$. $r_{p,q}$ et $r_{p',q'}$ sont équivalentes si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $p' = wp$ et $q' = wq$.

(iii) Soient (p,q), (p',q') comme en (ii). Alors $r_{p,q}$ et $r_{p',q'}$ ont même caractère infinitésimal si et seulement si il existe w_1, $w_2 \in W$ tels que $p' = w_1 p$, $q' = w_2 q$.

2) On dit qu'un module d'Harish Chandra, V, est hermitien s'il existe sur V une forme hermitienne invariante et non dégénérée.

Pour $(p,q) \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ on définit $\bar{p}$, $\bar{q} \in \mathfrak{h}_o^*$ et $\overline{(p,q)} \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ par :
$\bar{p}(H) = \overline{(p\bar{H})}$, $\bar{q}(H) = \overline{q(\bar{H})}$, $\overline{(p,q)} = (\bar{q},\bar{p})$ $(H \in \mathfrak{h}_o)$.

Alors on a :

Lemme (c.f. [VI] Lemme 1) :

Pour $(p,q) \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ avec $p-q \in \mathcal{P}$, $V(p,q)$ est hermitien si et seulement si il existe $w \in W$ tel que $(wp,wq) = -\overline{(p,q)}$.

3) Proposition :

L'ensemble des modules de Harish Chandra, hermitiens, irréductibles, de caractère infinitésimal trivial à équivalence près, s'identifie à l'ensemble des involutions $\mathrm{Inv}\,W$ de W par l'application $w \in \mathrm{Inv}(W) \to V(w\sigma,-\sigma)$.

De plus $V(p,q)$ est hermitien de caractère infinitésimal trivial si et seulement si il existe u,w avec $w^{-1}u \in \mathrm{Inv}\,W$ et $p = u\sigma$, $q = -w\sigma$.

Démonstration :

Il suffit de remarquer que $V(-\sigma,-\sigma)$ est le module trivial et que $w_o\,\sigma = -\sigma$ si (et seulement si) w_o est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl . La proposition est alors une application triviale du théorème II.1 et du lemme II.2 .

4) Unitarisabilité de certains $V(w\sigma,-\sigma)$, $w \in \mathrm{Inv}\, W$.

Proposition :

(i) Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{p}_o$
Les notations étant celles de I.1, $V(w_{\mathfrak{s}}\sigma,-\sigma)$ est isomorphe à la représentation de $\mathfrak{U}$ sur l'espace des vecteurs K-finis de la représentation unitaire de G , π_P , induite (au sens de Mackey) du caractère unitaire de P correspondant à $(\sigma -\sigma_{\mathfrak{s}}\ ,\ \sigma_{\mathfrak{s}} -\sigma)$. En particulier π_P est irréductible.
(ii) Pour des sous algèbres distinctes $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ contenant $\mathfrak{p}_o$, π_P et $\pi_{P'}$ sont non équivalentes.

Démonstration :

(i) D'après [IV] Proposition 2.6. et 2.7 il existe un isomorphisme entre $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(\sigma -\sigma_{\mathfrak{s}}\ ,\ \sigma_{\mathfrak{s}} -\sigma)$ et un sous module de $\mathcal{L}_o(\sigma -2\sigma_{\mathfrak{s}},-\sigma)$ qui contient $\mathfrak{U}\mathcal{L}_o^o(\sigma -2\sigma_{\mathfrak{s}},-\sigma)$. D'autre part $\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(\sigma -\sigma_{\mathfrak{s}},\sigma_{\mathfrak{s}} -\sigma)$ est irréductible. D'après [IV] Corollaire 2.13, il suffit pour le voir, de vérifier que :

$$\forall \alpha \in \Delta^+ -\Delta^+_{\mathfrak{s}}$$
$$[(\sigma -\sigma_{\mathfrak{s}}) + \sigma_{\mathfrak{s}}](H_\alpha) = \sigma(H_\alpha)$$
$$[(\sigma_{\mathfrak{s}} -\sigma) + \sigma_{\mathfrak{s}}](H_\alpha) = (-w_{\mathfrak{s}}\sigma)(H_\alpha)$$

ne sont pas des entiers non nuls de même signe. Or pour tout α dans Δ^+ on a $\sigma(H_\alpha) > 0$. L'irréductibilité résulte alors de $w_{\mathfrak{s}}(\Delta^+ -\Delta^+_{\mathfrak{s}}) \subset \Delta^+$.

$\mathcal{L}_{\mathfrak{p}}(\sigma -\sigma_{\mathfrak{s}},\sigma_{\mathfrak{s}} -\sigma)$ est donc isomorphe à un sous module irréductible de $\mathcal{L}_o(\sigma -2\sigma_{\mathfrak{s}},-\sigma)$ qui contient $\mathfrak{U}\mathcal{L}_o^o(\sigma -2\sigma_{\mathfrak{s}}\ ,-\sigma)$.
D'après la remarque 1.5, ce sous module est isomorphe à $V(w_{\mathfrak{s}}\sigma\ ,\ -\sigma)$.
Pour achever de prouver (i) , il suffit de remarquer que la représentation

de P de plus haut poids $(\sigma - \sigma_{\mathfrak{s}} , \sigma_{\mathfrak{s}} - \sigma)$ est un caractère unitaire de P .

(ii) résulte clairement de (i) et du théorème II.1 .

Notation : On notera H_P l'espace de π_P .

III - <u>Calcul de</u> $H_c^*(G,H_P)$

Ici H_c^* dénote la cohomologie continue (c.f. [III]) .

1) <u>Lemme</u> :

On a $H_c^*(G,H_P) \simeq H_c^*(P,\mathbb{C}_{\chi_P})$ où χ_P est le caractère de P correspondant à $(2(\sigma - \sigma_{\mathfrak{s}}),0) \in \mathfrak{h}_o^* \times \mathfrak{h}_o^*$ et où l'on a écrit $\mathbb{C}_{\chi_P}$ pour montrer que P agit dans $\mathbb{C}$ par χ_P .

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le lemme de Shapiro valable en cohomologie continue pour l'induction au sens de Mackey (c.f. [I]) .

2) <u>Lemme</u> :

Il existe une suite spectrale de terme $E_2^{r,s} = H_c^r(SH,H_c^s(N^+,\mathbb{C}_{\chi_P}))$ qui converge vers $H_c^*(P,\mathbb{C}_{\chi_P})$ (l'action de SH sur $H_c^*(N^+,\mathbb{C}_{\chi_P})$ est précisée ci-dessous).

Démonstration :

Notons d'abord que χ_P est trivial sur N^+ .

Pour utiliser la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie continue, il suffit de vérifier que $H_c^*(N^+,\mathbb{C})$ est séparé. Ce fait est démontré dans III prop. 5. La démonstration qui en est donnée est incomplète. Toutefois nous savons que le résultat est valable lorsque l'on se limite à regarder des modules qui sont des espaces de Fréchet (communication orale de D. Wigner), ce qui est bien notre cas. Au vu du théorème du graphe fermé pour les espaces de Fréchet, pour vérifier que $H_c^*(N^+,\mathbb{C})$ est séparé, il suffit de voir que $H_c^*(N^+,\mathbb{C})$ est de dimension finie. Mais $H_c^*(N^+,\mathbb{C}) \simeq H_{C^\infty}^*(N^+,\mathbb{C})$, où $H_{C^\infty}^*$ signifie cohomologie différentiable (c.f. [I] par exemple). Utilisant la suite spectrale de Van Est ([VII]) et remarquant que N^+ est contractile on obtient un isomorphisme algébrique entre $H_c^*(N^+,C)$ et $H^*(n^+ \times n^+,C)$ (cohomologie de l'algèbre de Lie complexe $n^+ \times n^+$ dans le module trivial C) qui est clairement de dimension finie. L'application de [III](prop.5) fournit le lemme. Précisons l'action de SH sur $H_c^s(N^+,C_{\chi_p})$. Elle s'obtient par passage au quotient de l'action de SH sur $C^s(N^+,C)$ (cochaînes homogènes continues de degré s) que l'on définit ainsi :

pour $f \in C^s(N^+,C)$ et $g \in SH$ on pose

$$(g.f)(n_o,\dots,n_s) = \chi_p(g)\ f(g^{-1}n_o g ,\dots, g^{-1}n_s\ g)$$

D'autre part $H_c^*(N^+,C) \simeq H^*(n^+ \times n^+,C)$. Il en résulte une structure de SH-module sur $H^*(n^+ \times n^+,C)$ que nous décrivons maintenant. D'abord, il existe une action naturelle de SH dans $H^*(n^+ \times n^+,C)$: notant Ad^* la représentation coadjointe de SH dans $(n^+ \times n^+)^*$ (où $n^+ \times n^+$ est regardée comme la complexifiée de l'algèbre de Lie de N^+), on fait agir SH sur $\Lambda^s(n^+ \times n^+)^*$ par $\Lambda^s\ Ad^*$, puis l'on passe au quotient (la différentielle commute à cette action sur l'espace des cochaînes). D'autre part, on fait agir SH sur C par χ_p et l'on note encore C_{χ_p} le SH-module ainsi obtenu. Alors le SH-module que l'on étudie est isomorphe au produit tensoriel $H^*(n^+ \times n^+,C) \otimes C_{\chi_p}$ (où $H^*(n^+ \times n^+,C)$ est muni de sa structure naturelle de SH-module). Le module ainsi obtenu sera noté $H^*(n^+ \times n^+,C_{\chi_p})$ dans la suite.

3) <u>Lemme</u> :

Il existe une suite spectrale de terme $E_2^{r,s} \simeq H_c^r(SH,H^s(n^+ \times n^+,C_{\chi_p}))$ qui converge vers $H_c^*(P,C_{\chi_p})$.

<u>Démonstration</u> :

Résulte clairement ce qui précède.

4) Soient p, q des éléments de $\mathcal{P}_{\mathfrak{s}}^+$ tels que $p-q \in \mathcal{P}$. On note $F(p,q)$ le SH-module simple de dimension finie de plus haut poids (p,q). Pour $w \in W$ on note $\ell(w)$ sa longueur. On note $W^{\mathfrak{s}}$ le système des représentants

de longueur minimum des classes à gauche dans W modulo $W_{\mathfrak{g}}$.

Alors on a :

Lemme (c.f. [VIII] 2.5.2.1 , 2.5.2.6) :

Muni de sa structure naturelle de SH-module, $H^s(n^+ \times n^+, \mathbb{C})$ est isomorphe

à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{w,w' \in W^{\mathfrak{g}} \\ \ell(w)+\ell(w')=s}} F_{(w\sigma-\sigma, w'\sigma-\sigma)}$

5) Lemme :

$H_c^*(SH, F(p,q)) \neq 0$ si et seulement si $F(p,q)$ est le SH-module trivial (noté $\mathbb{C}$ dans la suite)

Démonstration :

Si $H_c^*(SH, F(p,q)) \neq 0$, $F(p,q)$ est de caractère infinitésimal trivial (c.f. [II] ch. I, par.4) . On voit facilement que cela implique $F(p,q) = \mathbb{C}$.

6) Lemme :

(i) $H_c^r(SH, H^s(n^+ \times n^+, \mathbb{C}_{\chi_P})) = 0$

si $s \neq \ell_{\mathfrak{g}}$ $(\ell_{\mathfrak{g}} = \text{Card } \Delta^+ - \Delta^+_{\mathfrak{g}})$

(ii) $H_c^r(SH, H^{\ell_{\mathfrak{g}}}(n^+ \times n^+, \mathbb{C}_{\chi_P})) \simeq H_c^r(SH, \mathbb{C})$

Démonstration :

D'après le lemmeIII.4 on a :

$$H^s(n^+ \times n^+, \mathbb{C}_{\chi_P}) \simeq \bigoplus_{\substack{w,w' \in W^{\mathfrak{g}} \\ \ell(w)+\ell(w')=s}} F_{(w\sigma - \sigma + 2\sigma - 2\sigma_{\mathfrak{g}},\ w'\sigma - \sigma)}$$

Du lemme III.5, on déduit :

$$H^*(SH, H^s(n^+ \times n^+, \mathbb{C}_{\chi_P})) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists w,w' \in W^{\mathfrak{g}} , \ \ell(w) + \ell(w') = s \\ w\sigma - \sigma = -2(\sigma - \sigma_{\mathfrak{g}}), w'\sigma - \sigma = 0 \end{cases}$$

Or $w\sigma - \sigma = -2(\sigma - \sigma_{\mathfrak{g}})$, $w'\sigma - \sigma = 0$ implique $\begin{cases} w = w_{\mathfrak{g}} w_o \\ w' = 1 \end{cases}$ et les autres conditions sont vérifiées si et seulement si $s = \ell_{\mathfrak{g}}$. Le lemme en résulte.

7) Lemme :

Si L est un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe, simplement connexe, $\mathfrak{l}$, son algèbre de Lie, on a : $H^*_c(L,\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{l},\mathbb{C})$.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{u}$ l'algèbre de Lie d'un sous groupe compact maximal, U, de L. Alors $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ est une décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple réelle $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$. Posant $\mathfrak{r} = i\mathfrak{u}$, la représentation de U dans $\mathfrak{r}$ est isomorphe à la représentation coadjointe de U. Alors il résulte de [II] (ch.2) et de ce qui précède que : $H^*_c(L,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_U(\mathbb{C},\Lambda^*\mathfrak{u}_{\mathbb{C}})$ soit encore, puisque U est connexe, simplement connexe : $H^*_c(L,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\mathbb{C},\Lambda^*\mathfrak{u}_{\mathbb{C}})$.
D'autre part $H^*(\mathfrak{u},\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{u}}(\mathbb{R},\Lambda^*\mathfrak{u})$. Ceci résulte de la formule de Kuga [VIII] p. 180) et du fait que tout élément de l'espace d'une représentation de dimension finie de $\mathfrak{u}$ annulé par le Casimir de $\mathfrak{u}$ est invariant par $\mathfrak{u}$.
Donc $H^*_c(L,\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{u},\mathbb{R}) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq H^*(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}},\mathbb{C})$.
Comme $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\mathfrak{l}$, le lemme est démontré.

8) Lemme :

$$H^*_c(SH,\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{s},\mathbb{C}) \otimes \Lambda^* \mathfrak{h}^*$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer une formule de Künneth, d'utiliser le lemme précédent et de remarquer que $H^*_c(H,\mathbb{C}) \simeq \Lambda^*.\mathfrak{h}^*$

9) Théorème :

$$H_c^{n+\ell_{\mathfrak{s}}}(G,H_P) \simeq \bigoplus_{r+s=n} H^r(\mathfrak{s},\mathbb{C}) \otimes \Lambda^s(\mathfrak{h}^*)$$

Démonstration :

Le lemme III.6 montre que la suite spectrale du lemme III.3, qui converge vers $H^*_c(G,H_P)$ d'après le lemme III.1, dégénère. Le théorème est alors une conséquence immédiate des lemmes III.6 et III.8.

IV - Cas des groupes de rang inférieur ou égal à deux.

Théorème :

Si G est de rang inférieur ou égal à deux, toute représentation unitaire irréductible, (π, H_π), de G vérifiant $H_c^*(G, H_\pi) \neq 0$ est équivalente à une des représentations (π_p, H_p).

Démonstration :

D'après les remarques préliminaires de l'introduction et la proposition II.3, il suffit de vérifier que tout module de Harish Chandra irréductible, de caractère infinitésimal trivial et unitarisable, est isomorphe à l'un des $V(w_S\sigma, -\sigma)$, ce que l'on fait cas par cas :

- le cas de $G = SL(2,\mathbb{C}), SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C}), SL(3,\mathbb{C})$ est facilement résolu car toute involution du groupe de Weyl W est de la forme w_S. On conclut en utilisant la proposition II.3.

- on traite le cas de $Sp(2,\mathbb{C})$ et du groupe complexe d'algèbre de Lie du type G_2 en utilisant la description du dual unitaire de ces groupes donnée dans [VI] (th. 2 et 3).

BIBLIOGRAPHIE

[I] P. BLANC : Thèse de 3ème cycle, Paris VII, 1977.

[II] A. BOREL, N. WALLACH : Seminar on the cohomology of discrete subgroups of semi-simple groups, ch. I-III (Preprint).

[III] W. CASSELMAN, D. WIGNER : Continuous cohomology and a conjecture of Serre's. Inv. Math. 25, (1974), 199-211 .

[IV] N. CONZE-BERLINE, M. DUFLO : Sur les représentations induites des groupes semi-simples complexes. (A paraître).

[V] M. DUFLO : Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes. Lecture Notes 497 (1975) 26-88 .

[VI] M. DUFLO : Représentations unitaires irréductibles des groupes semi-simples complexes de rang deux (A paraître).

[VII] W.T. VAN EST : Une application d'une méthode de Cartan Leray, Indag. Math. 18 (1955), 542-544.

[VIII] G. WARNER : Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, Grund. Math. Wiss. 188, Springer, Berlin 1972.