EXTENSIONS DANS LA CATEGORIE $\mathcal{O}$

DE BERNSTEIN - GELFAND - GELFAND. APPLICATIONS

P. DELORME

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex - France

"Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S. No 169"

Résumé : Après avoir rappelé ou démontré des résultats d'algèbre homologique relative, nous interprétons certaines extensions dans la catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein - Gelfand - Gelfand en terme de la cohomologie de $\mathfrak{n}^+$. Ceci nous permet de donner une formule pour le caractère d'un module de $\mathcal{O}$ en fonction de la $\mathfrak{n}^+$ cohomologie de ce module et de caractères de modules de Verma. En outre, l'étude des propriétés cohomologiques des modules de Verma nous permet d'obtenir la nullité de certains espaces de $\mathfrak{n}^+$ cohomologie (résultat annoncé auparavant par W. Schmid).

M384.1078 Octobre 1978

I ALGEBRE HOMOLOGIQUE RELATIVE POUR LES ALGEBRES DE LIE, FONCTEURS EXT ET TOR.

Dans cette partie F est un corps commutatif de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur F, $\mathfrak{k}$ une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ réductive dans $\mathfrak{g}$, $R = U(\mathfrak{g})$ (resp $S = U(\mathfrak{k})$) l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$).

1. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ modules

Soit V un $\mathfrak{k}$ module. Un élément $v \in V$ est $\mathfrak{k}$ fini si $S \cdot v$ est de dimension finie. Le $\mathfrak{k}$ module V est localement $\mathfrak{k}$ fini si chaque élément est $\mathfrak{k}$ fini.

Un $\mathfrak{g}$ module est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ module s'il est localement $\mathfrak{k}$ fini et semi simple comme $\mathfrak{k}$ module.

Un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ module est dit admissible si les sous espaces isotypiques pour $\mathfrak{k}$ sont de dimension finie.

Soit $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_{\mathfrak{g}, \mathfrak{k}}$ la catégorie des $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ modules.
Notons que toutes les suites exactes dans $\mathcal{C}$ sont scindées sur $\mathfrak{k}$ (ou de manière équivalente sur S). $\mathcal{C}$ est stable par produit tensoriel sur F.

Soit V un $\mathfrak{g}$ module. Alors le sous espace $V_{(\mathfrak{k})}$ engendré par les sous espaces de dimensions finies $\mathfrak{k}$ -stables de V est stable sous $\mathfrak{g}$. Si ces sous espaces sont des $\mathfrak{k}$ modules semi-simples, $V_{(\mathfrak{k})}$ est alors un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$- module.

Maintenant, soit (π, V) un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$- module. Le $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module contragrédient $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$ est par définition $(\pi^*, V^*_{(\mathfrak{k})})$ où (π^*, V^*) est le module contragrédient de V. $V \to \tilde{V}$ est un foncteur exact. En outre si V est admissible on a $\tilde{\tilde{V}} \simeq V$. Pour tout ce qui précède cf [3].

I.2.1.

Soit V un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ module admettant une filtration croissante $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par des $\mathfrak{k}$ modules de dimension finie, telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V$.

Alors, si W est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ module quelconque, $\mathrm{Hom}_F(V,W)_{(\mathfrak{k})}$ est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module (cf [3] I.2.6).

2. <u>Injectifs et projectifs dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$</u>

<u>Proposition 1</u> : Soit U un $\mathfrak{k}$ module localement fini, semi simple. Alors

(i) $I(U) = R \underset{S}{\otimes} U$ est projectif dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$

(ii) $P(U) = \mathrm{Hom}_S(R,U)_{(\mathfrak{k})}$ est injectif dans $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$

(iii) $\widetilde{I(U)} \simeq P(\widetilde{U})$

Preuve :

(i) cf [3] I.2.4.
(ii) cf [3] I.2.6
(iii) D' après [5] 5.5.4 on a

$$I(U)^* \simeq \mathrm{Hom}_S(R, U^*)$$

Regardons $\mathrm{Hom}_S(R, U^*)$ comme un sous espace de $\mathrm{Hom}_F(R, U^*)$. Sur ce dernier S agit par translations à droite sur R (action "ordinaire"). D'autre part on peut regarder R comme S - module via la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ dans R. U^* étant un $\mathfrak{k}$ module, on a une autre action de S sur $\mathrm{Hom}_F(R, U^*)$. On vérifie aisément que ces deux actions coincident sur $\mathrm{Hom}_S(R, U^*)$. En utilisant la deuxième définition de l'action de S sur $\mathrm{Hom}_S(R, U^*)$ on va voir que $\mathrm{Hom}_S(R,\widetilde{U})_{(\mathfrak{k})} = \mathrm{Hom}_S(R,U^*)_{(\mathfrak{k})}$

En effet soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(R, U^*)_{(\mathfrak{k})}$ et $X \in R$. Alors

$$S.(\varphi(X)) \subset (S.\varphi)(X) + \varphi(S.X)$$

Or $S\varphi$ est de dimension finie. D'autre part l'action adjointe de $\mathfrak{k}$ dans R est localement finie donc SX est de dimension finie. D'où $\varphi(X) \in \widetilde{U}$ et l'égalité annoncée est prouvée. (iii) s'en déduit immédiatement.

<u>Remarque 1</u> (i) et (ii) permettent de construire des résolutions

projectives et injectives standard dans $\mathcal{C}_{(\mathfrak{g},k)}$

3. Foncteurs Ext et Tor dans $\mathcal{C}_{(\mathfrak{g},k)}$ et cohomologie relative

D'après ce qui précède, on peut construire des foncteurs Ext^n dans $\mathcal{C}_{(\mathfrak{g},k)}$ comme dérivés de $\mathrm{Hom}_R(\cdot\ ,\cdot)$

D'autre part, tout $(\mathfrak{g},k)$ module peut être canoniquement muni, grâce à l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$, d'une structure de R module à droite. D'où une définition des foncteurs Tor_n dérivés de $\underset{R}{\otimes}$.

D'après la proposition 1 la résolution projective standard dans $\mathcal{C}_{(\mathfrak{g},k)}$ d'un $(\mathfrak{g},k)$ module coincide avec la (R,S) résolution projective standard de Hochschild ([6] §2). D'où l'identité des foncteurs Tor (resp Ext) avec les foncteurs $\mathrm{Tor}_{(R,S)}$ (resp $\mathrm{Ext}_{R,S}$) de Hochschild restreints à $\mathcal{C}_{(\mathfrak{g},k)}$. On déduit alors immédiatement de [6], §§2,5 ,

<u>Proposition 2</u> : Pour tout $(\mathfrak{g},k)$ modules V et V'

(i) $\mathrm{Ext}^n(F,V) \simeq H^n(\mathfrak{g},k,V)$

(ii) $\mathrm{Tor}_n(V,F) \simeq H_n(\mathfrak{g},k,V)$ $\mathrm{Tor}_n(V,W) \simeq H_n(\mathfrak{g},k)(V\otimes W)$

(iii) $\mathrm{Ext}^n(V,V') \simeq H^n(\mathfrak{g},k,\ \mathrm{Hom}_F(V,V'))$

<u>Remarque 2</u> D'après [3] I, 3 on a une interprétation de Ext en terme de classes d'équivalences au sens de Yoneda de longues suites exactes.

4. Dualité entre Tor et Ext

<u>Proposition 3</u> : Pour tout couple (A,B) de $(\mathfrak{g},k)$ modules on a

$$\mathrm{Ext}(A,\widetilde{B}) \simeq (\mathrm{Tor}(B,A))^*$$

<u>Preuve</u> : Pour la résolution projective standard de B $\ldots \to P_1 \to P_o \to B \to 0$,

$0 \to \widetilde{B} \to \widetilde{P}_o \to \widetilde{P}_1 \to \ldots.$, est une résolution injective de $\widetilde{B}$ (cf Proposition 1).

D'autre part, pour tout $(\mathfrak{g},k)$ module C on a

$$\mathrm{Hom}_R(A,\widetilde{C}) = \mathrm{Hom}_R(A,C^*) \simeq (A \underset{R}{\otimes} C)^* .$$

Notez que, dans le dernier terme, A est muni de sa structure de R-module à droite canonique. La proposition 3 est une conséquence immédiate de ces deux faits.

Remarque 3 : Si Ext(A,C) est de dimension finie et C admissible, de $\mathrm{Ext}(A,\widetilde{\widetilde{C}}) \simeq \mathrm{Tor}(\widetilde{C},A)^*$ (d'après la proposition 3) et $C \simeq \widetilde{\widetilde{C}}$, on déduit

$$(\mathrm{Ext}(A,C))^* \simeq \mathrm{Tor}(\widetilde{C},A)$$

5. La suite spectrale de Hochschild Serre en cohomologie relative

Proposition 4 : Soit $\mathfrak{n}$ un idéal dans $\mathfrak{g}$ stable par $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$ et V un $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ module.

Alors $H^*(\mathfrak{n}, \mathfrak{k}_1, V)$ a une structure canonique de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$-module (et même de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1)$ module) et il existe une suite spectrale de terme

$$E_2^{p,q} = H^p\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{n},\ \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_1,\ H^q(\mathfrak{n}, \mathfrak{k}_1, V)\right)$$

qui converge vers $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, V)$

Preuve : cf [3] IX 7.5, 7.8.

6. Un lemme de Shapiro en cohomologie relative

Proposition 5 : Soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{k}$. On suppose en outre que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est une sous algèbre et que $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ sont stables par $\mathfrak{k}$.

Soit $T = U(\mathfrak{h})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$. Pour tout $(\mathfrak{h},\mathfrak{k})$-module A et tout $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$- module B on a

$$\mathrm{Ext}^n_{(\mathfrak{g},\mathfrak{k})}(R \underset{T}{\otimes} A, B) \simeq \mathrm{Ext}^n_{(\mathfrak{h},\mathfrak{k})}(A,B)$$

Preuve : Si C est un $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ module, utilisant l'isomorphisme de module $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{p}) \otimes U(\mathfrak{h})$ on obtient un isomorphisme de $\mathfrak{h}$ modules

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_S(R,B)_{(\mathfrak{k})} &\simeq \mathrm{Hom}_S(T,\ \mathrm{Hom}(U(\mathfrak{p}),B))_{(\mathfrak{k})} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_S(T,\ \mathrm{Hom}(U(\mathfrak{p}),B)_{(\mathfrak{k})})_{(\mathfrak{k})}\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Hom}(U(\mathfrak{p}),B)_{(\mathfrak{k})}$ est $\mathfrak{k}$ fini et semi simple. D'où la résolution $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ injective standard d'un $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ module est une résolution $(\mathfrak{h},\mathfrak{k})$ injective. La proposition en résulte immédiatement.

7. Un théorème d'annulation

Proposition 6 : Soient A,B deux $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ modules tels qu'il existe une filtration croissante finie A_p par des $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ modules de A (resp. B_q de B) vérifiant

(i) $\bigcup_p A_p = A$ (resp $\bigcup_q B_q = B$)

(ii) A_{p+1}/A_p (resp B_{q+1}/B_q) admet un caractère infinitisimal χ_A (resp χ_B).

Alors si $\chi_A \neq \chi_B$ $\qquad \mathrm{Ext}(A,B) = 0$

Preuve : Si les filtrations sont de longueur 1 cf [3] I.4.1. On procède ensuite par récurrence en utilisant les longues suites exactes des Ext.

II - EXTENSIONS DANS LA CATEGORIE $\mathcal{O}$ DE BERNSTEIN-GELFAND-GELFAND APPLICATIONS

1. Notations

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, Δ le système de racines de la paire ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$). On fixe une chambre de Weyl positive C. Soient Σ la base de Δ correspondante, Δ^+ l'ensemble des racines positives, ρ la demi somme des racines positives. Soit $\mathfrak{g} = n^- \oplus \mathfrak{g} \oplus n^+$ la décomposition triangulaire correspondant à Δ^+. P est le réseau des poids, P^+ est l'ensemble des poids dominants. W est le groupe de Weyl de ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$), s_γ la réflexion correspondant à $\gamma \in \Delta^+$. $\ell(w)$ est la longueur d'un élément de $w \in W$.
JH(V) dénote la collection des modules simples (avec multiplicité) apparaissant dans une suite de Jordan Hölder du $\mathfrak{g}$ module V. Si L est un $\mathfrak{g}$ module simple on note (V:L) le nombre de fois où L intervient dans JH(V).

2. Propriétés élémentaires de la catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein-Gelfand-Gelfand.

Définition 1 : (catégorie $\mathcal{O}$) : les objets de la catégorie $\mathcal{O}$ sont des $\mathfrak{g}$ modules à gauche V, vérifiant

(i) V est de type fini sur $R = U(\mathfrak{g})$

(ii) V est $\mathfrak{h}$ diagonalisable

(iii) V est localement n^+ fini.

Les morphismes de $\mathcal{O}$ sont tous les $\mathfrak{g}$ morphismes entre objets de $\mathcal{O}$.

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On note $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathfrak{h} \oplus n^+$ module trivial sur n^+ et définit par $H \to \lambda(H)$ pour $H \in \mathfrak{h}$. On note $M_\lambda = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ où $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus n^+$. M_λ est un module de Verma. Alors on a :

1) $\mathcal{O}$ est une catégorie abélienne, stable par somme finie. Tout sous $\mathfrak{g}$ -module (resp. quotient) d'un objet de $\mathcal{O}$ est un objet de $\mathcal{O}$. Hom $_{\mathfrak{g}}$ (V,V') est de dimension finie pour tout couple d'objets (V,V') de $\mathcal{O}$.

2) Les objets de $\mathcal{O}$ sont des $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ modules admissibles.

3) Les objets simples de $\mathcal{O}$ sont les quotients simples des modules de Verma. Si M_λ , $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, est un module de Verma, on note L_λ l'unique quotient simple de M_λ . Les L_λ sont deux à deux non isomorphes.

4) Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, et Θ l'ensemble des caractères de $Z(\mathfrak{g})$. Pour $\theta \in \Theta$ on considère la sous catégorie pleine $\mathcal{O}_\theta$ de $\mathcal{O}$, constituée des modules V vérifiant : pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, le module V est annulé par une puissance de $(z-\theta(z))$. Alors $\mathcal{O} = \bigoplus_{\theta \in \Theta} \mathcal{O}_\theta$. Tout objet de $\mathcal{O}$ s'écrit $V = \bigoplus_{\theta \in \Theta} V(\theta)$, $V(\theta)$ objet de $\mathcal{O}_\theta$.

5) Identifiant $Z(\mathfrak{g})$ aux invariants $S(\mathfrak{h})^W$ de $S(\mathfrak{h})$ sous l'action de W par l'homomorphisme de Harish Chandra, Θ s'identifie à $\mathfrak{h}^*/W$. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on note θ_λ le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ correspondant. Alors $Z(\mathfrak{g})$ agit par θ_λ sur M_λ.

6) Tout objet de $\mathcal{O}$ est de longueur finie. Par conséquent chaque objet de $\mathcal{O}$ se décompose en une somme directe d'objets indécomposables, la décomposition étant unique à isomorphisme et réarrangement près.

7) La catégorie $\mathcal{O}$ est self duale : Soit i une antiinvolution de $\mathfrak{g}$ telle que $i(H) = H$ $\quad H \in \mathfrak{h}$ (il en existe). Alors $i(n^+) = n^-$. Soit V un objet de $\mathcal{O}$. $\widetilde{V}$ le $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ module contragrédient. On définit une une nouvelle action de $\mathfrak{g}$ sur $\widetilde{V}$ par $(Xf)(v) = f(i(X)v)$ $\forall f \in \widetilde{V}$, $v \in V$, $X \in \mathfrak{g}$, et l'on note $V^\#$ le nouveau $\mathfrak{g}$ module ainsi obtenu. $V^\#$ est un objet de $\mathcal{O}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1,V_2)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2^\#, V_1^\#)$ pour V_1,V_2 objets de $\mathcal{O}$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ $\quad L_\lambda^\# = L_\lambda$ et donc pour $\theta \in \Theta$ $\mathcal{O}_\theta^\# = \mathcal{O}_\theta$.

Pour ce qui précède cf. [2] § 3.4.

3. Objets projectifs et injectifs de $\mathcal{O}$. Foncteurs $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^n$

Pour les points 1) à 4) de ce paragraphe nous renvoyons à [2] § 4.

1) Une p-filtration d'un $\mathfrak{g}$ -module V est une suite de composition de longueur finie de V dont les sous quotients sont des modules de Verma.
Le nombre de quotients d'une p-filtration de V isomorphes à M_λ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$) est indépendant de la p-filtration de V et est noté $(V : M_\lambda)$.

2) Tout objet de $\mathcal{O}$ est quotient d'un objet projectif de $\mathcal{O}$. Tout projectif de $\mathcal{O}$ admet une p-filtration. Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ il existe un unique objet projectif indécomposable de $\mathcal{O}$, P_λ, admettant L_λ comme unique quotient simple. De plus, $(P_\lambda : M_\mu) = (M_\mu : L_\lambda)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

3) On note $U_p(\mathfrak{n}^+)$ la filtration standard de $U(\mathfrak{n}^+)$ et $U^p(\mathfrak{n}^+)$ le supplémentaire canonique de $U_p(\mathfrak{n}^+)$ dans $U(\mathfrak{n}^+)$. $U^p(\mathfrak{n}^+)$ est stable par la représentation régulière gauche de $U(\mathfrak{n}^+)$. D'où une structure de $\mathfrak{n}^+$ module sur $U_p(\mathfrak{n}^+)$ par passage au quotient. En outre $\mathfrak{h}$ agit par représentation adjointe sur $U_p(\mathfrak{n}^+)$. D'où une structure de $(\mathfrak{b}, \mathfrak{h})$ module sur $U_p(\mathfrak{n}^+)$.
Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et p assez grand (dépendant de λ) le module $(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} U_p(\mathfrak{n}^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho})_{\theta_\lambda}$ ne dépend pas de p et est noté Q_λ .
P_λ est un facteur direct de Q_λ .
Tout objet projectif indécomposable de $\mathcal{O}$ est isomorphe à un P_λ , $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
En outre pour tout objet de $\mathcal{O}$, $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_\lambda, V) = (V : L_\lambda)$.

4) Tout objet injectif indécomposable de $\mathcal{O}$ est isomorphe à un $I_\lambda = P_\lambda^{\#}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Tout objet de $\mathcal{O}$ est un sous objet d'un module injectif.

5) $\mathcal{O}$ étant une catégorie abélienne avec assez de projectifs et d'injectifs on peut définir les foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(.,.)$ comme dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(.,.)$.

6) Il est clair que si $V \in \mathcal{O}_\theta$, $V' \in \mathcal{O}_{\theta'}$, avec $\theta,\theta' \in \Theta$ et $\theta \neq \theta'$ on a

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(V,V') = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}$ et cohomologie relative

<u>Théorème 1</u> : Tout objet de $\mathcal{O}$ est un $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ module et pour tout couple (V,V') d'objets de $\mathcal{O}$ on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(V,V') \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(V,V'). \qquad n \geq 0$$

Commencons par montrer le :

<u>Lemme 1</u> : Pour tout $(\mathfrak{b} , \mathfrak{h})$ module V, on a

$$H^*(\mathfrak{b},\mathfrak{h},V) \simeq H^0(\mathfrak{h}, H^*(n^+,V))$$

<u>Preuve</u> : La proposition 4 s'applique en considérant l'idéal n^+ de $\mathfrak{b}$. Alors il existe une suite spectrale de terme $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{h},\mathfrak{h},H^q(n^+,\{0\},V))$ qui converge vers $H^*(\mathfrak{b} , \mathfrak{h},V)$. Or $H^*(\mathfrak{h},\mathfrak{h},.) = 0$ pour $p \neq 0$ et $H^0(\mathfrak{h},\mathfrak{h},.) = H^0(\mathfrak{h},.)$.

De plus $H^*(n^+,\{0\},V) = H^*(n^+,V)$. La suite spectrale est complètement dégénérée et le lemme en résulte.

Démonstration du théorème 1 : Comme le théorème est vrai pour $n = 0$ il suffit de le démontrer pour $n > 0$.

Or on a, grâce à l'interprétation des facteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}$ (resp. $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$) en terme de classe d'équivalence de longues suites exactes au sens de Yoneda dans $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$), une transformation naturelle des foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}$ vers les foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ commutant aux homomorphismes de connection. De ce qui précède et du fait que tout projectif de $\mathcal{O}$ est un facteur direct d'une somme directe de modules de la forme Q_λ, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (cf.II.3.3) on déduit facilement qu'il suffit de montrer que $\forall n > 0$, $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = 0$ pour tout objet V de $\mathcal{O}$.

D'après la proposition 6, on peut se limiter à montrer cela lorsque V est un objet de $\mathcal{O}_{\theta_\lambda}$.

Alors, toujours d'après la proposition 6 et utilisant II 3.3 on a pour p assez grand (indépendant de n)

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\left(U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} (U_p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho}),V\right)$$

Soit encore en utilisant le lemme de Shapiro (proposition 5) en cohomologie relative à la sous algèbre $\mathfrak{h}$, on a pour p assez grand

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}(U_p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho}, V)$$

Soit encore, d'après la proposition 2 (iii) :

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) \simeq H^n(\mathfrak{b},\mathfrak{h}, \mathrm{Hom}(U_p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho},V))$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = H^0\left(\mathfrak{h},H^n\left(n^+, \mathrm{Hom}(U_p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho}, V)\right)\right)$$

Posons $\quad U_p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho} = U_p$, $U^p(n^+) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho} = U^p$, $U(n^+) \otimes C_{\lambda-\rho} = U$.

De la suite exacte de $(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ modules

$$0 \to \mathrm{Hom}(U_p,V) \to \mathrm{Hom}(U,V)_{(\mathfrak{h})} \to \mathrm{Hom}(U^p,V)_{(\mathfrak{h})} \to 0$$

on déduit une longue suite exacte en $(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ cohomologie.

Notez que $\mathrm{Hom}(U,V)_{(\mathfrak{h})}$, $\mathrm{Hom}(U^p,V)_{(\mathfrak{h})}$ sont des $(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ modules d'après I.1. D'autre part, il existe un ensemble fini d'éléments de $\mathfrak{h}^*$ tel que tout poids d'un objet de $\mathcal{O}_{\theta_\lambda}$ soit majoré par un élément de cet ensemble. On en déduit facilement que pour p assez grand :

$$0 = H^o(\mathfrak{h}, H^*(n^+, \mathrm{Hom}(U^p,V)) \simeq H^*(\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathrm{Hom}(U^p,V))$$

D'où pour p assez grand.

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = H^o(\mathfrak{h}, H^*(n^+,\mathrm{Hom}(U,V)))$$

Or $$H^*(n^+,\mathrm{Hom}(U,V)) \simeq H^*\left(n^+,\mathrm{Hom}\left(U(n^+),V\otimes \mathbb{C}_{\rho-\lambda}\right)\right)$$

D'où $$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(Q_\lambda,V) = 0 \quad \text{pour } n > 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

<u>Remarque 3</u> : Il résulte du théorème 1 et de la remarque I.3.2 que toute longue suite exacte de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ modules, reliant deux objets de $\mathcal{O}$, est équivalente au sens de Yoneda à une longue suite exacte dans $\mathcal{O}$ regardée comme suite exacte de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ modules.

5. <u>L'isomorphisme</u> $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda,.) \simeq H^*(n^+,.)_{\lambda-\rho}$

n^+ étant un idéal de $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}\oplus n^+$, et $\mathfrak{h}$ étant réductive dans $\mathfrak{b}$ pour tout $(\mathfrak{b},\mathfrak{h})$ module V, $H^*(n^+,V)$ est $\mathfrak{h}$ semi simple et pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ on note $H^*(n^+,V)_\lambda$ la composante isotypique de type λ de $H^*(n^+,V)$.

<u>Théorème 2</u> : Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et tout objet V de $\mathcal{O}$ on a

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq H^*(\mathfrak{n}^+, V)_{\lambda-\rho}$$

<u>Preuve</u> : D'après le théorème 1 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}(M_\lambda, V)$.

Or $M_\lambda = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{b})}{\otimes} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$. D'où, en utilisant la proposition 5,

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}, V)$$

D'après la proposition 2 (iii) on a

$$\mathrm{Ext}^*_{(\mathfrak{b},\mathfrak{h})}(\mathbb{C}_{\lambda-\rho}, V) \simeq H^*(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}, V \otimes \mathbb{C}_{\rho-\lambda})$$

Le lemme 1 donne alors

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq H^0(\mathfrak{h}, H^*(\mathfrak{n}^+, V \otimes \mathbb{C}_{\rho-\lambda}))$$

Comme $\mathbb{C}_{\rho-\lambda}$ est trivial sur $\mathfrak{n}^+$, on en déduit

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq H^0(\mathfrak{h}, H^*(\mathfrak{n}^+, V) \otimes \mathbb{C}_{\rho-\lambda})$$

Soit $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}}(M_\lambda, V) \simeq H^*(\mathfrak{n}^+, V)_{\lambda-\rho}$ et le théorème est démontré.

6. Une formule des caractères des objets de $\mathcal{O}$

1) On considère le groupe de Grothendieck $\mathfrak{S}$ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$. Les objets de $\mathcal{O}$ étant de longueur finie, à tout objet V de $\mathcal{O}$ on peut associer canoniquement un élément de $\mathfrak{S}$ appelé caractère

de V et noté ch V. Pour toute suite exacte dans $\mathcal{O}$ $0 \to V_1 \to V_2 \cdots \to V_n \to 0$ on a $\Sigma(-1)^i$ ch $V_i = 0$. Il résulte de II.2.7 que ch V = ch $V^{\#}$. Alors II.3.4 implique que pour $\lambda \in {}^*$ ch $I_\lambda = \sum_{\mu \in {}^*} (M_\mu : L_\lambda)$ ch M_μ , la somme étant en fait une somme finie d'éléments non nuls.

<u>Théorème 3</u> : Soit V un objet de $\mathcal{O}$. Alors

(i) $$\text{ch } V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \chi(\text{Ext}^*(M_\lambda, V)).\ \text{ch } M_\lambda$$

(ii) $$\text{ch } V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \chi(H^*(n^+, V)_{\lambda-\rho})\ \ \text{ch } M_\lambda$$

Dans (i) et (ii) les sommes sont en fait des sommes finies d'éléments non nuls de $\mathfrak{S}$ et par définition :

$$\chi(\text{Ext}^*(M_\lambda, V)) = \sum_n (-1)^n \dim \text{Ext}^n(M_\lambda, V)$$

$$\chi(H^*(n^+, V)_{\lambda-\rho}) = \sum_n (-1)^n \dim H^n(n^+, V)_{\lambda-\rho}$$

<u>Remarque préliminaire</u> : le nombre $\chi(\text{Ext}^*(M_\lambda, V))$ est bien définie car d'après [2] la dimension cohomologique de M_λ est finie. Du théorème 2 on déduit que $\chi(H^*(n^+, V)_{\lambda-\rho})$ est bien défini. Ce même théorème montre que (i) implique (ii) et qu'il suffit donc de prouver (i).

<u>Démonstration du théorème 3 (i)</u> : Montrons que le théorème est vrai pour V de la forme I_λ , $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

On a d'après II 6.1. :

$$\mathrm{ch}\ I_\lambda = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (M_\mu : L_\lambda)\ \mathrm{ch}\ M_\mu$$

Or $\mathrm{Ext}^n(M_\mu, I_\lambda) = 0$ pour $n>0$ car I_λ est injectif, et $\mathrm{Ext}^o(M_\mu, I_\lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_\mu, I_\lambda)$. D'après II.2.7 on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_\mu, I_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_\lambda, M_\mu^\#)$. D'où $\chi(\mathrm{Ext}^*(M_\mu : I_\lambda)) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_\lambda, M_\mu^\#)$, soit d'après II.2.7 et II.3.3 $\chi(\mathrm{Ext}^*(M_\mu : I_\lambda)) = (M_\mu : L_\lambda)$

Le théorème est donc vrai pour $V = I_\lambda$. D'autre part, il est clair que si (i) est vrai pour V_1 et V_2 objets de $\mathcal{O}$, (i) est vrai pour $V_1 \oplus V_2$. Donc le théorème est vrai pour les injectifs de $\mathcal{O}$. Soit alors V un objet de $\mathcal{O}$. D'après [2] § 7, tout objet de $\mathcal{O}$ a une résolution injective de longueur finie. Soit $0 \to V \to I_o \to I_1 \ldots \to I_\ell \to 0$ une telle résolution injective de V. Alors on a

d'une part $$\mathrm{ch}\ V = \sum_{i=o}^{\ell} (-1)^i\ \mathrm{ch}\ I_i$$

d'autre part $$\chi(\mathrm{Ext}^*(M_\lambda, V)) = \sum_{i=o}^{\ell} (-1)^i \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_\lambda, I_i)$$

soit encore $$\chi(\mathrm{Ext}^*(M_\lambda, V)) = \sum_{i=o}^{\ell} (-1)\ \ \chi(\mathrm{Ext}^*(M_\lambda, I_i))$$

Le théorème étant vrai pour chacun des I_i, il est vrai pour V ce qui achève la démonstration.

<u>Remarque 4</u> : Considérons le groupe de Grothendieck $\mathcal{H}$ de $U(\mathfrak{h})$. Posons $\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}}\ \mathbb{C}_\lambda \underset{\text{déf}}{=} e^\lambda$ pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On a une structure multiplicative canonique sur $\mathcal{H}$. En particulier $e^\lambda \times e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. Alors on a facilement avec les conventions usuelles.

Corollaire du théorème 3 : Soit V un objet de $\mathcal{O}$. Alors

$$\mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} V = \frac{\Sigma(-1)^i \ \mathrm{ch}_{\mathfrak{h}} H^i(n^+,V)}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} (1-e^{-\alpha})}$$

7. Propriétés cohomologiques des modules de Verma , un théorème d'annulation en n^+ cohomologie.

1) Si M,M' sont deux modules de Verma, on a soit $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M') = 0$, soit $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M') = 1$ et tout homomorphisme non nul de M dans M' est une injection. Si $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M') \neq 0$, on dit que M' contient M et on note cette relation $M \subset M'$. Soit $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$. Alors $M_\lambda \subset M_\mu$ est équivalent à $(M_\mu : L_\lambda) \neq 0$. Pour tout ceci cf. [1].

2) On définit une relation d'ordre (partiel) $\leq$ sur $\mathfrak{h}^*$ par $\lambda \leq \mu \Leftrightarrow M_\lambda \subset M_\mu$, $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$. On introduit pour $\lambda,\mu \in \mathfrak{h}^*$ les nombres $\ell(\lambda)$ et $\ell(\lambda,\mu)$ définis comme suit :

α) $\ell(\lambda) = \sup\{n \mid n \in \mathbb{N}$, $\exists\ \nu_1,\dots,\nu_n \in \mathfrak{h}^*$ tels que $M_\lambda \subsetneq M_{\nu_1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_{\nu_n}\}$

β) $M_\lambda \not\subset M_\mu \Longrightarrow \ell(\lambda,\mu) = -1$, $\ell(\lambda,\lambda) = 0$

Si $M_\lambda \subsetneq M_\mu$

$$\ell(\lambda,\mu) = \sup\{n \mid \exists\ \nu_1 \cdots \nu_n \in \mathfrak{h}^* \text{ tels que } M_\lambda \subsetneq M_{\nu_1} \subsetneq \cdots \subsetneq M_{\nu_n} = M_\mu\}$$

3) Dans [7] Rocha Caridi a introduit la notion de p-filtration standard. Pour nos besoins, nous introduisons une notion plus forte.

Définition : On appelle p-filtration fortement standard d'un module, M, une p-filtration $0 = M_o \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \cdots \subsetneq M_n = M$ telle que si $M_{i+1}/M_i \simeq M_{\lambda_i}$, $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$, $i=0,\dots,n-1$ alors $\lambda_i \gg \lambda_j \Rightarrow i \leq j$.

Proposition 7 : Soit V un objet de $\mathcal{O}$ admettant une p-filtration. Alors V admet une p-filtration fortement standard.

Preuve : Soit $V = V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_r \supset V_{r+1} = 0$ une p-filtration de V telle que

$$V_i/V_{i+1} \cong M_{\lambda_i} \qquad \lambda_i \in \mathfrak{h}^* \qquad i=1,\dots,r$$

D'après [7] prop. 2.3 ceci est équivalent à :

il existe des vecteurs $v_1,\dots,v_r$ (uniques à un scalaire près) dans V de poids $\lambda_1 \dots \lambda_r$ tels que :

(i) $\mathfrak{n}^+ v_i = 0$, $\mathfrak{n}^-$ agit librement sur v_i $i=1,\dots,r$.

(ii) $V = \bigoplus_{i=1}^{r} U(\mathfrak{n}^-)\, v_i$

(iii) $V_j = \bigoplus_{i=j}^{r} U(\mathfrak{n}^-)\, v_i$, $j=1,\dots,r$ est stable par $\mathfrak{g}$.

Dans la suite nous réfèrerons a une p-filtration de V par la donnée d'une suite de vecteurs poids canoniquement associée à cette p-filtration par le procédé ci-dessus.

Avec les notations ci-dessus, supposons que l'on ait $\lambda_{i+1} \not\gg \lambda_i$ pour un indice i. Alors, d'après [7] lemme 3.1, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M_{\lambda_{i+1}}, M_{\lambda_i}) = 0$.

Par conséquent la suite exacte

$$0 \to V_{i+1}/V_{i+2} \xrightarrow{p_1} V_i/V_{i+2} \xrightarrow{p_2} V_i/V_{i+1} \Rightarrow 0$$

est scindée. Soit alors s un morphisme de V_i/V_{i+1} dans V_i/V_{i+2} tel que $p_2 \circ s$ soit l'identité de V_i/V_{i+1}. Identifiant respectivement V_{i+1}/V_{i+2} , V_i/V_{i+2} , V_i/V_{i+1} à

$$U(n^-)v_{i+1} \quad , \quad U(n^-)v_i \oplus U(n^-)v_{i+1} \quad , \quad U(n^-)v_i$$

en tant qu'espaces vectoriels, on vérifie aisément, à l'aide de [7] proposition 2.3, que les vecteurs $v_1,..,v_{i-1},v_{i+1}, s(v_i),v_{i+2},...,v_r$ de poids $\lambda_1,..,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\lambda_i,\lambda_{i+2},\lambda_r$ sont canoniquement associés à une p-filtration de V. Le lemme s'en déduit par itération de ce procédé.

4) <u>Lemme 2</u> : Soit V un objet de $\mathcal{O}$ admettant une p-filtration par des modules de Verma $(M_\mu)_{\mu\in I}$ $(I \subset \mathfrak{h}^*)$.

Soient $\lambda_1,...,\lambda_n$ les éléments minimaux de I pour la relation $\leq$. Alors il existe une suite exacte

$$0 \to W \to \bigoplus_{\nu\in J} P_\nu \to V \to 0 \qquad\qquad J \subset \mathfrak{h}^*$$

vérifiant

(i) $\forall\ \nu\in J \quad \exists i$ avec $\lambda_i \leq \nu$

(ii) W admet une p-filtration par des modules de Verma $(M_\xi)_{\xi\in K}$

telle que

$$\forall\ \xi \in K \quad \exists i \quad \lambda_i < \xi$$

$$(\text{i.e.} \quad \ell(\lambda_i, \xi) \geq 1)$$

Preuve : Procédons par récurrence sur la longueur ℓ des p-filtrations de V

α) $\ell = 1$ i.e. $V = M_\lambda$ $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.
Comme P_λ admet une p-filtration par des modules de Verma contenant M_λ , que $(P_\lambda : M_\lambda) = 1$ et qu'en outre L_λ est l'unique quotient simple de P_λ on en déduit aisément qu'il existe une suite exacte $0 \to W \to P_\lambda \to O_\lambda$ vérifiant (i) et (ii). Le lemme est démontré pour $\ell = 1$.

β) Supposons le lemme démontré pour $\ell \leq n-1$.
Soit alors V vérifiant les hypothèses du lemme avec $\ell = n$. Utilisant une p-filtration de V, on obtient une suite exacte dans $\mathcal{O}$

$$0 \to V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \to 0$$

où V' (resp. V'') admet une p-filtration de longueur n-1 (resp. 1) et vérifie les hypothèses du lemme.
Alors par l'hypothèse de récurrence on a des suites exactes dans $\mathcal{O}$:
$0 \to W' \to P' \xrightarrow{\varphi} V' \to 0$
$0 \to W'' \to P'' \xrightarrow{\psi} V'' \to 0$ vérifiant

a) $\qquad P' = \bigoplus_{\nu' \in J'} P_{\nu'} \qquad P'' = \bigoplus_{\nu'' \in J''} P_{\nu''}$

avec $\forall\nu' \in J'$ $\exists\, i'$ $\lambda_{i'} \leq \nu'$

$\forall\nu'' \in J''$ $\exists\, i''$ $\lambda_{i''} \leq \nu''$

b) W', (resp. W'') admet une p-filtration par des modules de Verma $(M_{\xi'})_{\xi' \in K'}$ (resp. $(M_{\xi''})_{\xi'' \in K''}$) telle que $\forall \xi' \in K'$ $\exists i'$ $\lambda_{i'} < \xi'$ (resp. $\forall\, \xi'' \in K''$ $\exists i''$ $\lambda_{i''} < \xi''$).

D'après la projectivité de P'' il existe un morphisme dans $\mathcal{O}$ $\widetilde{\Psi} : P'' \to V$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P'' \arrow[dl, "\widetilde{\Psi}"'] \arrow[dr, "\Psi"] & \\ V \arrow[rr, "\beta"] & & V'' \end{tikzcd}$$

Posons $P = P' \oplus P''$ et définissons un morphisme $\Phi : P \to V$ par

$$\Phi(x,y) = \alpha(\varphi(x)) + \widetilde{\Psi}(y) \quad , \quad \forall (x,y) \in P' \oplus P''$$

Alors $(x,y) \in \operatorname{Ker} \Phi \Leftrightarrow \alpha\big(\varphi(x)\big) + \widetilde{\Psi}(y) = 0$

$$\Rightarrow \beta(\widetilde{\Psi}(y)) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \operatorname{Ker} \Psi .$$

On a donc un morphisme $\operatorname{Ker} \Phi \to \operatorname{Ker} \Psi$ défini par $(x,y) \in \operatorname{Ker} \Phi \to y \in \operatorname{Ker} \Psi$. Il est facile de voir que ce morphisme est surjectif et que l'on a une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} \varphi \to \operatorname{Ker} \Phi \to \operatorname{Ker} \Psi \to 0 .$$

D'après ce que l'on sait sur $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Ker} \Psi$, P', P'' cela implique que $0 \to \operatorname{Ker} \Phi \to P \xrightarrow{\Phi} V \to 0$ possède les propriétés voulues c.q.f.d.

5) <u>Théorème 4</u> : Soient μ , $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Alors

(i) $$M_\mu \not\subset M_\nu \Rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(M_\mu,M_\nu) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

(ii) $$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(M_\mu,M_\nu) = 0 \quad \forall n > \ell(\mu,\nu)$$

(iii) $$M_\nu \not\subset M_\nu \Rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(M_\mu,L_\nu) = 0 \quad \forall n \geq 0$$

(iv) $$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(M_\mu,L_\nu) = 0 \quad \forall n > \ell(\mu,\nu)$$

<u>Remarque préliminaire</u> : (i) (resp. (iii)) est clairement une conséquence de (ii) (resp. (iv)) car $M_\mu \not\subset M_\nu$ implique $\ell(\mu,\nu) = -1$.

<u>Démonstration du théorème 4</u> : Il résulte facilement du lemme 2 que M_μ admet une résolution projective dans $\mathcal{O}$ '

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_o \to M_\mu \to 0 \quad \text{telle que :}$$

ou bien $P_n = 0$

ou bien $P_n = \bigoplus_{i \in J_n} P_{\mu_{in}}$ avec $\mu_{in} \in \mathfrak{h}^*$ et $\ell(\mu,\mu_{in}) \geq n$. Le théorème résulte alors facilement du fait que $\mathrm{Hom}\ (P_\lambda,M_\nu) \neq 0$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\ (P_\lambda,L_\nu) \neq 0$) implique $\lambda \leq \nu$ et que $\mu \leq \lambda \leq \nu$ implique $\ell(\mu,\lambda) \leq \ell(\mu,\nu)$.

<u>Commentaire</u> :

Signalons qu'apparemment le théorème 1 semble reposer sur le théorème de Rocha Caridi sur les Ext^1 des modules de Verma (cf. [7] lemme 3.1). En fait la forme affaiblie du lemme 2 que nous mentionnons plus bas conduit a une démonstration de la partie (i) du théorème 4 indépendante du travail de Rocha Caridi.

<u>Lemme (2')</u> : Soit V un objet de $\mathcal{O}$ admettant une p-filtration par des modules de Verma contenant un module de Verma donné, M. Alors il existe une suite exacte :

$$0 \to W \to \bigoplus_{i \in I} P_{\lambda_i} \to V \to 0 \ , \ \lambda_i \in \mathfrak{h}^*$$

vérifiant

(i) $\forall i \in I \quad , \quad M \subset M_{\lambda_i}$

(ii) W admet une p-filtration par des modules de Verma contenant M.

Nous aurions donc pu démontrer le lemme (2'), puis la partie (i) du théorème 4, puis la proposition 7, le lemme 2 etc, solution que nous avons rejetée par souci de concision.
Le résultat suivant avait été auparavant annoncé par W. Schmid:

<u>Théorème 5</u> : Soit $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Alors

$$H^n(n^+, L_\lambda)_{\mu-\rho} = H^n(n^+, M_\lambda)_{\mu-\rho} = 0 \quad \text{pour } n > \ell(\mu,\lambda)$$

en particulier

$$H^n(n^+, L_\lambda)_{\mu-\rho} \neq 0 \Rightarrow \mu = w\lambda \text{ pour un } w \in W.$$

<u>Preuve</u> : Le théorème 5 est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 4.

Le théorème 4 a été démontré indépendamment par Rocha Caridi.

Je remercie M. Duflo pour d'utiles conversations.

****

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand et S. I. Gelfand, Differential Operators on the Base Affine Space and a Study of g-modules, Lie Groups and their Representations, Proc. of the Summer School on Group Representations, Bolyai Janos Math. Soc., édité par I.M. Gelfand, Wiley, New York, 1975, pp. 39-64.

[2] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand et S.I. Gelfand, Category of g-modules, traduction anglaise de Funktsional' nyi Analiz i Ego Prilozheniya, vol. 10, No 2, 1976.

[3] A. Borel, N. Wallach, Seminar on the cohomology of discrete subgroups of semi simple groups. 1976-1977 (1ère version).

[4] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[5] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Gauthiers Villars, Paris 1974.

[6] G. Hochschild, "Relative homological algebra", Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 246-269.

[7] Alvany M.P. Rocha Caridi, Splitting criteria for $\mathfrak{g}$-modules induced from a parabolic and the Bernstein-Gelfand-Gelfand résolution of a finite dimensional, irreducible $\mathfrak{g}$-module, Ph. D. Thesis. Princeton 1978.