JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **47**, 26–63 (1982)

Théorème de Type Paley–Wiener pour les Groupes de Lie Semi-Simples Réels avec une Seule Classe de Conjugaison de Sous Groupes de Cartan

P. DELORME

*Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,**
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France

Communicated by the Editors

Received October 1981

In this article, we characterize the space of Fourier transforms of the smooth compactly supported functions on a semisimple Lie group with one conjugacy class of Cartan subgroups (cf. th. 6). We get also results on the space of Fourier transforms of the elements of the enveloping algebra of the Lie algebra of such a group (cf. th. 1, 2, and 3).

0. INTRODUCTION

Dans cet article nous étudions l'espace des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur un groupe de Lie semi-simple réel avec une seule classe de conjugaison de sous groupes de Cartan, noté G dans la suite (cf. th. 4 et 6). Nous obtenons également des résultats sur l'espace des transformées de Fourier de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G, notée $\mathbb{U}$ dans la suite (cf. th. 1, 2, et 3).

Au paragraphe I nous fixons les notations.

Au paragraphe II nous étudions les premières propriétés des transformés de Fourier des sous-espaces de transitions entre K-types. Ici K est un sous-groupe compact maximal de G.

Le paragraphe III est destiné à décrire les opérateurs d'entrelacement entre séries principales intervenant dans les conditions de symétrie qui permettent de décrire l'espace des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur G (resp. les transformés de Fourier des sous-espaces de transitions de $\mathbb{U}$).

Au paragraphe IV les transformés de Fourier des sous-espaces de transition de $\mathbb{U}$ sont caractérisés par des conditions de polynomialité et de

* Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 169.

0022-1236/82/070026–38\$02.00/0

symétrie (th. 1, 2, et 3). Notre point de départ est un théorème que nous avions établi antérieurement (cf. [2]) et qui décrit l'image des homomorphismes de Harish Chandra liés aux K-types minimaux de séries principales de G. Notons que les résultats sur la cyclicité des K-types minimaux des séries principales (cf. [12]) jouent un role crucial dans nos démonstrations.

Au paragraphe V nous étudions l'espace des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur G. Nous établissons d'abord un analogue, pour les fonctions C^∞ à support compact et K-centrales, de notre résultat sur les homomorphismes de Harish Chandra (cf. prop. 18). Notre point de départ pour ce faire est le théorème de Paley–Wiener sphérique. Nous utilisons également une sorte de "principe de translation," i.e., nous étudions les transformées de Fourier des produits de fonctions C^∞ à support compact biinvariantes par K par des coefficients bien choisis de représentations de dimension finie de G. Une fois ce point établi nous procédons comme au paragraphe IV pour obtenir une caractérisations des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur G, K-finies à droite et à gauche, en terme d'analyticité, de conditions de croissance et de symétries de celles-ci. Puis, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, nous en déduisons une caractérisation, dans les mêmes termes, des transformées de Fourier des fonctions C^∞ à support compact sur G (cf. th. 6). Au passage nous montrons que l'ensemble des produits des fonctions C^∞ à support compact sur G biinvariantes par K par les coefficients des représentations de dimension finie de G forme un système de générateurs du $(\mathbb{U}, \mathbb{U})$-bimodule des fonctions C^∞ à support compact K-finies à droite et à gauche sur G (cf. th. 5). Le schéma général des démonstrations des théorèmes principaux doit beaucoup à des notes (non publiées) de M. Duflo sur les représentations des groupes de Lie semi-simples complexes, ainsi qu'au livre de D. P. Zelobenko (cf. [15]).

I. NOTATIONS

1. Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0$ la décomposition correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ la décomposition correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, complexifiée de $\mathfrak{g}_0$. On note θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ déterminée par $\mathfrak{k}_0$. On notera encore θ le prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de θ à $\mathfrak{g}$.

2. On note M (resp. M') le centralisateur (resp. normalisateur) de A dans K et $W = M'/M$. M est connexe car G a une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan. W agit sur $\mathfrak{a}_0$. Comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{a}_0$, W est le groupe de Weyl du système de racines Δ

de la paire $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0)$. Noter qu'avec nos hypothèses Δ est réduit. Pour $\alpha \in \Delta$ on note $(\mathfrak{g}_0)_\alpha$ le sous-espace de $\mathfrak{g}_0$ de poids α sous $\mathfrak{a}_0$. On définit $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid (\mathfrak{g}_0)_\alpha \subset \mathfrak{n}_0\}$ et $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\dim (\mathfrak{g}_0)_\alpha)\, \alpha$. Si $\alpha \in \Delta$ on note $H_\alpha \in \mathfrak{a}_0$ la coracine de α. Si E est un espace vectoriel réel (resp. complexe) on notera E^* son dual réel (resp. complexe). Alors $\mathfrak{a}_0^*$ s'identifie à un sous-espace réel de $\mathfrak{a}^*$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on définit $\operatorname{Re} \lambda$, $\operatorname{Im} \lambda \in \mathfrak{a}_0^*$ par l'égalité $\lambda = \operatorname{Re} \lambda + \operatorname{Im} \lambda$. Si $\alpha \in \Delta$, on notera $\lambda_\alpha = \lambda(H_\alpha)$. On notera W_λ le stabilisateur de λ dans W. Enfin on définit C la chambre de Weyl positive dans $\mathfrak{a}_0^*$ par rapport à Δ^+, i.e., $C = \{\lambda \in \mathfrak{a}_0 \mid \lambda(H_\alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta^+\}$. On note $\bar{C}$ la fermeture de C.

3. Soient $\mathfrak{m}_0$ l'algèbre de Lie de M, $\mathfrak{t}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}_0$. Alors $\mathfrak{t}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_0$. Soient $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{a}_0$, et $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$ les complexifiées de $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{t}_0, \mathfrak{h}_0$. $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note $\Delta_\mathbb{C}$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}$, resp. $\Delta_\mathfrak{m}$) le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (resp. $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$, resp. $(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$), et $W_\mathbb{C}$ (resp. $W_\mathfrak{k}$, resp. $W_\mathfrak{m}$) le groupe de Weyl de $\Delta_\mathbb{C}$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}$, resp. $\Delta_\mathfrak{m}$). La décomposition $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ permet d'identifier $\mathfrak{h}^*$ à $\mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$. On pourra donc regarder $\Delta_\mathbb{C}$, $\Delta_\mathfrak{k}$, $\Delta_\mathfrak{m}$ comme inclus dans $\mathfrak{h}^*$. Soit $\Delta_\mathfrak{k}^+$ un système de racines positives de $\Delta_\mathfrak{k}$. Alors $\Delta_\mathfrak{k}^+ \cap \Delta_\mathfrak{m}$ sera noté $\Delta_\mathfrak{m}^+$ et c'est un système de racines positives de $\Delta_\mathfrak{m}$. G ayant une seule classe de sous-groupes de Cartan $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{g}_0$ et tout élément de $\Delta_\mathbb{C}$ peut s'écrite sous la forme (α, β), $\alpha \in \Delta_\mathfrak{k}$, $\beta \in \mathfrak{a}^*$. En outre $(\alpha, 0) \in \Delta_\mathbb{C}$ implique $\alpha \in \Delta_\mathfrak{m}$ et (α, β), $(\alpha, \beta') \in \Delta_\mathbb{C}$ implique $\beta' = \pm\beta$. On définit $\Delta_\mathbb{C}^+ = \{(\alpha, \beta) \in \Delta_\mathbb{C} \mid \alpha \in \Delta_\mathfrak{k}^+\}$. $\Delta_\mathbb{C}^+$ est un système de racines positives de $\Delta_\mathbb{C}$. En outre $\Delta_\mathbb{C}^+$ est θ-stable. On note $\rho_\mathfrak{m} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_\mathfrak{m}^+} \alpha$. Pour $\alpha \in \Delta_\mathbb{C}$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}$) on désigne par $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{t}$) la coracine de α. Si $\nu \in \mathfrak{h}^*$ (resp. $\mathfrak{t}^*$) on note $\nu_\alpha = \nu(H_\alpha)$. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}$. Nous noterons de même la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{h}^*$ qu'on en déduit. Alors $\nu_\alpha = 2\langle \nu, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$. On note $\mathscr{P}_\mathbb{C} \subset \mathfrak{h}^*$ (resp. $\mathscr{P}_\mathfrak{k} \subset \mathfrak{t}^*$, resp. $\mathscr{P}_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{t}^*$) le réseau des poids entiers de $\Delta_\mathbb{C}$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}$, resp. $\Delta_\mathfrak{m}$), $\mathscr{P}_\mathbb{C}^+$ (resp. $\mathscr{P}_\mathfrak{k}^+$, resp. $\mathscr{P}_\mathfrak{m}^+$) l'ensemble des poids entiers dominants de $\Delta_\mathbb{C}$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}$, resp. $\Delta_\mathfrak{m}$) relativement à $\Delta_\mathbb{C}^+$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}^+$, resp. $\Delta_\mathfrak{m}^+$). On a $\mathscr{P}_\mathfrak{k} = \mathscr{P}_\mathfrak{m}$.

4. On note $\hat{M}$ (resp. $\hat{K}$) l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de M (resp. K) qui s'identifie à une partie de $\mathscr{P}_\mathfrak{m}^+$ (resp. $\mathscr{P}_\mathfrak{k}^+$) en indexant les représentations par leur plus haut poids. Pour $\sigma \in \hat{M}$ on note $|\sigma|$ l'unique élément de $\mathscr{P}_\mathfrak{k}^+$ conjugué de $\sigma \in \mathscr{P}_\mathfrak{m}^+ \subset \mathscr{P}_\mathfrak{k}$. On notera encore $|\sigma|$ l'élément de $\hat{K}$ correspondant. Si $\sigma \in \hat{M}$ (resp. $\delta \in \hat{K}$) on note (σ, E_σ) (resp. (δ, E_δ)) un représentant de σ (resp. δ), (σ^*, E_{σ^*}) (resp. (δ^*, E_{δ^*})) la contragrediente de (σ, E_σ) (resp. (δ, E_δ)). W agit sur $\hat{M}$. Si $w \in W$ et $\sigma \in \hat{M}$, on note $(w\sigma, E_{w\sigma})$ un représentant de $w\sigma \in \hat{M}$. On note W_σ le stabilisateur dans W de $\sigma \in \hat{M}$. Si $\delta \in \hat{K}$ on munit $\operatorname{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma)$ du produit scalaire déduit du produit scalaire sur $\operatorname{Hom}(E_\delta, E_\sigma) \simeq E_\delta^* \otimes E_\sigma$. A un scalaire de module 1 près, il existe un isomorphisme canonique: $\operatorname{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma) \to \operatorname{Hom}_M(E_\delta, E_{w\sigma})$. On choisit un des isomorphismes remar-

quables entre $\mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma)$ et $\mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_{w\sigma})$ qu'on note $\varphi \to w\varphi$ par abus de notation. On note $m(\delta, \sigma)$ le nombre de fois que δ contient σ. On a:

$$m(\delta, \sigma) = \dim \mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma).$$

Si E est M-module (resp. K-module), on notera E^σ (resp. E^δ) sa composante isotypique de type σ (resp. δ).

5. Si E est un espace vectoriel complexe, on note $S(E)$ son algèbre symétrique que l'on regardera souvent comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur E^*. Si $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie complexe, on note $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{s}$. Plus particulièrement on notera $\mathbb{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $S = S(\mathfrak{a}) = U(\mathfrak{a})$, Z le centre de $\mathbb{U}$, $Z(\mathfrak{k})$ le centre de $U(\mathfrak{k})$.

6. *Groupes simples avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan et de rang réel* 1. Si G est en outre de rang 1 on a $\mathfrak{g}_0 \approx \mathfrak{so}(2n+1, 1)$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2n+1, 1)$ et décrivons plus précisément $\mathfrak{g}_0$. Pour $p \in \mathbb{N}$ on note $M(p, \mathbb{R})$ (resp. $M(p, \mathbb{C})$) les matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et I_p la matrice identité de $M(p, \mathbb{R})$. Si a est une matrice à coefficients complexes on note ${}^t a$ (resp. $\bar{a}$, resp. a^*) sa transposée (resp. sa conjuguée, resp. sa transconjuguée). Alors:

$$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{so}(2n+1, 1) = \{a \mid a \in M(2n+2, \mathbb{R}), aJ + Ja = 0\},$$

où

$$J = \begin{pmatrix} I_{2n+1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & -1 \end{pmatrix},$$

On prend alors

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathfrak{so}(2n+1) \right\},$$

$$\mathfrak{a}_0 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ & 0 & \vdots \\ & & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{n}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t X & 0 \\ -X & 0 & X \\ 0 & {}^t X & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \text{vecteur colonne de } \mathbb{R}^{2n} \right\},$$

$$\mathfrak{t}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \bigcirc \\ 0 & 0 & x_1 & & & & \\ 0 & -x_1 & 0 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & x_n & 0 \\ & & & & -x_n & 0 & 0 \\ \bigcirc & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de $i\mathfrak{t}_0^*$ pour B (forme de Killing de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{h}^*$) telle que:

$$\Delta_{\mathfrak{m}} = \{\pm e_i \pm e_j \mid i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\},$$

$$\Delta_{\mathfrak{t}} = \Delta_{\mathfrak{m}} \cup \{\pm e_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$\Delta_{\mathbb{C}} = \{\pm e_i \pm e_j;\ i \neq j\ 0 \leqslant i, j \leqslant n\},$$

où l'on a noté e_0 l'unique élément de Δ^+. On prend

$$\Delta_{\mathfrak{t}}^+ = \{e_i \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}.$$

Alors $\Delta_{\mathfrak{m}}^+ = \{e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ et $\Delta_{\mathbb{C}}^+ = \Delta_{\mathfrak{m}}^+ \cup \{e_i \pm e_0 \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Pour $\nu \in \mathfrak{h}^*$ avec $\nu = \nu_0 e_0 + \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_n e_n$, on note $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)$. Si en outre $\nu \in \mathfrak{t}^*$, i.e., $\nu_0 = 0$, on note $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Alors

$$\mathscr{P}_{\mathfrak{m}} = \mathscr{P}_{\mathfrak{t}} = \{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid \forall i = 1, \ldots, n,\ 2\sigma_i \in \mathbb{Z}$$
$$\text{et les entiers } 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_n \text{ sont de même parité}\},$$

$$\mathscr{P}_{\mathbb{C}} = \{\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n) \mid \forall i = 0, 1, \ldots, n,\ 2\nu_i \in \mathbb{Z}$$
$$\text{et } 2\nu_0, 2\nu_1, \ldots, 2\nu_n \text{ sont de même parité}\},$$

$$\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}^+ = \{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \mid \sigma \in \mathscr{P}_{\mathfrak{m}} \text{ et } \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant |\sigma_n|\},$$

$$\mathscr{P}_{\mathfrak{t}}^+ = \{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \mid \delta \in \mathscr{P}_{\mathfrak{t}} \text{ et } \delta_1 \geqslant \delta_2 \cdots \geqslant \delta_n \geqslant 0\},$$

$$\mathscr{P}_{\mathbb{C}}^+ = \{\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n) \mid \nu \in \mathscr{P}_{\mathbb{C}} \text{ et } \nu_1 \geqslant \nu_2 \cdots \geqslant \nu_n \geqslant |\nu_0|\}.$$

Pour $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathscr{P}_{\mathfrak{m}}$ l'unique élément de $\mathscr{P}_{\mathfrak{t}}^+$ conjugué de σ sous W est égal à $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, |\sigma_n|)$. Enfin

$$\rho_{\mathfrak{m}} = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad \rho = \tfrac{1}{2} n e_0.$$

7. Revenons au cas général et étudions certains sous-groupes simples de rang 1 de G. Soit $\alpha \in \Delta$, et $2n = \dim(\mathfrak{g}_0)_\alpha$. On notera $\mathfrak{g}_0^\alpha$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ engendrée par $(\mathfrak{g}_0)_\alpha$ et $(\mathfrak{g}_0)_{-\alpha}$ (noter que l'indice α est en haut dans $\mathfrak{g}_0^\alpha$). Notons par n en indice, supérieur les objets relatifs à

$\mathfrak{g}_0^n = \mathfrak{so}(2n+1, 1)$ définis au numéro précédent. Alors il existe un unique isomorphisme j_α de $\mathfrak{so}(2n+1, 1)$ sur $\mathfrak{g}_0^\alpha$ vérifiant:

(1) $j_\alpha(\mathfrak{k}_0^n) \subset \mathfrak{k}_0$.

(2) $j_\alpha(\mathfrak{t}_0^n) \subset \mathfrak{t}_0$.

(3) $j_\alpha(\mathfrak{a}_0^n) \subset \mathfrak{a}_0$.

(4) Si $v \in \mathfrak{so}(2n+1, 1)_\mathbb{C} = \mathfrak{g}^n$ est de poids $\gamma \in (\Delta_\mathbb{C}^+)^n$ (resp. $(\Delta_{\mathfrak{k}^n}^+)^n$) sous $\mathfrak{h}_0^n$ (resp. $\mathfrak{t}_0^n$), $j_\alpha(v)$ est de poids $\gamma' \in \Delta_\mathbb{C}^+$ (resp. $\Delta_\mathfrak{k}^+$) sous $\mathfrak{h}_0$ (resp. $\mathfrak{t}_0$).

(5) Si $v \in \mathfrak{g}_0$ est de poids e_0 sous $\mathfrak{a}_0^n$, $j_\alpha(v)$ est de poids α sous $\mathfrak{a}_0$.

L'existence est claire et l'unicité résulte essentiellement du fait que le groupe d'automorphismes du système de racines B_n, $n \geqslant 2$ (resp. A_1 si $n = 1$) est égal au groupe de Weyl de ce système (cf. [1, p. 253]) et que $(\Delta_{\mathfrak{k}^n}^+)^n$ est de type B_n si $n \geqslant 2$ (resp. A_1 si $n = 1$). On notera $j_\alpha(\mathfrak{k}_0^n) = \mathfrak{k}_0^\alpha$, $j_\alpha(\mathfrak{t}_0^n) = \mathfrak{t}_0^\alpha$, etc. On notera G^α, M^α, etc., le sous groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{g}_0^\alpha$, $\mathfrak{m}_0^\alpha$, etc., et $\mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{m}^\alpha$, etc., la complexifiée de $\mathfrak{g}_0^\alpha$, $\mathfrak{m}_0^\alpha$, etc. On notera j_α l'homomorphisme de Spin $(2n+1, 1)$ dans G^α dont la différentielle est j_α.

II. Series Principales et Sous-Espaces de Transitions: Premières Propriétés

1. Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$. On note encore δ, γ les différentielles de δ, γ. Soient J^δ (resp. J^γ) le noyau dans $U(\mathfrak{k})$ de δ (resp. γ). On définit le sous-espace de transition $\mathbb{U}^{\delta\gamma} = \{u \in \mathbb{U} \mid J^\delta u \subset \mathbb{U}J^\gamma\}$ (cf. [3, 9.1]).

Proposition 1. (i) $\forall \beta, \gamma, \delta \in \hat{K}$, $\mathbb{U}^{\delta\gamma}.\, \mathbb{U}^{\gamma\beta} \subset \mathbb{U}^{\delta\beta}$.

(ii) *Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$, $\mathscr{L}$ un $(\mathfrak{g}, K)$-module, $v \in \mathscr{L}^\gamma$, $w \in \mathscr{L}^\delta$ et $u \in \mathbb{U}$ avec $uv = w$. Alors il existe $u' \in \mathbb{U}^{\delta\gamma}$ tel que $u'v = w$. En outre on a*

$$\mathbb{U}^{\delta\gamma}\mathscr{L}^\gamma \subset \mathscr{L}^\delta.$$

Démonstration. (1) résulte des définitions; (ii) résulte de [3, 9.1.5 (ii) et 9.1.2(ii)].

2. Pour $\sigma \in \hat{M}$, on notera

$$L^\infty(\sigma) = \{\varphi \mid \varphi: K \to E_\sigma, C^\infty, \forall k \in M, \forall m \in M\ \varphi(km) = \sigma(m^{-1})\, \varphi(k)\}.$$

On fait agir K par action régulière gauche sur $L^\infty(\sigma)$ et l'on note $L(\sigma)$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $L^\infty(\sigma)$. On note $\Gamma(\sigma) = \{\delta \in \hat{K} \mid \delta$ est contenu dans $L(\sigma)\}$. D'après la réciprocité de Frobenius et avec les notations de I.4: $\Gamma(\sigma) = \{\delta \in \hat{K} \mid m(\delta, \sigma) \neq 0\}$ et $\delta \in \hat{K}$ apparaît dans $L(\sigma)$ avec la multiplicité $m(\delta, \sigma)$.

Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ on définit aussi

$$L^\infty(\sigma, \lambda) = \{\varphi \mid \varphi : G \to E_\sigma, C^\infty, \forall g \in G, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N,$$
$$\varphi(gman) = a^{-\lambda-\rho}\sigma(m^{-1})\,\varphi(g)\},$$

où l'on note $a \to a^{-\lambda-\rho}$ le caractère de A dont la différentielle est $-\lambda-\rho$. On fait agir G par représentation régulière gauche sur $L^\infty(\sigma, \lambda)$. On note $L(\sigma, \lambda)$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $L^\infty(\sigma, \lambda)$ qui est stable sous l'action de $\mathfrak{g}$. $L(\sigma, \lambda)$ est alors un $(\mathfrak{g}, K)$-module. C'est la série principale associée à σ et λ.

L'opération de restriction à K est un isomorphisme de $L^\infty(\sigma, \lambda)$ (resp. $L(\sigma, \lambda)$) sur $L^\infty(\sigma)$ (resp. $L(\sigma)$). Par cet isomorphisme on obtient une structure de G-module (resp. $(\mathfrak{g}, K)$-module) sur $L^\infty(\sigma)$ (resp. $L(\sigma)$). La représentation de G (resp. $\mathbb{U}$) dans $L^\infty(\sigma)$ ainsi obtenue sera notée $r_{\sigma\lambda}$. D'après la réciprocité de Frobenius, pour $\delta \in \hat{K}$, $\mathrm{Hom}_K(E_\delta, L(\sigma))$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma)$. On notera $\mathscr{E}_\sigma^\delta = \mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma)$ muni de sa structure d'espace de Hilbert (cf. I.4) et l'isomorphisme canonique $\mathscr{E}_\sigma^\delta \to \mathrm{Hom}_K(E_\delta, L(\sigma))$ sera noté $e \to \tilde{e}$.

3. Notant $\langle\, ,\rangle$ le crochet de dualité sur $E_\sigma \times E_{\sigma^*}$ on définit sur $L^\infty(\sigma) \times L^\infty(\sigma^*)$ une forme bilinéaire notée encore $\langle\, ,\rangle$ par:

$$\forall \varphi \in L(\sigma), \forall \psi \in L(\sigma^*), \qquad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_K \langle \varphi(k), \psi(k) \rangle\, dk,$$

où dk est la mesure de Haar normalisée sur K. La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 2. (i) *Sur $L^\infty(\sigma) \times L^\infty(\sigma^*)$ (resp. $L(\sigma) \times L(\sigma^*)$) $\langle\, ,\rangle$ est non dégénérée.*

(ii) *Soient δ, $\gamma \in \hat{K}$. Si $\delta \neq \gamma^*$, les sous-espaces $L^\delta(\sigma)$ et $L^\gamma(\sigma)$ sont orthogonaux. La restriction de la forme à $L^\delta(\sigma) \times L^{\delta^*}(\sigma^*)$ est non dégénérée. Tout sous-espace $\mathfrak{k}$-invariant de $L(\sigma)$ est égal à son biorthogonal.*

(iii) *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ on a:*

$$\forall g \in G, \quad \forall \varphi \in L^\infty(\sigma), \quad \forall \psi \in L^\infty(\sigma^*),$$
$$\langle r_{\sigma\lambda}(g)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, r_{(\sigma^*)(-\lambda)}(g^{-1})\,\psi \rangle.$$

(iv) *Notons $u \to \tilde{u}$ l'antiautomorphisme principal de $\mathbb{U}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on a :*

$$\forall u \in \mathbb{U}, \quad \forall \varphi \in L^\infty(\sigma), \quad \forall \psi \in L^\infty(\sigma),$$
$$\langle r_{\sigma\lambda}(u)\,\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, r_{(\sigma^*)(-\lambda)}(\tilde{u})\,\psi \rangle.$$

4. Soient $\sigma \in \hat{M}$, $u \in \mathbb{U}$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $r_{\sigma\lambda}(u)$ est un endomorphisme de $L(\sigma)$. D'autre part $L(\sigma)$ est somme directe des sous-espaces $L^\delta(\sigma)$, $\delta \in \hat{K}$. Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$. Pour $\varphi \in L^\gamma(\sigma)$ on note $r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u)\,\varphi$ la composante dans $L^\gamma(\sigma)$ de $r_{\sigma\lambda}(u)\,\varphi$. Alors $r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u) \in \mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$. De plus on a:

PROPOSITION 3 (cf. [2, prop. 8 et prop. 9]). *Soit $u \in \mathbb{U}$. Alors:*

(i) *L'application $\lambda \to r_{\sigma\lambda}(u)$ de $\mathfrak{a}^*$ dans $\mathrm{Hom}(L(\sigma), L(\sigma))$ est polynomiale, i.e., définit un élément $r_\sigma(u)$ de*

$$S \otimes \mathrm{Hom}(L(\sigma), L(\sigma)).$$

(ii) *$u \to r_\sigma(u)$ définit un homomorphisme de $\mathbb{U}$ dans $S \otimes \mathrm{Hom}(L(\sigma), L(\sigma))$.*

(iii) *L'application $\lambda \to r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u)$ de $\mathfrak{a}^*$ dans $\mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$ est polynomiale et sera notée $r_\sigma^{\delta\gamma}(u) \in S \otimes \mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$.*

5. Avec les notations précédentes, on se fixe $a \in E_\gamma$, $b \in E_\delta$ de normes 1. On définit $u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta)$ de la façon suivante:
Soit $e \in \mathscr{E}_\sigma^\gamma$; alors $f = u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)\, e$ est l'élément de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ tel que

$$(r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u))(\tilde{e}(a)) = \tilde{f}(b) + \sum_{b'} \tilde{f}'(b'),$$

où b' parcourt une base de l'orthogonal de b dans E_δ.
Si $\varepsilon \in \hat{K}$ on notera, $\tilde{\varepsilon} = \{\sigma \mid \sigma \in \hat{M}, |\sigma| = \varepsilon\}$. $\tilde{\varepsilon}$ est une orbite de W dans $\hat{M}$.
Nous noterons $F^{\delta\gamma}$ (resp $\mathscr{F}^{\delta\gamma}$, resp. $F_\varepsilon^{\delta\gamma}$, resp. $\mathscr{F}_\varepsilon^{\delta\gamma}$) l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)$,

$$(\text{resp.} (\sigma, \lambda) \to r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u), \qquad \text{resp.} (\sigma, \lambda) \to u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda),$$
$$\text{resp.} (\sigma, \lambda) \to r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u))$$

où (σ, λ) décrit $\hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ (resp. $\tilde{\varepsilon} \times \mathfrak{a}^*$, resp. $\hat{M} \times \mathfrak{a}^*$) et u décrit $\mathbb{U}$.
Remarquons que d'après [3, 9.1.5(ii) et 9.1.2(ii)], on obtient $F^{\delta\gamma}$ (resp. $\mathscr{F}^{\delta\gamma}$, resp. $F_\varepsilon^{\delta\gamma}$, resp. $\mathscr{F}_\varepsilon^{\delta\gamma}$) lorsque u décrit $\mathbb{U}^{\delta\gamma}$. D'autre part on a:

PROPOSITION 4. *Avec les notations définies ci-dessus:*

(i) *$F^{\delta\gamma}$, $F_\varepsilon^{\delta\gamma}$ ne dépendent pas du choix de a et de b.*

(ii) *$F^{\delta\gamma} \subset \bigoplus_{\sigma \in \hat{M}} S \otimes \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta)$, $F_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\varepsilon}} S \otimes \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta)$.*

(iii) *$\mathscr{F}^{\delta\gamma} \subset \bigoplus_{\sigma \in \hat{M}} S \otimes \mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$, $\mathscr{F}_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset \bigoplus_{\sigma \in \tilde{\varepsilon}} S \otimes \mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$.*

(iv) *Identifiant* $\mathrm{Hom}(L^{\gamma}(\sigma), L^{\delta}(\sigma))$ *à* $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_{\sigma}^{\gamma}, \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}) \otimes \mathrm{Hom}(E_{\gamma}, E_{\delta})$ *on a:*

$$\mathscr{F}^{\delta\gamma} = F^{\delta\gamma} \otimes \mathrm{Hom}(E_{\gamma}, E_{\delta}) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{F}_{\varepsilon}^{\delta\gamma} = F_{\varepsilon}^{\delta\gamma} \otimes \mathrm{Hom}(E_{\gamma}, E_{\delta}).$$

(v) $F_{\varepsilon}^{\delta\delta}$ *est obtenu lorsque u décrit* $\mathbb{U}^{K}$.

(vi) $\forall \beta, \gamma, \delta \in \hat{K}$ *on a* $F^{\delta\gamma} \cdot F^{\gamma\beta} \subset F^{\delta\beta}$ *et* $\mathscr{F}^{\delta\gamma} \cdot \mathscr{F}^{\gamma\beta} \subset \mathscr{F}^{\delta\beta}$.

Démonstration: (cf. [2, prop. 9 et 10]).

La proposition suivante que l'on n'utilisera pas dans la suite se démontre de manière analogue au théorème 1.10 de [4].

PROPOSITION 5. *Soit* $u \in \mathbb{U}$ *et* $\delta \in \hat{K}$. *Si l'on a:*

$$\forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad r_{\sigma\lambda}(u)\, L^{\delta}(\sigma) = 0, \quad \textit{on a } u \in \mathbb{U}J^{\delta}.$$

III. OPERATEURS D'ENTRELACEMENTS ENTRE SERIES PRINCIPALES

1. *Généralités*

Soient L_1 et L_2 deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules et A un opérateur d'entrelacement entre L_1 et L_2. Pour $\delta \in \hat{K}$, A définit un opérateur $\mathrm{Hom}_K(E_{\delta}, L_1) \to \mathrm{Hom}_K(E_{\delta}, L_2)$ que l'on notera a^{δ}.

Soient $\sigma, \sigma' \in \hat{M}$, $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{a}^*$ et A un opérateur d'entrelacement entre les séries principales $(r_{\sigma\lambda}, L(\sigma))$, $(r_{\sigma'\lambda'}, L(\sigma'))$. Pour $\delta \in \hat{K}$, on a identifié $\mathrm{Hom}_K(E_{\delta}, L(\sigma))$ (resp. $\mathrm{Hom}_K(E_{\delta}, L(\sigma'))$) à $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ (resp. $\mathscr{E}_{\sigma'}^{\delta}$) (cf. II.2) et a^{δ} est alors un opérateur de $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ dans $\mathscr{E}_{\sigma'}^{\delta}$.

2. *Rappels sur le Groupe de Weyl*

Soit $w \in W$. On note

$$S(w) = \Delta^{+} \cap -w^{-1}(\Delta^{+})$$

et

$$D(w) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \mathrm{Re}\, \lambda_{\alpha} > 0, \forall \alpha \in S(w)\}.$$

On note $l(w)$ le cardinal de $S(w)$ qui est la longueur de w. Rappelons que Δ est réduit car G a une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan. On notera $(\mathfrak{n}_0)_w = \sum_{\alpha \in S(w)} (\mathfrak{g}_0)_{\alpha}$ et N_w le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $(\mathfrak{n}_0)_w$. Pour chaque $w \in W$ on fixe une mesure de Haar sur N_w.

3. La Proposition Suivante est Bien Connue

PROPOSITION 6 (cf. 3, 8.10). *Soient* $\sigma \in \hat{M}$, $w \in W$, *m un représentant de w dans M'*

(i) *$\forall \lambda \in D(w)$, $\forall \varphi \in L^\infty(\sigma, \lambda)$, $\forall g \in G$, $\int_{N_{w^{-1}}} \varphi(gnm)\, dn$ converge et la fonction $g \to \int_{N_{w^{-1}}} \varphi(gnm)\, dn$ est dans $L^\infty(w\sigma, w\lambda)$.*

(ii) *$\forall \lambda \in D(w)$, l'opérateur $A(m, \sigma, \lambda): L^\infty(\sigma, \lambda) \to L^\infty(w\sigma, w\lambda)$, défini par $(A(m, \sigma, \lambda)\varphi)(g) = \int_{N_{w^{-1}}} \varphi(gnm)\, dn$ pour $\varphi \in L^\infty(\sigma, \lambda)$, est un homomorphisme continu de G-modules.*

(iii) *Par restriction des fonctions à K on en déduit un opérateur d'entrelacement entre $r_{\sigma\lambda}$ et $r_{(w\sigma)(w\lambda)}$ qu'on notera $A(m, \sigma, \lambda)$, et qui envoie $L(\sigma)$ dans $L(w\sigma)$.*

(iv) *Soient $w, w' \in W$, m (resp. m') un représentant de w (resp. w') dans M'. Soient $\sigma \in \hat{M}$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ avec $\lambda \in D(ww')$. On suppose $l(ww') = l(w) + l(w')$. Alors $A(mm', \sigma, \lambda)$, $A(m, m'\sigma, m'\lambda)$ et $A(m', \sigma, \lambda)$ sont bien définis et il existe $b(m, m') \in \mathbb{C}^*$, qui dépend des choix des mesures de Haar sur $N_{w^{-1}}$, $N_{(w')^{-1}}$ et $N_{(ww')^{-1}}$ tel que*

$$A(mm', \sigma, \lambda) = b(m, m')\, A(m, w'\sigma, w'\lambda)\, A(m', \sigma, \lambda).$$

4. *Le Cas du Rang* 1

On prend $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2n+1, 1)$. Outre les notations générales toujours en vigueur, on utilise les notations particulières à ce cas introduites en I.6. On note $w \in W$ l'unique élément non trivial, m_w un représentant de w dans M'. Alors $w = s_\alpha$ où α est l'unique élément de Δ^+. On identifie $\mathfrak{a}^*$ à $\mathbb{C}$ par $\lambda \in \mathbb{C} \to \frac{1}{2}\lambda\alpha$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ on a $w\lambda = -\lambda$ et pour $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n) \in \hat{M}$ on a: $w\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, -\sigma_n)$. D'autre part:

$$\Gamma(\sigma) = \{\delta \in \hat{K} \mid \delta = (\delta_1, ..., \delta_n), \delta_1 \geqslant \sigma_1 \cdots \geqslant \delta_n \geqslant |\sigma_n|\}$$

et les entiers $2\delta_1$ et $2\sigma_1$ sont de même parité.

D'autre part si $\delta \in \Gamma(\sigma)$ on a $m(\delta, \sigma) = 1$. Pour tout $\sigma \in \hat{M}$ et $\delta \in \Gamma(\sigma)$ on choisit $e_{\delta\sigma} \in \mathscr{E}_\sigma^\delta$ de norme 1.

La proposition suivante est une reformulation de résultats de Thieleker (cf. [10; 7, §10]):

Proposition 7. *Soit $\sigma \in \hat{M}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ avec* $\operatorname{Re} \lambda > 0$

(i) *Il existe un unique opérateur $B(w, \sigma, \lambda): L(\sigma) \to L(w\sigma)$ qui entrelace $r_{\sigma\lambda}$ et $r_{(w\sigma)(w\lambda)}$ tel que:*

(α) $b^{|\sigma|}(w, \sigma, \lambda)\, e_{|\sigma|\sigma} = we_{|\sigma|\sigma}$

(cf. I.4 *pour la définition de* $we_{\delta\sigma} \in \mathscr{E}_\sigma^\delta$, $\delta \in \hat{K}$ *et* III.1 *pour la définition de* b^δ).

(β) *Il existe $c(\sigma, \lambda) \in \mathbb{C}^*$ tel que*

$$c(\sigma, \lambda)\, B(w, \sigma, \lambda) = A(m_w, \sigma, \lambda).$$

(ii) *Pour* $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n) \in \Gamma(\sigma)$ *on définit*

$$P_{\delta\sigma}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=|\sigma_i+n-i|+1}^{\delta_i+n-i} (\lambda - 2j)$$

et

$$Q_{\delta\sigma}(\lambda) = P_{\delta\sigma}(\lambda)/P_{\delta\sigma}(-\lambda).$$

Alors $b^\delta(w, \sigma, \lambda)\, e_{\delta\sigma} = c(\delta, \sigma)\, Q_{\delta\sigma}(\lambda)\ (we_{\delta\sigma})$, *où* $c(\delta, \sigma)$ *est un nombre complexe de module* 1.

(iii) *Pour* $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n) \in \hat{K}$, *on pose*

$$\delta + \rho_{\mathfrak{m}} = (d_1, ..., d_n) \in \mathfrak{t}^*, \qquad \text{i.e.,} \quad d_i = \delta_i + n - i, \ i = 1, ..., n.$$

On pose $\sigma + \rho_{\mathfrak{m}} = (s_1, ..., s_n) \in \mathfrak{t}^*$, *i.e.,* $s_i = \sigma_i + n - i$. *Alors* $B(w, \sigma, \lambda)$ *n'est pas injectif si et seulement si* λ *est un élément de l'un des ensembles suivants:*

$$\begin{aligned}
A_n(\sigma) &= \{2(|s_n| + 1), 2(|s_n| + 2, ..., 2(s_{n-1} - 1)\},\\
A_{n-1}(\sigma) &= \{2(s_{n-1} + 1), 2(s_{n-1} + 2), ..., 2(s_{n-2} - 1)\},\\
&\ \vdots\\
A_2(\sigma) &= \{2(s_2 + 1), 2(s_2 + 2), ..., 2(s_1 - 1)\},\\
A_1(\sigma) &= \{2(s_1 + 1), 2(s_1 + 2), ...\}.
\end{aligned}$$

(*Noter que seul* $A_1(\sigma)$ *n'est pas de cardinal fini.*)

(iv) *Si* $\lambda \in A_k(\sigma)$, Ker $B(w, \sigma, \lambda)$ *est constitué de tous les* K*-types* $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n) \in \hat{K}$ *vérifiant:*

(α) $d_k \geqslant 2\lambda$ *où* $\delta + \rho_{\mathfrak{m}} = (d_1, ..., d_n)$.

(β) $\delta \in \Gamma(\sigma)$ *i.e.* $\sigma_1 \geqslant \delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta_n \geqslant |\sigma_n|$ *et* $2\delta_1$, $2\sigma_1$ *sont des entiers de même parité.*

(v) *Supposons encore* $\lambda \in A_k(\sigma)$. *Définissons* $\sigma' \in \hat{M}'$ *et* $\lambda' \in \mathfrak{a}^*$ *par*

$$\sigma' + \rho_{\mathfrak{m}} = (s_1, ..., s_{k-1}, \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} s_k)\, \lambda, s_{k+1}, ..., s_n)$$

et $\lambda' = 2\,|s_k|$, *i.e.,* $\lambda'_\alpha = 2\,|s_k|$. *Alors il existe un opérateur* $S(\sigma, \lambda)\, L(\sigma') \to L(\sigma)$ *qui entrelace* $r_{\sigma'\lambda'}$ *et* $r_{\sigma\lambda}$ *et qui vérifie*

$$\operatorname{Im} S(\sigma, \lambda) = \operatorname{Ker} B(w, \sigma, \lambda).$$

En particulier $S(\sigma, \lambda)$ *est injectif sur* $L^{|\sigma'|}(\sigma)$. $S(\sigma, \lambda)$ *est unique à un scalaire multiplicatif près.*

5. Revenons au cas général. Soit $\alpha \in \Delta$ et reprenons les notations de I.7. Alors on a des décompositions

$$\mathfrak{m}_0 = {}^*\mathfrak{m}_0^\alpha \oplus \mathfrak{m}_0^\alpha,$$
$$\mathfrak{a}_0 = {}^*\mathfrak{a}_0^\alpha \oplus \mathfrak{a}_0^\alpha,$$

où ${}^*\mathfrak{m}_0^\alpha$, ${}^*\mathfrak{a}_0^\alpha$ sont des algèbres de Lie et vérifient:

(a) ${}^*\mathfrak{a}_0^\alpha$ est l'orthogonal de α dans $\mathfrak{a}_0$,

(b) ${}^*\mathfrak{m}_0^\alpha$ et $\mathfrak{g}_0^\alpha$ commutent,

(c) ${}^*\mathfrak{a}_0^\alpha$ commute à ${}^*\mathfrak{m}_0^\alpha \oplus \mathfrak{g}_0^\alpha$.

On note $\mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{a}^\alpha$, etc., les algèbres de Lie complexifiées des algèbres de Lie réelles $\mathfrak{g}_0^\alpha$, $\mathfrak{a}_0^\alpha$, etc. On note G^α, K^α, A^α, ${}^*A^\alpha$, ${}^*M^\alpha$, etc., les sous groupes analytiques de G correspondant à $\mathfrak{g}_0^\alpha$, $\mathfrak{k}_0^\alpha$, $\mathfrak{a}_0^\alpha$, ${}^*\mathfrak{a}_0^\alpha$, ${}^*\mathfrak{m}_0^\alpha$, etc.

Des propriétés (a) à (c) et de I.7 il résulte que $G^\alpha = K^\alpha A^\alpha N^\alpha$ est une décomposition d'Iwasawa de G^α, $M^\alpha A^\alpha N^\alpha$ est un sous-groupe parabolique minimal de G^α, ${}^*M^\alpha$ et G^α commutent, $M = ({}^*M^\alpha)(M^\alpha)$ et ${}^*M^\alpha \cap M^\alpha$ est fini et central dans M et même dans ${}^*M^\alpha G^\alpha$. Désignons par ${}^*\widehat{M^\alpha}$ (resp. $\widehat{M^\alpha}$) le dual unitaire du groupe compact ${}^*M^\alpha$ (resp. M^α). Soit $\sigma^\alpha \in \widehat{M^\alpha}$ (resp. ${}^*\sigma^\alpha \in \widehat{M^\alpha}$). Notons $(\sigma^\alpha, E_{\sigma^\alpha})$ (resp. $({}^*\sigma^\alpha, E_{{}^*\sigma^\alpha})$) un représentant de σ^α (resp. ${}^*\sigma^\alpha$). Alors $\sigma^\alpha|_{M^\alpha \cap {}^*M^\alpha}$ (resp. ${}^*\sigma^\alpha|_{M^\alpha \cap {}^*M^\alpha}$) est scalaire. Si ces caractères de $M^\alpha \cap {}^*M^\alpha$ coïncident on obtient sur $E_{{}^*\sigma^\alpha} \otimes E_{\sigma^\alpha}$ une représentation unitaire de M notée ${}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha$ et définie par

$$\forall m \in M ({}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha)(m) = {}^*\sigma^\alpha(m_1) \otimes \sigma^\alpha(m_2)$$

si $m = m_1 m_2$ avec $m_1 \in {}^*M^\alpha$, $m_2 \in M^\alpha$. Il est clair que tout élément σ de $\hat{M}$ peut s'écrire sous la forme ${}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha$ avec $\sigma^\alpha \in {}^*\widehat{M^\alpha}$ et $\sigma^\alpha \in \widehat{M^\alpha}$ comme ci-dessus. On notera $s_\alpha \in W$ la réflexion par rapport à α. Alors s_α peut être regardé comme l'unique élément non trivial du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_0^\alpha, \mathfrak{a}_0^\alpha)$. Alors s_α opère sur $\hat{M}$ et $\hat{M}^\alpha$. Il est clair que, si $\sigma = {}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha \in \hat{M}$ on a $(s_\alpha \sigma) = {}^*\sigma^\alpha \otimes (s_\alpha \sigma^\alpha)$. On choisit m_α un représentant de s_α dans M'. On peut choisir m_α dans G^α ce que nous ferons dans la suite. Rappelons que d'après I.7, l'homomorphisme j_α définit un isomorphisme entre $\mathfrak{so}(2n+1, 1)$ et $\mathfrak{g}_0^\alpha$ où $n = \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}_0)_\alpha = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{n}_0^\alpha$.

6. On conserve les notations du paragraphe précédent. Soient $\delta \in \hat{K}$ et $\sigma \in \hat{M}$ avec $\delta \in \Gamma(\sigma)$, i.e., tel que $\mathscr{E}_\sigma^\delta = \mathrm{Hom}_M(E_\delta, E_\sigma)$ soit non nul. Nous allons définir la notion de "base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ adaptée à α". Écrivons $\sigma = {}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha$. Comme ${}^*M^\alpha$ et K^α commutent, ${}^\alpha\mathscr{E}_\sigma^\delta = \mathrm{Hom}_{{}^*M^\alpha}(E_\delta, E_{{}^*\sigma^\alpha})$ est un K^α-module unitaire et $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_{M^\alpha}({}^\alpha\mathscr{E}_\sigma^\delta, E_{\sigma^\alpha})$. Notons $({}^\alpha\mathscr{E}_\sigma^\delta)^{\sigma^\alpha}$ la composante isotypique de type σ^α du M^α-module ${}^\alpha\mathscr{E}_\sigma^\delta$. Il résulte

de la théorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{so}(2n+1)$ que si $\dim \mathscr{E}_\sigma^\delta = l$ on a

$$U(\mathfrak{k}^\alpha)(({}^\alpha\mathscr{E}_\sigma^\delta)^{\sigma^\alpha}) = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j,$$

où V_j est un K^α-module irréductible et où $\mathrm{Hom}_{M^\alpha}(V_j, E_{\sigma^\alpha}) = \mathbb{C}$, pour $j = 1,..., l$. On choisit pour chaque $j = 1,..., l$, $\varphi_j \in \mathrm{Hom}_{M^\alpha}(V, E_{\sigma^\alpha})$ non nul et partiellement isométrique. On obtient ainsi une base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ notée encore $(\varphi_1,..., \varphi_l)$ qui est orthonormée. Une base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ ainsi obtenue sera dite "base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ adaptée à α. En outre pour $j = 1,..., l$ on notera σ_j^α le poids dominant du $\mathfrak{k}^\alpha$-module V_j. Ici $\delta_j^\alpha \in (\mathfrak{t}^\alpha)^*$. Comme en I.7 on identifie $\mathfrak{t}^\alpha$ et M^α s'identifie à M^n. Alors avec ces identifications, les notations ci-dessus et celles de III.4 les expressions $P_{\sigma^\alpha\delta_j^\alpha}(\lambda_\alpha)$ et $Q_{\sigma^\alpha\delta_j^\alpha}(\lambda_\alpha)$ ont un sens pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, et $\lambda \to P_{\sigma^\alpha\delta_j^\alpha}(\lambda_\alpha)$ (resp. $\lambda \to Q_{\sigma^\alpha\delta_j^\alpha}$) est une fonction polynomiale (resp. rationnelle) sur $\mathfrak{a}^*$. Pour chaque paire $\delta \in \hat{K}$, $\sigma \in \hat{M}$ et pour chaque $\alpha \in \Delta^+$, on se fixe une base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ adaptée à α. Avec les notations de I.4 on voit que si $(\varphi_1,..., \varphi_l)$ est une base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ adaptée à α, $(s_\alpha\varphi_1,..., s_\alpha\varphi_l)$ est une base de $\mathscr{E}_{s_\alpha\sigma}^\delta$ adaptée à α.

7. En utilisant l'induction par étage et en induisant les opérateurs d'entrelacement entre les séries principales des groupes G^α ($\alpha \in \Delta^+$, simple) définis dans la proposition 7, on obtient facilement (cf. [8, section 11]) les points (i) à (iv) de la.

PROPOSITION 8. *Soit $\sigma \in \hat{M}$.*

(i) *Soit $w \in W$. Pour $\lambda \in D(w)$, il existe un unique opérateur $B(w, \sigma, \lambda)$ $L(\sigma) \to L(w\sigma)$ entrelaçant $r_{\sigma\lambda}$ et $r_{(w\sigma)(w\lambda)}$ tel que*

(α) *identifiant $\mathscr{E}_\sigma^{|\sigma|}$ à $\mathscr{E}_{w\sigma}^{|\sigma|}$ par l'isomorphisme w (défini en I.4) on a*

$$b^{|\sigma|}(w, \sigma, \lambda) = 1$$

(β) *soit m_w un représentant de w dans W'. Alors il existe $c(\sigma, \lambda) \in \mathbb{C}^*$ tel que*

$$c(\sigma, \lambda)\, B(w, \sigma, \lambda) = A(m, \sigma, \lambda).$$

(ii) *Soient $\alpha \in \Delta^+$ une racine simple, $\delta \in \hat{K}$ avec $\delta \in \Gamma(\sigma)$, $(\varphi_1,..., \varphi_l)$ une base de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ adaptée à α, $(s_\alpha\varphi_1,..., s_\alpha\varphi_l)$ la base adaptée à α de $\mathscr{E}_{s_\alpha\sigma}^\delta$ déduite de $(\varphi_1,..., \varphi_l)$ par l'isomorphisme s_α: $\mathscr{E}_\sigma^\delta \to \mathscr{E}_{s_\alpha\sigma}^\delta$ choisi en* I.4. *Il existe des constantes c_j, $j = 1,..., l$ de module* 1 *telles que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ vérifiant* $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$ *la matrice représentant $b^\delta(s_\alpha, \sigma, \lambda)$ dans ces bases soit diagonale de jème coefficient:*

$$c_j Q_{\sigma^\alpha\delta_j^\alpha}(\lambda_\alpha).$$

On posera dans la suite $Q^{\alpha}_{\sigma_\delta}(\lambda) = \prod_{j=1}^{l} Q_{\sigma^\alpha \delta^\alpha_j}(\lambda_\alpha)$ (*y compris lorsque* α *n'est pas simple*).

(iii) $B(s_\alpha, \sigma, \lambda)$ *n'est pas injectif si et seulement si* $\lambda_\alpha \in A_k(\sigma^\alpha)$ (*cf. prop.* 7 *pour la définition de* $A_k(\sigma^\alpha)$) *pour* $k = 1, \ldots, n$. *Ici* $n = \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}_0)_\alpha$.

(iv) *Avec les hypothèses et notations de* (ii), (iii) *et celles de* III.5, *écrivons* $\sigma = {}^*\sigma^\alpha \otimes \sigma^\alpha$ *avec* ${}^*\sigma^\alpha \in {}^*\widehat{M^\alpha}$ *et* $\sigma^\alpha \in \widehat{M^\alpha}$. *Si* $\sigma^\alpha = (\sigma^\alpha_1, \ldots, \sigma^\alpha_n)$, $\sigma^\alpha + \rho_{\mathfrak{m}_\alpha} = (s^\alpha_1, \ldots, s^\alpha_n)$ *et* $\lambda_\alpha \in A_k(\sigma^\alpha)$ *pour un entier* k *compris entre* 1 *et* n. *On définit* $(\sigma')^\alpha \in \widehat{M^\alpha}$ *et* $(\lambda')^\alpha \in (\mathfrak{a}^\alpha)^*$ *par*

$$(\sigma')^\alpha + \rho_{\mathfrak{m}_\alpha} = (s^\alpha_1, \ldots, s^\alpha_{k-1}, \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} s^\alpha_k)\,\lambda_\alpha, s^\alpha_{k+1}, \ldots, s^\alpha_n)$$

et

$$(\lambda')^\alpha = \tfrac{1}{2}\,|s^\alpha_k|\,\alpha|_{\mathfrak{a}^\alpha}.$$

Alors on définit:

$$\sigma' = {}^*\sigma^\alpha \otimes (\sigma')^\alpha \in \hat{M} \qquad \text{et} \qquad \lambda' = {}^*\lambda^\alpha \oplus (\lambda')^\alpha$$

où l'on a écrit $\lambda = {}^*\lambda^\alpha + \lambda^\alpha$ *avec* ${}^*\lambda^\alpha \in ({}^*\mathfrak{a}^\alpha)^*$ *et* $\lambda^\alpha \in (\mathfrak{a}^\alpha)^*$. *Alors il existe un opérateur*

$$S(\sigma, \lambda, \alpha) : L(\sigma') \to L(\sigma)$$

(*obtenu en induisant l'opérateur:* $S(\sigma^\alpha, \lambda^\alpha, \alpha) : L((\sigma')^\alpha) \to L(\sigma^\alpha)$ *défini dans la proposition* 7) *qui entrelace* $r(\sigma', \lambda')$ *et* $r(\sigma, \lambda)$ *tel que:*

$$\operatorname{Im} S(\sigma, \lambda, \alpha) = \operatorname{Ker} B(s_\alpha, \sigma, \lambda).$$

En outre $S(\sigma, \lambda, \alpha)$ *est injectif sur* $L^{|\sigma'|}(\sigma')$. *On remarquera que, comme* $S(\sigma^\alpha, \lambda^\alpha, \alpha)$ *n'est défini qu'à un scalaire non nul multiplicatif près, il en va de même de* $S(\sigma, \lambda, \alpha)$. *L'ensemble des* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *tels que* $S(\sigma, \lambda, \alpha)$ *soit défini sera noté* $A^\alpha(\sigma)$ (*on a* $A^\alpha(\sigma) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \lambda_\alpha \in A_k(\sigma^\alpha)$ *pour un entier* k, $1 \leqslant k \leqslant n\}$.

(v) (a) *Pour tout* $w \in W$, *la fonction* $\lambda \to B(w, \sigma, \lambda)$ (*définie sur* $D(w)$) *se prolonge en une fraction rationnelle sur* $\mathfrak{a}^*$ *à valeurs dans* $\operatorname{Hom}(L(\sigma), L(w\sigma)$ *que l'on notera de la même façon.*

(b) *Lorsqu'il est défini* $B(w, \sigma, \lambda)$ *entrelace* $r_{\sigma\lambda}$ *et* $r_{(w\sigma)(w\lambda)}$.

(c) *D'autre part pour tout* w, $w' \in W$ *on a l'égalité de fractions rationnelles:*

$$B(ww', \sigma, \cdot) = b(w, w')\,B(w, w'\sigma, w', \cdot)\,B(w', \sigma, \cdot)$$

où

$$b(w, w') \in \mathbb{C}^*.$$

(vi) *Soit* $w \in W$, *on se fixe pour chaque* $\delta \in \Gamma(\sigma)$ *une base de* $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ *et* $\mathscr{E}_{w\sigma}^{\delta}$. *Alors il existe une constante* $c = c^{\delta}(w, \sigma)$ *qui dépend du choix des bases, telle que le déterminant de* $b^{\delta}(w, \sigma, \lambda)$ *calculé dans ces bases soit égal à* $c \prod_{\alpha \in S(w)} Q_{\sigma\delta}^{\alpha}(\lambda)$.

Démonstration. Comme il a été dit plus haut les points (i) à (iv) sont des conséquences immédiates de la proposition 7 et de l'induction par étage. Il reste à démontrer (v) et (vi).

Commençons par démontrer (v)(a). Pour $l(w) = 1$. C'est une conséquence du point (ii). Ensuite on procède par récurrence sur la longueur de w en utilisant la proposition 6(iv). (v)(c) résulte de (v)(a), des définitions et de la proposition 6(iv). (v)(b) résulte de la proposition 3 et de (v)(a).

Démontrons (vi). Dans le cas où $l(w) = 1$, l'assertion résulte de (ii). Ensuite on procède par récurrence en utilisant le point (i) du lemme suivant:

Lemme 1. (i) *Soit* $w \in W$. *On a, pour* $\alpha \in \Delta$, $\sigma \in \hat{M}$, $\delta \in \Gamma(\sigma)$ *et* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$:

$$P_{(w\sigma)(\delta)}^{w\alpha}(w\lambda) = P_{\sigma\delta}^{\alpha}(\lambda),$$
$$Q_{(w\sigma)(\delta)}^{w\alpha}(w\lambda) = Q_{\sigma\delta}^{\alpha}(\lambda).$$

(ii)

$$\prod_{\alpha \in S(w)} Q_{\delta\sigma}^{\alpha}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\delta}^{\alpha}(\lambda)/P_{(w\sigma)(\delta)}^{\alpha}(\lambda)$$
$$= \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{(w\sigma)(\delta)}^{\alpha}(-w\lambda)/P_{\sigma\delta}^{\alpha}(-\lambda).$$

Démonstration. (i) Soit m un représentant de w dans M'. Avec les notations de I.7, III.5 et III.6, $\mathrm{Hom}_{*M^{\alpha}}(E_{\delta}, E_{*\sigma^{\alpha}})$ (resp. $\mathrm{Hom}_{*M^{w\alpha}}(E_{\delta}, E_{*\sigma^{w\alpha}})$) est un $\mathfrak{so}(2n+1) = j_{\alpha}^{-1}(\mathfrak{k}_0^{\alpha})$ (resp. $\mathfrak{so}(2n+1) = j_{w\alpha}^{-1}(\mathfrak{k}_0^{w\alpha})$)-module. Il est facile de voir, en utilisant $\delta(m)$, que ces $\mathfrak{so}(2n+1)$-modules sont isomorphes. Alors il existe une permutation τ de $1, \ldots, l = \dim \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ telle que $\delta_j^{w\alpha} = \delta_{\tau(j)}^{\alpha}$ pour $j = 1, \ldots, l$ et (i) en résulte.

(ii) est une conséquence immédiate de (i) et du fait que $P_{\sigma\delta}^{-\alpha}(\lambda) = P_{\sigma\delta}^{\alpha}(-\lambda)$.

IV. Théorèmes sur les Transformes de Fourier des Sous-Espaces de Transition

1. Soient $\delta, \gamma, \varepsilon \in \hat{K}$. Notons $I^{\delta\gamma}$ (resp. $I_{\varepsilon}^{\delta\gamma}$) l'espace des fonctions $(\sigma, \lambda) \to v(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_{\sigma}^{\gamma}, \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta})$, où λ décrit $\mathfrak{a}^*$ et σ décrit $\hat{M}$ (resp. $\tilde{\varepsilon} = \{\sigma \in \hat{M} \mid |\sigma| = \varepsilon\}$), telles que, pour $\sigma \in \hat{M}$ (resp. $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$) fixé, v dépende

polynomialement de λ et vérifie $v(w\sigma, w\lambda)\, b^{\gamma}(w, \sigma, \lambda) = b^{\delta}(w, \sigma, \lambda)\, v(\sigma, \lambda)$. Ici l'égalité signifie l'égalité de fractions rationnelles.

La proposition suivante est claire:

PROPOSITION 9. *On a:* $F^{\delta\gamma} \subset I^{\delta\gamma}$, $F_{\varepsilon}^{\delta\gamma} \subset I_{\varepsilon}^{\delta\gamma}$.

La proposition suivante est le théorème 5 de [2] appliqué aux groupes à une seule classe de conjugaison de Cartan. Elle constitue un des points clefs de tout ce qui suit.

PROPOSITION 10. *Soit* $\delta \in \hat{K}$. *Alors* $F_{\delta}^{\delta\delta} = I_{\delta}^{\delta\delta}$. *Pour* $\sigma \in \tilde{\delta}$, *on identifie* $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ *à* $\mathbb{C}$. *Alors on a plus précisément:* $F_{\delta}^{\delta\delta}$ *est égal à* $I_{\delta}^{\delta\delta}$ *qui est l'espace des applications* $(\sigma, \lambda) \to v(\sigma, \lambda) \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \tilde{\delta}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, *polynomiales en* λ *pour* $\sigma \in \tilde{\delta}$ *fixe et vérifiant* $v(\sigma, \lambda) = v(w\sigma, w\lambda)$ *pour tout* $w \in W$, $\sigma \in \tilde{\delta}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Démonstration. Voir la proposition 13 et le théorème 5 de [2] ainsi que la remarque qui suit ce théorème.

3. Soient $\delta, \varepsilon \in \hat{K}$. Posons $l = \dim \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$ pour $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, i.e., $|\sigma| = \varepsilon$. On suppose $l > 0$. On a $\dim \mathscr{E}_{\sigma}^{\varepsilon} = 1$ pour $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$. On suppose choisies des bases orthonormées des espaces $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}$, $\mathscr{E}_{\sigma}^{\varepsilon}$, $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$. Soit $v \in I_{\varepsilon}^{\delta\varepsilon}$. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, $v(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_{\sigma}^{\varepsilon}, \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta})$ est représenté par une matrice colonne à l éléments dont les coefficients dépendent polynomialement de λ. Soient $v_1, ..., v_l \in I_{\varepsilon}^{\delta\varepsilon}$. On considère la matrice carrée $(v_1, ..., v_l)$.

PROPOSITION 11. *Il existe une fonction* $c(v_1, ..., v_l)$ *telle que pour tout* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *et tout* $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, *on ait*

$$\det(v_1, ..., v_l)(\sigma, \lambda) = c(v_1, ..., v_l)(\sigma, \lambda) \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\delta}^{\alpha}(-\lambda). \qquad (*)$$

De plus, $c(v_1, ..., v_l)(\sigma, \lambda)$ *dépend polynomialement de* λ, *et l'on a, avec les notations de la proposition* 8(vi):

$$c(v_1, ..., v_l)(w\sigma, w\lambda) = c^{\delta}(w, \sigma)\, c(v_1, ..., v_l)(\sigma, \lambda) \qquad (**)$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $w \in W$, $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$.

Preuve. Soit $w \in W$. D'après la proposition 8(i) on a:

$$v_i(w\sigma, w\lambda) = b^{\delta}(w, \sigma, \lambda)\, v_i(\sigma, \lambda) \qquad \text{pour } i = 1, ..., l \text{ et } \sigma \in \tilde{\varepsilon}. \quad (***)$$

Dans le cas où w est l'élément de longueur maximum, la proposition 8(vi) montre que l'on a (en réduisant au même denominateur):

$$\det(v_1,\dots,v_l)(w\sigma, w\lambda) \prod_{\alpha\in\Delta^+} P^\alpha_{\sigma\delta}(-\lambda)$$
$$= \det(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda)\, c^\delta(w,\sigma) \prod_{\alpha\in\Delta^+} P^\alpha_{\sigma\delta}(\lambda).$$

Il en résulte que $\det(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda)$ est divisible par $\prod_{\alpha\in\Delta^+} P^\alpha_{\sigma\delta}(-\lambda)$. Ceci démontre l'existence d'une fonction $c(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda)$, polynomiale en λ, vérifiant la relation (*).

Soit $w\in W$. Il résulte des relations (*), (***) et de la proposition 8(vi) que l'on a

$$c(v_1,\dots,v_l)(w\sigma, w\lambda) \prod_{\alpha\in\Delta^+} P^\alpha_{(w\sigma)(\delta)}(-w\lambda)$$
$$= c(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda) \prod_{\alpha\in\Delta^+} P^\alpha_{\sigma\delta}(-\lambda)\, c^\delta(w,\sigma) \prod_{\alpha\in S(w)} Q^\alpha_{\sigma\delta}(\lambda).$$

La relation résulte alors du lemme 1. La proposition est démontrée.

LEMME 2. *Soient* $\delta, \varepsilon\in\hat{K}$, $\sigma\in\tilde{\varepsilon}$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe* $v_1,\dots,v_l\in F^{\delta\varepsilon}_\varepsilon$ *tels que* $\det(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda)\neq 0$.

(ii) *On a* $L^\delta(\sigma) = r_{\sigma\lambda}(\mathbb{U}^{\delta\varepsilon})\, L^\varepsilon(\sigma)$.

Preuve. Cela résulte de la définition de $F^{\delta\varepsilon}$ et de la proposition 1.

PROPOSITION 12. *Soient* δ, $\varepsilon\in\hat{K}$, $\sigma\in\tilde{\varepsilon}$. *On suppose* $\mathscr{E}^\delta_\sigma\neq 0$. *Soit* $\lambda\in\mathfrak{a}^*$. *Il existe* $v_1,\dots,v_l\in F^{\delta\varepsilon}_\varepsilon$ *tels que l'on ait* (*avec les notations de la proposition* 12)

$$c(v_1,\dots,v_l)(\sigma,\lambda)\neq 0.$$

Démonstration. Compte tenu de la seconde partie de la proposition 11 il suffit de la démontrer lorsque $\operatorname{Re}\lambda\in\bar{C}$. Mais alors, d'après [8], section 14, th. 1] le K-type $|\sigma|$ est cyclique dans $L(\sigma)$ pour la représentation $r_{\sigma\lambda}$. La proposition résulte alors du lemme 2.

4. Soient γ, δ, $\varepsilon\in\hat{K}$. On définit:

$$K^{\delta\gamma}_\varepsilon = \{v\in I^{\delta\gamma}_\varepsilon \mid \forall\sigma\in\tilde{\varepsilon}, \forall\alpha\in\Delta^+ \text{ racine simple}, \forall\lambda\in A^\alpha(\sigma),$$
$$0 = v(\sigma,\lambda)\, s^\gamma(\sigma,\lambda,\alpha)\}$$

(cf. IV.1 pour la définition de $I_\varepsilon^{\delta\gamma}$; cf. proposition 8(iv) pour la définition de $A^\alpha(\sigma)$; les opérateurs $s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha)$ sont construits comme en III.1 à partir de $S(\sigma, \lambda, \alpha)$ qui est défini dans la proposition 8(iv)).

Proposition 13. *Soient $\delta, \gamma, \varepsilon \in \hat{K}$. On suppose que pour tout $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, $\mathscr{E}_\sigma^\delta \neq 0$, $\mathscr{E}_\sigma^\gamma \neq 0$. Alors on a:*

$$K_\varepsilon^{\delta\gamma} = F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}.$$

Démonstration. (a) Montrons $F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma} \subset K_\varepsilon^{\delta\gamma}$. D'abord $F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma} \subset I_\varepsilon^{\delta\gamma}$ d'après la proposition 9. Soient $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, α une racine simple, $\lambda \in A^\alpha(\sigma)$ et $v \in F^{\varepsilon\gamma}$. Alors on a:

$$s^\varepsilon(\sigma, \lambda, \alpha)\, v(\sigma', \lambda') = v(\sigma, \lambda)\, s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha)$$

où $(\sigma', \lambda') \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ est défini dans la proposition 8(iv). Mais $s^\varepsilon(\sigma, \lambda, \alpha) = 0$ d'après cette même proposition. D'où $v(\sigma, \lambda)\, s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha) = 0$ et l'inclusion cherchée en résulte.

(b) On va montrer $K_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$. Comme $F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma} = F_\varepsilon^{\delta\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$ cela achèvera de montrer la proposition. On définit l et $s \in \mathbb{N}$ par: $\forall \sigma \in \tilde{\varepsilon}$, $l = \dim \mathscr{E}_\sigma^\delta$, $s = \dim \mathscr{E}_\sigma^\gamma$.

Dans ce paragraphe, on fixe $v_1, ..., v_l \in F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}$ et $w_1, ..., w_s \in F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$. L'espace $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ est l'espace des fonctions $(\sigma, \lambda) \to d(\sigma, \lambda)$, polynomiales en λ, où $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, et telles que $d(w\sigma, w\lambda) = d(\sigma, \lambda)$ pour tout $w \in W$ (cf. prop. 10). Employons les notations de la proposition 11. Compte tenu de cette proposition, il existe un élément $d = d(v_1, ..., v_l) \in F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ tel que pour chaque $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, les polynomes $c(v_1, ..., v_l)(\sigma, \cdot)$ et $d(v_1, ..., v_l)(\sigma, \cdot)$ soient proportionnels (avec une constante de proportionalité non nulle).

De manière analogue à IV.3 un élément $w \in F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$ se représente de la façon suivante. Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, $w(\sigma, \lambda) \in \operatorname{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\varepsilon)$ est une matrice ligne à s éléments. On considère la matrice carrée $({}^t w_1, ..., {}^t w_s)$. On prouve de manière analogue à la proposition 11 qu'il existe $b = b(w_1, ..., w_s) \in F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ tel que l'on ait pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et tout $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$

$$\det({}^t w_1, ..., {}^t w_s)(\sigma, \lambda) = b(w_1, ..., w_s)(\sigma, \lambda)\, b_\sigma \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda)$$

où b_σ est une constante.

Nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $u \in K_\varepsilon^{\delta\gamma}$. Il existe une matrice à l lignes et s colonnes M à coefficients dans $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ telle que l'on ait*

$$bdu = (v_1, ..., v_l)\, M({}^t w_1, ..., {}^t w_s).$$

Nous pouvons supposer que b et d ne sont pas indetiquement nuls (dans le cas contraire l'assertion est évidente). Résolvons l'équation:

$$u = (v_1, ..., v_l)\, N({}^t w_1, ..., {}^t w_s) \qquad (*)$$

où N est une matrice à l lignes et s colonnes, inconnue. Pour chaque σ et λ, $(*)$ est un système d'équations linéaires à $l \times s$ inconnues $n_{jk}(\sigma, \lambda)$. Il y a autant d'équations que d'inconnues, et le déterminant du système est égal à $\det(v_1, ..., v_l)(\sigma, \lambda) \cdot \det(w_1, ..., w_s)(\sigma, \lambda)$. Les formules de Cramer montrent que $(*)$ admet une solution unique N dont les coefficients sont des fractions rationnelles en λ. Plus précisément, il existe des fonctions $(\sigma, \lambda) \to p_{jk}(\sigma, \lambda)$ polynomiales en λ telles que l'on ait:

$$n_{jk}(\sigma, \lambda) = p_{jk}(\sigma, \lambda)/b(\sigma, \lambda)\, d(\sigma, \lambda) \prod_{\alpha \in \Delta^+} P^\alpha_{\sigma\gamma}(\lambda) \prod_{\alpha \in \Delta^+} P^\alpha_{\sigma\delta}(-\lambda). \qquad (**)$$

D'autre part, soit $w \in W$. Reportant $(*)$ dans la relation

$$b^\delta(w, \sigma, \lambda)\, u(\sigma, \lambda) = u(w\sigma, w\lambda)\, b^\gamma(w, \sigma, \lambda)$$

et tenant compte de l'unité de la solution N, on trouve

$$n_{jk}(w\sigma, w\lambda) = n_{jk}(\sigma, \lambda) \qquad \text{pour tout } w \in W. \qquad (***)$$

Le lemme 3 résultera donc du lemme suivant:

LEMME 4. *$n_{jk} bd$ dépend polynomialement de λ.*

Pour démontrer le lemme 4, nous avons besoin d'un résultat préliminaire.

Soit $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$. Nous choisissons la base $\varphi_1, ..., \varphi_s$ de $\mathscr{E}^\gamma_\sigma$ adaptée à une racine simple α (cf. III.6). On considère la matrice $D(\sigma, \lambda)$, diagonale d'ordre s dont le$k$ème coefficient est $P_{\sigma^\alpha \gamma^\alpha_k}(\lambda_\alpha)$.

LEMME 5. (i) *Il existe une matrice carrée d'ordre s, $W(\sigma, \lambda)$, dépendant polynomialement de λ telle que l'on ait $({}^t w_1, ..., {}^t w_s)(\sigma, \lambda) = W(\sigma, \lambda)\, D(\sigma, \lambda)$.*

(ii) *Il existe une matrice carrée d'ordre s, $U(\sigma, \lambda)$ dépendant polynomialement de λ telle que l'on ait $u(\sigma, \lambda) = U(\sigma, \lambda)\, D(\sigma, \lambda)$.*

Démonstration. (i) D'après la proposition 8(ii), on peut choisir une base de $\mathscr{E}^\gamma_{s_\alpha \sigma}$ (où $s_\alpha \in W$ est la symétrie par rapport à α) telle que $b^\gamma(s_\alpha, \sigma, \lambda)$ soit représenté par la matrice diagonale $D(\sigma, \lambda)\, D(\sigma, -\lambda)^{-1}$. On a donc la relation:

$$\forall w \in F^{\varepsilon\gamma}_\varepsilon, \qquad w(\sigma, \lambda)\, D(\sigma, -\lambda) = w(s_\alpha \sigma, s_\alpha \lambda)\, D(\sigma, \lambda).$$

Le $k$ième coefficient de $w(\sigma, \lambda)$ est donc divisible par $P_{\sigma^\alpha \delta_k^\alpha}(\lambda_\alpha)$. Tous les coefficients de la $k$ième ligne de $({}^t w_1, \ldots, {}^t w_s)$ sont donc divisibles par $P_{\sigma^\alpha \delta_k^\alpha}(\lambda_\alpha)$, et la partie (i) du lemme 5 est démontrée.

(ii) Comme $u \in K_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$, on a: $u(\sigma, \lambda)\, s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha) = 0$ pour tout $\lambda \in A^\alpha(\sigma)$. Comme $\operatorname{Im} S(\sigma, \lambda, \alpha) = \operatorname{Ker} B(s_\alpha, \sigma, \lambda)$ il résulte de la proposition 8(ii) que si

$$P_{\sigma^\alpha \gamma_k^\alpha}(\lambda_\alpha)\, \varphi_k = 0 \qquad \text{on a} \quad \varphi_k \in \operatorname{Im} s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha).$$

D'où $u(\sigma, \lambda)\, \varphi_k = 0$.

Il en résulte que les éléments de la $k$ième colonne de u sont divisibles par $P_{\sigma^\alpha \gamma_k^\alpha}(\lambda_\alpha)$ ce qui prouve (ii) et le lemme 5 est démontré.

Démonstration du lemme 4. Soit α_0 une racine simple. Il résulte du lemme 5 que l'on peut réécrite (*) sous la forme:

$U(\sigma, \lambda) = (v_1, \ldots, v_l)\, N(\sigma, \lambda)\, W(\sigma, \lambda)$.
Mais d'après la définition de $W(\sigma, \lambda)$ et ce que l'on a vu à propos de $\det({}^t w_1, \ldots, {}^t w_s)$ on a:

$$\det W(\sigma, \lambda) = b_\sigma b(\sigma, \lambda) \prod_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \alpha \neq \alpha_0}} P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda).$$

Résolvant l'équation $U(\sigma, \lambda) = (v_1, \ldots, v_l)\, N(\sigma, \lambda)\, W(\sigma, \lambda)$, où N est l'inconnue, par les formules de Cramer, on en déduit qu'il existe des fonctions polynomiales en λ, $q_{jk}(\sigma, \lambda)$ telles que:

$$n_{jk}(\sigma, \lambda) = q_{jk}(\sigma, \lambda)/(b(\sigma,)\lambda)\, d(\sigma, \lambda) \prod_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \alpha \neq \alpha_0}} P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda) \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\delta}^\alpha(-\lambda)).$$

On a donc montré que $p_{jk}(\sigma, \lambda)$ est divisible par $P_{\sigma\gamma}^{\alpha_0}(\lambda)$ pour toute racine simple α. Mais dans (**) n_{jk}, b et d sont invariantes sous W. Compte tenu du lemme 1, on en déduit la relation

$$p_{jk}(w\sigma, w\lambda) \prod_{\alpha \in S(w)} P_{\sigma\delta}^\alpha(-\lambda)\, P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda) = p_{jk}(\sigma, \lambda) \prod_{\alpha \in S(w)} P_{\sigma\delta}^\alpha(-\lambda)\, P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda).$$

Soient $\alpha \in \Delta^+$ et $w \in W$ tels que $w\alpha$ soit une racine simple α_0. En particulier $\alpha \notin S(w)$. Comme $p_{jk}(w\sigma, w\lambda)$ est divisible par

$$P_{(w\sigma)\gamma}^{\alpha_0}(w\lambda) = P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda),$$

il en résulte que $p_{jk}(\sigma, \lambda)$ est divisible par $P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda)$.

Nous avons donc démontré que $p_{jk}(\sigma, \lambda)$ est divisible par $\prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda)$.

Il en résulte que la fraction rationnelle $b(\sigma, \lambda)\, d(\sigma, \lambda)\, n_{jk}(\sigma, \lambda)$ n'a pas de pôles dans l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tels que $\operatorname{Re} \lambda_\alpha \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$.

L'invariance sous le groupe de Weyl montre que

$$b(\sigma, \lambda)\, d(\sigma, \lambda)\, n_{jk}(\sigma, \lambda)$$

n'a pas de pôles ce qui prouve le lemme 4 et le lemme 3 en résulte.

Pour conclure la démonstration nous avons besoin d'une lemme.

LEMME 6. *L'espace engendré par les* $d(v_1,..., v_l)$ *(resp.* $b(w_1,..., w_s)$*) lorsque* $v_1,..., v_l$ *(resp.* $w_1,..., w_s$*) décrivent* $F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}$ *(resp.* $F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$*) est égal à* $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$.

Démonstration. On sait que, d'après la proposition 10, $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ s'identifie à $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ où W_σ est le stabilisateur de σ dans W. D'après [12], $L(\sigma)$ ayant un unique K-type minimal, W_σ est un groupe engendré par des réflexions et $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ est une algèbre de polynomes d'après le théorème de Chevalley. D'autre part comme $F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon} \subset F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}$ (resp. $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma} \subset F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$), les espaces considérés sont des ideaux de $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$.

D'autre part, d'après la proposition 12, le premier espace considéré est un idéal de $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ sans zéros. Le théorème des zéros de Hilbert permet de conclure que cet idéal est égal à $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$. Notons γ^* (resp. ε^*, resp. σ^*) la contragrediente de γ (resp. ε, resp. σ où $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$). Soit $v' \in F_{\varepsilon^*}^{\gamma^*\varepsilon^*}$. Soit $w(\sigma, \lambda)$ le transposé de $v'(\sigma^*, -\lambda)$. Il résulte de la proposition 2 que $w \in F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$.

Il résulte de ce qui précède que l'espace engendré par les $b(w_1,..., w_s)$ où $w_1,..., w_s$ décrivent $F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$ est égal à $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$.

Fin de le Démonstration de la Proposition 13. Choisissons $v_1,..., v_l \in F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}$, $w_1,..., w_s \in F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}$ tels que pour $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$

$$\lambda \to \det(v_1,..., v_l)(\sigma, \lambda) = d_\sigma \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\delta}^\alpha(-\lambda)$$

et

$$\lambda \to \det({}^t w_1,..., {}^t w_s)(\sigma, \lambda) = b_\sigma \prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\gamma}^\alpha(\lambda).$$

De tels éléments existent d'après le lemme 6. Soit alors $u \in K_\varepsilon^{\delta\gamma}$. Alors le lemme 3 appliqué à u et à $(v_1,..., v_l)$, $(w_1,..., w_s)$ implique que $u = (v_1,..., v_l)M({}^t w_1,..., {}^t w_s)$ où M est une matrice à l lignes et s colonnes à coefficients dans $F_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$, ce qui achève la démonstration de la proposition 13.

5. On fixe sur it_0 un produit scalaire grâce à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On note $\|\cdot\|$ la norme qu'on en déduit.

LEMME 7. *Soit* $\delta \in \hat{K}$ *et* $\sigma \in \hat{M}$. *Alors si* σ *est contenu dans* δ *on a:* $\|\sigma\| \leqslant \|\delta\|$. *Si en outre* $\|\sigma\| = \|\delta\|$ *on a* $|\sigma| = \delta$.

Démonstration. Cf. [8, section 14, prop. 1].

6. Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$. On définit $J^{\delta\gamma}$ l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to v(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}^{\gamma}_{\sigma}, \mathscr{E}^{\delta}_{\sigma})$, $\sigma \in \hat{M}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, polynomiales en λ pour $\sigma \in \hat{M}$ fixé et vérifiant:

$$\forall w \in W, \qquad \forall \sigma \in \hat{M}, \qquad v(w\sigma, w\lambda)\, b^{\gamma}(w, \sigma, \lambda) = b^{\delta}(w, \sigma, \lambda)\, v(\sigma, \lambda),$$

$$\forall \alpha \in \Delta^+ \text{ simple}, \qquad \forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in A^{\alpha}(\sigma),$$

$$v(\sigma', \lambda')\, s^{\gamma}(\sigma, \lambda, \alpha) = s^{\delta}(\sigma, \lambda, \alpha)\, v(\sigma, \lambda)$$

(les notations sont celles de la proposition 8).

Clairement on a $F^{\delta\gamma} \subset J^{\delta\gamma}$. Nous allons démontrer les principaux résultats sur les espaces $F^{\delta\gamma}$.

THÉORÈME 1. *Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$. Soit r un nombre réel positif. Soit $N^{\delta\gamma}_r$ le sous-espace de $J^{\delta\gamma}$ formé des $v \in J^{\delta\gamma}$ tels que:*

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad \forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \|\sigma\| \geqslant r \Rightarrow v(\sigma, \lambda) = 0.$$

Alors on a:

$$N^{\delta\gamma}_r = \sum_{\substack{\varepsilon \in \hat{K} \\ \|\varepsilon\| < r}} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}.$$

Démonstration. (i) Soit $\varepsilon \in \hat{K}$ tel que $\|\varepsilon\| < r$. On a clairement $F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma} \subset F^{\delta\gamma} \subset J^{\delta\gamma}$. D'autre part si $\sigma \in \hat{M}$ et $\|\sigma\| \geqslant r$, σ n'est pas contenu dans ε d'après le lemme 7 et donc $v(\sigma, \lambda) = 0$ si $v \in F^{\delta\varepsilon}$. Donc $N^{\delta\gamma}_r \supset \Sigma_{\|\varepsilon\| < r} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}$.

(ii) Montrons l'inclusion dans l'autre sens. Soient $r_1, ..., r_p$ les longueurs des $\sigma \in \hat{M}$ tels que $\mathscr{E}^{\delta}_{\sigma} \neq 0$ et $\mathscr{E}^{\gamma}_{\sigma} \neq 0$ rangées en ordre strictement croissant. Il suffit de prouver le théorème pour $r = r_1, ..., r_p$ et $r_{p+1} = r_p + 1$. Pour $r = r_1$ la proposition se réduit à $0 = 0$. Supposons la proposition démontrée pour r_{t-1}. Soit $v \in N^{\delta\gamma}_{r_t}$. Notons $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s$ les éléments de $\hat{K}$ de norme r_{t-1} tels que pour tout $\sigma \in \tilde{\varepsilon}_j$, σ est contenu dans δ et γ. Soit v_j la restriction de v à $\mathfrak{a}^* \times \tilde{\varepsilon}_j$. On a $v_j \in K^{\delta\gamma}_{\varepsilon_j}$. En effet soit $\sigma \in \tilde{\varepsilon}_j$. Alors $\|\sigma\| = r_{t-1}$. Soient $\alpha \in \Delta^+$ simple et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ avec $\lambda \in A^{\alpha}(\sigma)$. Alors avec les notations de la proposition 8 on a:

$$s^{\delta}(\sigma, \lambda, \alpha)\, v(\sigma', \lambda') = v(\sigma, \lambda)\, s^{\gamma}(\sigma, \lambda, \alpha).$$

Mais d'après la proposition 8(iv) et le lemme 7 on a $\|\sigma'\| > \|\sigma\|$. Alors comme $v \in N^{\delta\gamma}_{r_t}$ on a $v(\sigma', \lambda') = 0$. D'où $v(\sigma, \lambda)\, s^{\gamma}(\sigma, \lambda, \alpha) = 0$, et $v_j \in K^{\delta\gamma}_{\varepsilon_j}$ comme annoncé. Alors d'après la proposition 13, $v_j \in F^{\delta\varepsilon_j}_{\varepsilon} F^{\varepsilon_j\gamma}_{\varepsilon_j}$. v_j est donc la restriction à $\mathfrak{a}^* \times \tilde{\varepsilon}_j$ d'un élément $w_j \in F^{\delta\varepsilon_j} F^{\varepsilon_j\gamma}$. Soit $k = 1, ..., s$, $k \neq j$. On a

$w_j(\sigma, \lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ si $\sigma \in \varepsilon_k$. En effet on a alors $\|\sigma\| = \|\varepsilon_j\|$ et $|\sigma| = \varepsilon_j$. Donc ε_j ne contient pas σ et l'on a bien $w_j(\sigma, \lambda) = 0$. Posons

$$u = v - w_1 - w_2 \cdots - w_s.$$

On a alors $u \in N_{r_{t-1}}$. Alors l'hypothèse de récurrence montre que:

$$v \in \sum_{\substack{\varepsilon \in \hat{K} \\ \|\varepsilon\| < r_t}} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}. \qquad \text{Q.E.D.}$$

THÉORÈME 2. *Soient $\delta, \gamma \in \hat{K}$. Alors $J^{\delta\gamma} = F^{\delta\gamma}$.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$ avec $r > \sup(\|\gamma\|, \|\delta\|)$. Alors si $\sigma \in \hat{M}$ vérifie $\|\sigma\| \geqslant r$, σ n'est contenu ni dans δ ni dans γ. D'où $N_r^{\delta\gamma} = J^{\delta\gamma}$.

D'autre part d'après le théorème 1:

$$N_r^{\delta\gamma} = \sum_{\substack{\varepsilon \in \hat{K} \\ \|\varepsilon\| < r}} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}.$$

Donc

$$J^{\delta\gamma} = \sum_{\substack{\varepsilon \in \hat{K} \\ \|\varepsilon\| < r}} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}.$$

Comme $F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma} \subset F^{\delta\gamma}$ et que $F^{\delta\gamma} \subset J^{\delta\gamma}$ on a bien $J^{\delta\gamma} = F^{\delta\gamma}$. Q.E.D.

THÉORÈME 3. *Soit $\delta \in \hat{K}$ et $N^{\delta\delta}$ l'idéal de $F^{\delta\delta}$ formé des $v \in F^{\delta\delta}$ tels que $v(\sigma, \lambda) = 0$ pour tout $\sigma \in \tilde{\delta}$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Alors:*

$$N^{\delta\delta} = \sum_{\substack{\varepsilon \in \hat{K} \\ \|\varepsilon\| < \|\delta\|}} F^{\delta\varepsilon} F^{\varepsilon\delta}.$$

Démonstration. Soit $r = \|\delta\|$. Il résulte du lemme 7 que $N_r^{\delta\delta} = N^{\delta\delta}$. Le théorème 1 donne alors le résultat voulu.

V. TRANSFORMÉES DE FOURIER DES FONCTIONS C^∞ A SUPPORT COMPACT: PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. On fixe sur $\mathfrak{a}_0$ la norme déduite de la forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$ restreinte à $\mathfrak{a}_0$, que l'on note $\|\cdot\|$. Elle est invariante sous l'action du groupe de Weyl. Pour $a \in A$ on définit $\|a\| = \|X\|$ si $a = \exp X$ avec $X \in \mathfrak{a}_0$. Pour $g \in G$ on définit $\|g\| = \|a\|$ si $g = k_1 a k_2$ avec $k_1, k_2 \in K$, $a \in A$. $\|g\|$ est bien

défini car dans la décomposition $g = k_1 a k_2$, a est unique à l'action du groupe de Weyl près. Pour $r > 0$ on définit $B_r = \{g \in G / \|g\| < r\}$. B_r est alors un ouvert de G, biinvariant par K.

2. On note $\mathscr{D} = C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions sur G, C^∞, à support compact. Pour $r > 0$, on note ${}_r\mathscr{D}$ l'espace des fonctions C^∞ sur G, à support compact dans B_r. On munit ${}_r\mathscr{D}$ de la topologie définie par les semi-normes $p_{r,u,v}(\varphi) = \sup_{g \in G} |(u * \varphi * v)(g)|$, $\varphi \in {}_r\mathscr{D}$, $u, v \in \mathbb{U}$.

Muni de cette topologie, ${}_r\mathscr{D}$ est un espace de Fréchet et $\mathscr{D} = \bigcup_{r>0} {}_r\mathscr{D}$ muni de la topologie de la limite inductive est un espace L.F. $\mathscr{D}$ est aussi une algèbre pour la convolution.

Pour $\delta \in \hat{K}$ on notera χ_δ le caractère de δ, normalisé de telle sorte que $\chi_\delta * \chi_\delta = \chi_\delta$. On regardera χ_δ comme distribution sur G. Pour $\delta, \gamma \in \hat{K}$ et $r > 0$ on définit:

$$\mathscr{D}^{\delta\gamma} = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \chi_\delta * \varphi = \varphi * \chi_\gamma = \varphi\},$$

$${}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma} = \mathscr{D}^{\delta\gamma} \cap {}_r\mathscr{D}.$$

On notera $\mathscr{D}_{(K)}$ (resp. ${}_r\mathscr{D}_{(K)}$) la somme algébrique $\bigoplus_{\delta,\gamma \in \hat{K}} {}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma}$). $\mathscr{D}_{(K)}$ est le sous-espace de $\mathscr{D}$ formé des éléments K-finis à droite et à gauche. D'autre part remarquons que $\mathscr{D}^{\delta\gamma} = \chi_\delta * \mathscr{D} * \chi_\gamma$, ${}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma} = \chi_\delta * {}_r\mathscr{D} * \chi_\gamma$. En outre si $\varphi \in {}_r\mathscr{D}$ alors $\varphi = \sum_{\delta,\gamma \in \hat{K}} \chi_\delta * \varphi * \chi_\gamma$ la convergence étant absolue dans ${}_r\mathscr{D}$ (cf. [14, 4.4.2.1]). La proposition suivante est immédiate:

Proposition 14. (i) $\forall \beta, \gamma, \delta \in \hat{K}$, $\mathscr{D}^{\delta\gamma} * \mathscr{D}^{\gamma\beta} \subset \mathscr{D}^{\delta\beta}$.

(ii) *Soient* $\delta, \gamma \in \hat{K}$, $(\pi, \mathscr{L})$ *un G-module (où* $\mathscr{L}$ *est un e.l.c. complet)* $v \in \mathscr{L}^\gamma$, $w \in \mathscr{L}^\delta$ *et* $\varphi \in {}_r\mathscr{D}$ *avec* $\pi(\varphi) v = w$. *Alors il existe* $\varphi' \in {}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma}$ *avec* $\pi(\varphi') v = w$ *(on peut prendre* $\varphi' = \chi_\delta * \varphi * \chi_\gamma$*). En outre* $\pi(\mathscr{D}^{\delta\gamma}) \mathscr{L}^\gamma \subset \mathscr{L}^\delta$ *et si* $\beta \in \hat{K}$, $\beta \neq \gamma$, $\pi(\mathscr{D}^{\delta\gamma}) \mathscr{L}^\beta = \{0\}$.

3. Nous reprenons les notations de II.2. On se fixe comme en II.5 $\gamma, \delta \in \hat{K}$, $a \in E_\gamma$, $b \in E_\delta$ avec $\|a\| = \|b\| = 1$. Pour $\varphi \in \mathscr{D}$, $\sigma \in \hat{M}$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ on définit $\hat{\varphi}_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta)$ de la façon suivante: Soit $e \in \mathscr{E}_\sigma^\gamma$. Alors $f = \hat{\varphi}_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) e$ est l'élément de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ tel que $r_{\sigma\lambda}(\chi_\delta * \varphi * \chi_\gamma)(\tilde{e}(a)) = \tilde{f}(b) + \sum_{b'} \tilde{f}'(b')$ où b' parcourt une base de l'orthogonal de b dans E_δ.

Dans la suite nous noterons $\varphi^{\delta\gamma} = \chi_\delta * \varphi * \chi_\gamma$, $r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(\varphi) = r_{\sigma\lambda}(\varphi^{\delta\gamma})$ que l'on regardera aussi comme un élément de $\mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$. Pour $\varphi \in \mathscr{D}$, on note $\hat{\varphi}$ l'application qui à $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ associe

$$\hat{\varphi}(\sigma, \lambda) = r_{\sigma\lambda}(\varphi) \colon L^\infty(\sigma) \to L^\infty(\sigma).$$

$\hat{\varphi}$ est appelée transformée de Fourier de φ.

Soit alors $r > 0$ et $\varepsilon \in \hat{K}$. Avec les notations ci-dessus on définit: $X^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_rX^{\delta\gamma}$) l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to \hat{\varphi}_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)$ où $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ et φ

décrit $\mathscr{D}$ (resp. ${}_r\mathscr{D}$), $X_\varepsilon^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_rX_\varepsilon^{\delta\gamma}$) l'espace des restrictions des éléments de $X^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_rX^{\delta\gamma}$) à $\tilde{\varepsilon} \times \mathfrak{a}^*$, $\mathscr{X}^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma}$) l'espace des applications

$$(\sigma, \lambda) \to r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(\varphi) \in \operatorname{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$$

où $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ et φ décrit $\mathscr{D}$ (resp. ${}_r\mathscr{D}$), $\mathscr{X}_\varepsilon^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_r\mathscr{X}_\varepsilon^{\delta\gamma}$) l'espace des restrictions à $\tilde{\varepsilon} \times \mathfrak{a}^*$ des éléments de $\mathscr{X}^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma}$). On définit également $\mathscr{X}_{(K)}$ (resp. ${}_r\mathscr{X}_{(K)}$, resp. $\mathscr{X}$, resp. ${}_r\mathscr{X}$) l'espace des transformés de Fourier des éléments de $\mathscr{D}_{(K)}$ (resp. ${}_r\mathscr{D}_{(K)}$, $\mathscr{D}$, ${}_r\mathscr{D}$). On a de manière analogue à la proposition 4:

PROPOSITION 15. (i) *$X^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_rX^{\delta\gamma}, X_\varepsilon^{\delta\gamma}, {}_rX_\varepsilon^{\delta\gamma}$) ne dépend pas du choix de a et b, et est obtenu dès que dans la définition φ décrit $\mathscr{D}^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma}$, $\mathscr{D}^{\delta\gamma}$, ${}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma}$).*

(ii) *Soient $\varphi \in \mathscr{D}$ et $\sigma \in \hat{M}$. L'application $\lambda \to \hat{\varphi}(\sigma, \lambda) \in \operatorname{Hom}(L^\infty(\sigma), L^\infty(\sigma))$ (resp. $\lambda \to \hat{\varphi}_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)$ est holomorphe en λ.*

(iii) *Identifiant $\operatorname{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma))$ à*

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta) \otimes \operatorname{Hom}(E_\gamma, E_\delta),$$

on a pour $r > 0$:

$$\mathscr{X}^{\delta\gamma} = X^{\delta\gamma} \otimes \operatorname{Hom}(E_\gamma, E_\delta), \qquad {}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma} = {}_rX^{\delta\gamma} \otimes \operatorname{Hom}(E_\gamma, E_\delta),$$
$$\mathscr{X}_\varepsilon^{\delta\gamma} = X_\varepsilon^{\delta\gamma} \otimes \operatorname{Hom}(E_\gamma, E_\delta), \qquad {}_r\mathscr{X}_\varepsilon^{\delta\gamma} = {}_rX^{\delta\gamma} \otimes \operatorname{Hom}(E_\gamma, E_\delta).$$

(iv) $\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}$, $\forall u, v \in \mathbb{U}$

$$(u * \varphi * \psi * v) \ \ (\sigma, \lambda) = r_{\sigma\lambda}(u)\, \hat{\varphi}(\sigma, \lambda)\, \hat{\psi}(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(v).$$

(v) *Pour tout $r > 0$ et tout β, γ, $\delta \in \hat{K}$ on a*

$$\begin{gathered} {}_rX^{\delta\gamma}F^{\gamma\beta} \subset {}_rX^{\delta\beta}, \\ F^{\delta\gamma}{}_rX^{\gamma\beta} \subset {}_rX^{\delta\beta}, \\ X^{\delta\gamma}X^{\gamma\beta} \subset X^{\delta\beta}, \\ \mathscr{X}^{\delta\gamma}\mathscr{X}^{\gamma\beta} \subset \mathscr{X}^{\delta\beta}. \end{gathered}$$

4. *Normes*

On fixe sur it_0^* la norme $\|\cdot\|$ définie grâce à la forme de Killing (cf. IV.5). Rappelons (cf. V.1) que l'on a fixé une norme sur $\mathfrak{a}_0$ provenant d'un produit scalaire. On en déduit une structure d'espace de Hilbert sur $\mathfrak{a}^*$. La norme ocrrespondante sur $\mathfrak{a}^*$ est noté $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Soit $\sigma \in \hat{M}$. Sur $L(\sigma)$ on définit un produit scalaire par: $\forall \varphi, \psi \in L(\sigma)$, $(\varphi, \psi) = \int_K (\varphi(k), \psi(k))\, dk$ où dk est la mesure de Haar normalisée sur K et le produit scalaire sous le signe somme est le produit scalaire sur E_σ. On note $L^2(\sigma)$ l'espace de Hilbert complété de $L(\sigma)$ pour ce produit scalaire; on a $L(\sigma) \subset L^\infty(\sigma) \subset L^2(\sigma)$.

Pour $T \in \mathrm{Hom}(L^\infty(\sigma), L^\infty(\sigma))$, on définit $\|T\| = \sup_{\varphi \in L^\infty(\sigma), \|\varphi\| \leq 1} \|T\varphi\|$. Si $\|T\| < \infty$ on note encore T le prolongement continu de T à $L^2(\sigma)$. Il est bien connu que si $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, $r_{\sigma\lambda}$ est une représentation unitaire de G dans $L^2(\sigma)$.

Soient $\delta, \gamma, \varepsilon \in K$ et $r > 0$. On notera ${}_rH^{\delta\gamma}$ l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to F(\sigma, \lambda)$, où $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ et $F(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta)$, qui vérifient:

H.1. $\forall \sigma \in \hat{M}$, l'application $\lambda \to F(\sigma, \lambda)$ est holomorphe en λ.

H.2. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$q_{r,n}(F) = \sup_{(\sigma,\lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*} (1 + \|\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^n e^{-r\|\mathrm{Re}\lambda\|} \|F(\sigma, \lambda)\| < \infty$.

H.3. $\forall w \in W$, $\forall \sigma \in \hat{M}$, $b^\delta(w, \sigma, \lambda) F(\sigma, \lambda) = F(w\sigma, w\lambda) b^\gamma(w, \sigma, \lambda)$ où l'égalité est une égalité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ (cf. prop. 8 et III.1 pour la définition de $b^\delta(w, \sigma, \lambda)$ et $b^\gamma(w, \sigma, \lambda)$).

H.4. $\forall \sigma \in \hat{M}$ $\forall \alpha \in \Delta^+$, simple, $\forall \lambda \in A^\alpha(\sigma)$, $s^\delta(\sigma, \lambda, \alpha) F(\sigma', \lambda') = F(\sigma, \lambda) s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha)$ (cf. prop. 8 et III.1 pour la définition de σ', λ', $A^\alpha(\sigma)$, $s^\delta(\sigma, \lambda, \alpha)$, $s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha)$). ${}_rH^{\delta\gamma}$ muni des semi-normes $q_{r,n}$ est un espace de Fréchet. On définit $H^{\delta\gamma} = \bigcup_{r>0} {}^{\delta\gamma}_{r}H^{\delta\gamma}$ que l'on munit de la topologie limite inductive de celle des ${}_rH^{\delta\gamma}$. $H^{\delta\gamma}$ est donc un espace L.F. On définit également ${}_rH_\varepsilon^{\delta\gamma}$) qui est l'espace des restrictions à $\tilde{\varepsilon} \times \mathfrak{a}^*$ des eléments de ${}_rH^{\delta\gamma}$ (resp. $H^{\delta\gamma}$). Identifiant, pour $\sigma \in \hat{M}$,

$$\mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma)) \qquad \text{à} \qquad \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma, \mathscr{E}_\sigma^\delta) \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\delta)$$

on définit

$$ {}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma} = {}_rH^{\delta\gamma} \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\delta),$$
$$\mathscr{H}^{\delta\gamma} = H^{\delta\gamma} \otimes \mathrm{Hom}(E_\gamma, E_\delta).$$

Ces espaces sont des espaces d'applications

$$(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^* \to F(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(L^\gamma(\sigma), L^\delta(\sigma)).$$

Enfin on définit ${}_r\mathscr{H}$ l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to F(\sigma, \lambda)$ où $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ et $F(\sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(L^\infty(\sigma), L^\infty(\sigma))$ vérifiant

$\mathscr{H}1$. $\forall \sigma \in \hat{M}$, l'application $\lambda \to F(\sigma, \lambda)$ est holomorphe en λ .

$\mathscr{H}2$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u$, $v \in U(\mathfrak{k})$

$$q_{r,n,u,v}(F) = \sup_{(\sigma,\lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*} (1 + \|\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^n$$
$$\times e^{-r\|\mathrm{Re}\lambda\|} \|r_{\sigma\lambda}(u) F(\sigma, \lambda) r_{\sigma\lambda}(v)\| < \infty.$$

$\mathscr{H}3$. Soit $\delta, \gamma \in \hat{K}$. On note $F^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) = P_\sigma^\delta F(\sigma, \lambda)|_{L^\gamma(\sigma)}$ où P_σ^δ est le projecteur orthogonal de $L^2(\sigma)$ sur $L^\delta(\sigma)$. Alors pour tout $\sigma \in \hat{M}$ et $w \in W$ on a l'égalité de fonctions méromorphes en λ

$$B^\delta(w, \sigma, \lambda)\, F^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) = F^{\delta\gamma}(w\sigma, w\lambda)\, B^\gamma(w, \sigma, \lambda)$$

$\mathscr{H}4$. $\forall \sigma \in \hat{M}$, $\forall \alpha \in \Delta^+$ simple, $\forall \lambda \in A^\alpha(\sigma)$,

$$S^\delta(\sigma, \lambda, \alpha)\, F^{\delta\gamma}(\sigma', \lambda') = F^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)\, S^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha)$$

(cf. prop. 8 pour la définition de $A^\alpha(\sigma)$, $\sigma', \lambda', S(\sigma, \lambda, \alpha)$).

On munit ${}_r\mathscr{H}$ des semi-normes $q_{r,n,u,v}$, $n \in \mathbb{N}$, $u, v \in U(\mathfrak{k})$. ${}_r\mathscr{H}$ est ainsi un espace de Fréchet. On note $\mathscr{H} = \bigcup_{r>0} {}_r\mathscr{H}$ que l'on munit de la topologie limite inductive de celle des ${}_r\mathscr{H}$. Remarquons que l'on peut munir $\mathscr{H}$ (resp. ${}_r\mathscr{H}$) d'une structure de $K \times K$ module en posant

$$\forall F \in \mathscr{H} \text{ (resp. } {}_r\mathscr{H}), \qquad \forall k_1, k_2 \in K,$$
$$((k_1, k_2)\, F)(\sigma, \lambda) = r_{\sigma\lambda}(k_1^{-1})\, F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(k_2).$$

Alors on voit facilement que la composante isotypique de type $(\delta, \gamma) \in (K \times K)$ de $\mathscr{H}$ (resp. ${}_r\mathscr{H}$) est égale à $\mathscr{H}^{\delta\gamma}$ (resp. ${}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma}$). Pour $F \in \mathscr{H}$ on note $F^{\delta\gamma}$ la composante de F dans $\mathscr{H}^{\delta\gamma}$.

PROPOSITION 16. *Soit $r > 0$. Alors:*

(i) ${}_r\mathscr{X} \subset {}_r\mathscr{H}$ *et l'application $\varphi \to \hat{\varphi}$ de ${}_r\mathscr{D}$* dans ${}_r\mathscr{H}$ *est continue.*

(ii) $\forall \delta, \gamma, \varepsilon \in \hat{K}, \qquad {}_rX^{\delta\gamma} \subset {}_rH^{\delta\gamma}, \qquad {}_rX_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset {}_rH_\varepsilon^{\delta\gamma},$

$${}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma} \subset \mathscr{H}^{\delta\gamma}, \qquad {}_r\mathscr{X}_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset {}_r\mathscr{H}_\varepsilon^{\delta\gamma}, \qquad \mathscr{X} \subset \mathscr{H},$$
$$X^{\delta\gamma} \subset H^{\delta\gamma}, \qquad X_\varepsilon^{\delta\gamma} \subset H_\varepsilon^{\delta\gamma}.$$

Démonstration. Clairement (i) implique (ii). Il suffit donc de prouver (i). Clairement les éléments de ${}_r\mathscr{X}$ vérifient $\mathscr{H}1$, $\mathscr{H}3$, $\mathscr{H}4$. Nous allons montrer que les éléments de ${}_r\mathscr{X}$ vérifient $\mathscr{H}2$. Pour cela nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires

LEMME 8.

$$\forall r > 0, \qquad \forall g \in B_r, \qquad \forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*,$$
$$\|r_{\sigma\lambda}(g)\| < e^{r\|\mathrm{Re}\lambda\|}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in K$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $r_{\sigma\lambda}(k)$ est unitaire, donc $\|r_{\sigma k}(k)\| = 1$. Notant $\bar{C}' = \{X \in \mathfrak{a}_0 \mid \forall \alpha \in \Delta^+, \alpha(X) \geqslant 0\}$, il suffit donc de démontrer:

$$\forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad \forall r > 0, \qquad \forall X \in \bar{C}',$$
$$\|X\| < r \Rightarrow \|r_{\sigma\lambda}(\exp X)\| < e^{r\|\mathrm{Re}\lambda\|}.$$

Soit alors $X_0 \in \bar{C}'$ avec $\|X_0\| < r$. Notons $a_0 = \exp X_0$. Pour $g \in G$ on notera $g = k(g)\, a(g)\, n(g)$ avec $k(g) \in K$, $a(g) \in A$, $n(g) \in N$. Soit $\psi \in L^\infty(\sigma)$.

On a alors:

$$\|(r_{\sigma\lambda}(a_0)\, \psi)(k)\|^2 = \|\psi(k(a_0^{-1}k))\|^2\, a(a_0^{-1}k)^{-2\rho - 2\mathrm{Re}\lambda}.$$

D'où:

$$\|r_{\sigma\lambda}(a_0)\, \psi\|^2 \leqslant (\sup_{k \in K} a(a_0^{-1}k)^{-2\mathrm{Re}\lambda}) \int_K \|\psi(k(a_0^{-1}k))\|^2\, a(a_0^{-1}k)^{-2\rho}\, dk.$$

Mais

$$\int_K \|\psi k(a_0^{-1}k)\|^2\, a(a_0^{-1}k)^{-2\rho} = \|r_{\sigma 0}(a_0)\, \psi\|^2.$$

Comme $r_{\sigma 0}(a_0)$ est unitaire, on en déduit:

$$\|r_{\sigma\lambda}(a_0)\, \psi\|^2 \leqslant \sup_{k \in K}(a(a_0^{-1}k)^{-2\mathrm{Re}\lambda}\, \|\psi\|^2).$$

D'où:

$$\|r_{\sigma\lambda}(a_0)\| \leqslant \sup_{k \in K} a(a_0^{-1}k)^{-\mathrm{Re}\lambda}.$$

Mais d'après [7, th. 4.1], on sait que l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{a}_0 \mid \exists k \in K, \exp(X) = a(a_0^{-1}k)\}$$

est égal à l'enveloppe convexe dans $\mathfrak{a}_0^*$ des points $-wX_0$ où w décrit W. On en déduit immédiatement:

$$\sup_{k \in K} a(a_0^{-1}k)^{-\mathrm{Re}\lambda} \leqslant e^{r\|\mathrm{Re}\lambda\|}$$

et le lemme est démontré. La forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$ est définie positive sur $i\mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{a}_0$. On en déduit un produit scalaire sur $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$ puis une norme, $W_{\mathbb{C}}$ invariante sur $\mathfrak{h}^*$ qui prolonge les normes déjà définies sur $\mathfrak{t}^*$ et $\mathfrak{a}^*$. D'autre part, d'après Harish–Chandra, il existe un isomorphisme $\Phi\colon Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^{W_{\mathbb{C}}}$ tel que pour tout $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*$ et $z \in Z(\mathfrak{g})$, $r_{\sigma\lambda}(z)$ soit une homothétie de rapport $\Phi(z)(\sigma + \lambda)$ (où $\sigma \in \hat{M}$ est regardé comme élément de $\mathscr{P}_{\mathfrak{m}}^+ \subset \mathfrak{t}^*$).

LEMME 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_1 \cdots Q_l \in S(\mathfrak{h})^{W_{\mathbb{C}}}$ tels que:*

$$\forall \nu \in \mathfrak{h}^*, \qquad (1 + \|\nu\|^2)^n \leqslant \sum_{i=1}^{l} |Q_i(\nu)|.$$

Démonstration. On sait, d'après un théorème de Chevalley, qu'il existe des polynômes homogènes $Y_1, \ldots, Y_s \in S(\mathfrak{h})$ tels que tout $P \in S(\mathfrak{h})$ s'écrive de manière unique $P = \sum_{i=1}^{s} P_i Y_i$ avec $P_i \in S(\mathfrak{h})^{W_{\mathbb{C}}}$. Il est clair qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que pour $i = 1, \ldots, s$, $\forall \nu \in \mathfrak{h}^*$, $|Y_i(\nu)| \leqslant C(1 + \|\nu\|^2)^{n_0}$. De même il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_m \in S(\mathfrak{h})$ tels que $C(1 + \|\nu\|^2)^{n+n_0} \leqslant \sum_{j=1}^{m} |Q_j(\nu)|$. Écrivons $Q_j = \sum_{i=1}^{s} Q_{ij} Y_i$ où $Q_{ij} \in S(\mathfrak{h})^{W_{\mathbb{C}}}$. On a alors

$$\forall \nu \in \mathfrak{h}^*, \qquad C(1 + \|\nu\|^2)^{n+n_0} \leqslant \sum_{i,j} |Q_{ij}(\nu)| \, |Y_i(\nu)|.$$

D'où $\forall \nu \in \mathfrak{h}^*$, $(1 + \|\nu\|^2)^n \leqslant \sum_{i,j} |Q_{ij}(\nu)|$ et le lemme est démontré.

Fin de la démonstration de la proposition 16. D'après le lemme 8, et les définitions on a, pour $\varphi \in {}_r\mathscr{D}$ (en notant pour $r > 0$, $u, v \in \mathbb{U}$, $p_{r,u,v}$ la semi norme sur ${}_r\mathscr{D}$ définie par $p_{r,u,v}(\varphi) = \sup_{g \in G} |(u_* \varphi_* v)(g)|$ pour $\varphi \in {}_r\mathscr{D}$):

$$\forall u, v \in \mathbb{U}(\mathfrak{k}), \qquad \forall z \in Z(\mathfrak{g}),$$
$$\sup_{(\sigma,\lambda) \in \hat{M} \times \mathfrak{a}^*} \|r_{\sigma\lambda}((zu)_* \varphi_* v)\| \, e^{-r\|\mathrm{Re}\lambda\|} \leqslant p_{r,zu,v}(\varphi).$$

Comme $r_{\sigma\lambda}(z)$ est une homothétie de rapport $\Phi(z)(\sigma + \lambda)$, on déduit du lemme 10 que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des éléments $z_1, \ldots, z_l$ tels que:

$$\forall \varphi \in {}_r\mathscr{D}, \qquad \forall u, v \in \mathbb{U}(\mathfrak{k}), \qquad q_{r,n,u,v}(\hat{\varphi}) \leqslant \sum_{i=1}^{l} p_{r,z_i u,v}(\varphi).$$

Ceci achève de montrer que ${}_r\mathscr{X} \subset {}_r\mathscr{H}$ et que $\varphi \to \hat{\varphi}$ est une application continue de ${}_r\mathscr{D}$ dans ${}_r\mathscr{H}$. La proposition 10 est démontrée.

VI. Transformées de Fourier des Fonctions K-Finies à Droite et à Gauche, et à Support Compact

Dans ce paragraphe nous allons essentiellement comparer les espaces

$${}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma} \qquad \text{et} \qquad {}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma} (r > 0, \delta, \gamma \in \hat{K}).$$

1. Rappelons le théorème de Paley–Wiener sphérique du à Helgason.

PROPOSITION 17 (Helgason, cf. [5]). *Soit $r > 0$ et ε_0 la représentation triviale de K. Les espaces ${}_rX_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}$, ${}_r\mathscr{X}_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}$, ${}_rH_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}$, ${}_r\mathscr{H}_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}$ sont égaux à l'espace ${}_r\mathscr{P}^W$ où ${}_r\mathscr{P}$ est l'espace des transformées de Fourier usuelles des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{a}_0$, à support compact contenu dans une boule de centre* 0 *et de* *rayon r (la norme sur* $\mathfrak{a}_0$ *est la norme fixée en* V. 1) *et* ${}_r\mathscr{P}^W$ *le sous espace de* ${}_r\mathscr{P}$ *formé des éléments invariants sous W.*

2. Nous allons établir dans ce numéro et le suivant des résultats nécessaires à l'étude des espaces $X_\delta^{\delta\delta}$, $\delta \in \hat{K}$.

LEMME 10. *Soit B la base de* $\Delta_{\mathbb{C}}$ *correspondant à* $\Delta_{\mathbb{C}}^+$. *Alors* $\Sigma = \{\gamma|_{\mathfrak{a}} \mid \gamma \in B, \gamma|_{\mathfrak{a}} \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})\}$ *est une base de* $\mathfrak{a}^*$ *et tout élément de* Δ *s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de* Σ.

Démonstration. (a) Reparquons d'abord que si $\gamma \in B$ et $\gamma|_{\mathfrak{a}} \neq 0$ on a soit $\gamma|_{\mathfrak{a}} \in \Sigma$, soit $-\gamma|_{\mathfrak{a}} \in \Sigma$. B étant une base de $\Delta_{\mathbb{C}}$ il en résulte que Σ engendre $\mathfrak{a}^*$ et que tout élément de Δ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de Σ.

(b) Il suffit donc de démontrer que $\mathrm{Card}\,\Sigma = \dim \mathfrak{a}^*$. Montrons d'abord que $B_{\mathfrak{t}} = \{\gamma|_{\mathfrak{t}} \mid \gamma \in B\}$ est la base de $\Delta_{\mathfrak{t}}$ relativement à $\Delta_{\mathfrak{t}}^+$. Par définition de $\Delta_{\mathbb{C}}^+$ on a bien $B_{\mathfrak{t}} \subset \Delta_{\mathfrak{t}}^+$ et tout élément de $\Delta_{\mathfrak{t}}$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de $B_{\mathfrak{t}}$. D'autre part si $\beta \in B_{\mathfrak{t}}$, i.e., $\beta = \gamma|_{\mathfrak{t}}$ avec $\gamma \in B$, n'était pas simple dans $\Delta_{\mathfrak{t}}^+$, $\gamma \in B$ ne serait pas simple dans $\Delta_{\mathbb{C}}^+$. Une contradiction qui montre que $B_{\mathfrak{t}}$ est formé de racines simples. Comme d'après ce qui précède $B_{\mathfrak{t}}$ engendre $\mathfrak{t}^*$ il en résulte que $B_{\mathfrak{t}}$ est la base de $\Delta_{\mathfrak{t}}$ relativement à $\Delta_{\mathfrak{t}}^+$. Donc $\mathrm{Card}\,B_{\mathfrak{t}} = \dim \mathfrak{t}^*$. Considérant l'application $\gamma \in B \to \gamma|_{\mathfrak{t}} \in B_{\mathfrak{t}}$, on voit que $\mathrm{Card}\,B = 2\,\mathrm{Card}\,B_{\mathfrak{t}} - \mathrm{Card}(B_{\mathfrak{t}} \cap \Delta_{\mathfrak{m}}^+)$ puisque $\gamma|_{\mathfrak{t}} \in B_{\mathfrak{t}}$ a deux antécédents à savoir γ et $\theta\gamma$ sauf si $\gamma|_{\mathfrak{a}} = 0$ auquel cas $\gamma|_{\mathfrak{t}}$ n'a que $\gamma = \theta\gamma$ comme antécédent. D'autre part, considérant l'application $\gamma \in B \to \gamma|_{\mathfrak{a}}$ on obtient

$$\mathrm{Card}\,B = 2\,\mathrm{Card}\,\Sigma + \mathrm{Card}(B_{\mathfrak{t}} \cap \Delta_m^+).$$

D'où

$$2\,\mathrm{Card}\,B = 2(\mathrm{Card}\,B_{\mathfrak{t}} + \mathrm{Card}\,\Sigma)$$

Comme $\mathrm{Card}\,B = \dim \mathfrak{t}^* + \dim \mathfrak{a}^*$ et $\mathrm{Card}\,B_{\mathfrak{t}} = \dim \mathfrak{t}^*$ on a bien $\mathrm{Card}\,\Sigma = \dim \mathfrak{a}^*$ et le lemme est démontré.

Soient $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ et $\xi_1, ..., \xi_l$ les éléments de $\mathfrak{a}^*$ définis par $(\xi_i)_{\alpha_j} = 1$ ou 0 selon que $i = j$ ou $i \neq j$. Soit $\delta \in \mathscr{P}_{\mathfrak{t}}^+$. Pour $i = 1, ..., l$, on identifie $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ à $\mathfrak{so}(2n_i + 1)$ comme en I.7. Alors avec les notations de I.6, I.7, III.5, $\delta^\alpha = \delta|_{\mathfrak{t}^\alpha}$ est un élément de $\mathscr{P}_{\mathfrak{t}}\alpha$ et l'on peut écrire $\delta^{\alpha_i} = (\delta_1^{\alpha_i}, ..., \delta_{n_i}^{\alpha_i})$. Nous poserons $\nu^\delta = 2(\sum_{i=1}^l \delta_{n_i}^{\alpha_i} \xi_i) \in \mathfrak{a}^*$. Alors on a

LEMME 11. *Pour tout* $\delta \in \mathscr{P}_{\mathfrak{t}}^+$, *l'élément* $\mu^\delta = \delta + \nu^\delta$ *de* $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$ *est un élément de* $\mathscr{P}_{\mathbb{C}}^+$.

Démonstration. Soit d'abord $\gamma \in B$ avec $\gamma|_{\mathfrak{a}} = 0$. Alors $\gamma|_{\mathfrak{t}} \in \Delta_{\mathfrak{m}}^+$ et l'on a $(\mu^\delta)_\gamma = \delta_\gamma \in \mathbb{N}$ puisque $\delta \in \mathscr{P}_{\mathfrak{t}}^+$.

Maintenant soit $\gamma \in B$ avec $\gamma|_{\mathfrak{a}} \neq 0$. Alors $\gamma|_{\mathfrak{a}} = \pm\alpha_i$ pour un i compris entre 1 et l. Notons $\beta = \gamma|_{\mathfrak{t}}$. Alors $\beta \in B_{\mathfrak{t}}$ et d'autre part:

$$(\mu^\delta)_\gamma = \frac{\|\beta\|^2}{\|\beta\|^2 + \|\alpha_i\|^2}\,\delta_\gamma \pm \frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\beta\|^2 + \|\alpha_i\|^2}\,(\nu^\delta)_{\alpha_i}.$$

On effectue le calcul dans $\mathfrak{g}^{\alpha_i} \simeq \mathfrak{so}(2n_i + 1, 1)$ où l'on voit que $\|\beta\| = \|\alpha_i\|$ et l'on a $(\mu^\delta)_\gamma = \frac{1}{2}((\delta^{\alpha_i})_\beta \pm 2\delta^{\alpha_i}_{n_i})$. Mais $(\delta^{\alpha_i})_\beta = 2\delta^{\alpha_i}_j$ pour un j compris entre 1 et n_i. On a donc $(\mu^\delta)_\gamma = \delta^{\alpha_i}_j \pm \delta^{\alpha_i}_{n_i}$. Comme $\delta^{\alpha_i} \in \mathscr{P}^+_{\mathfrak{k}_{\alpha_i}}$, on a bien $(\mu^\delta)_\gamma \in \mathbb{N}$. Nous avons donc démontré que pour tout $\gamma \in B$, $(\mu^\delta)_\gamma \in \mathbb{N}$ ce qui achève la démonstration du lemme.

3. Soit alors $\delta \in \mathscr{P}^+_{\mathfrak{t}}$ et (π, E_{μ^δ}) la représentation de $\mathfrak{g}$ de plus haut poids μ^δ. Notons que si $\delta \in \hat{K}$, π se relève en une représentation de G notée encore π. Dans la suite nous supposerons $\delta \in \hat{K}$. On munit $E_\mu{}^\delta$ d'un produit scalaire invariant par $\mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$ qui est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$ (ici $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$). On choisit un vecteur $e_\mu \in E_\mu{}^\delta$ de poids μ^δ sous $\mathfrak{h}$ et de norme 1. L'étude des poids de E_{μ^δ} sous $\mathfrak{t}$ montre que $\delta \in \hat{K}$ est contenu avec multiplicité 1 dans E_{μ^δ} et que $(e_{\mu^\delta}) \in (E_{\mu^\delta})^\delta$. Si l'on dénote par $\sigma \in \hat{M}$ l'élément de $\hat{M}$ de plus haut poids $\delta \in \mathscr{P}^+_{\mathfrak{t}} \subset \mathscr{P}^+_{\mathfrak{m}}$, on voit de même que $\sigma \in \hat{M}$ est contenu avec multiplicité 1 dans E_{μ^δ} et que $e_{\mu^\delta} \in (E_{\mu^\delta})^\sigma$. Ceci nous permet de regarder E_σ et E_δ inclus dans E_{μ^δ}.

Introduisons la fonction $c_\delta(g) = (e_{\mu^\delta}, \pi(g)\, e_{\mu^\delta})$, $g \in G$. Clairement c_δ est C^∞ et vérifie $\chi_\delta * c_\delta = c_\delta * \chi_\delta = c_\delta$. Soit $\varphi_0 \in {}_r\mathscr{D}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}$ où ε_0 est la représentation triviale de K. Alors $\varphi = c_\delta \varphi_0$ est un élément de ${}_r\mathscr{D}^{\delta\delta}$. On se fixe $b \in E_\delta$ un vecteur de poids δ et de norme 1. On va étudier $\hat{\varphi}^{\delta\delta}_{bb}(\sigma, \lambda)$. Comme $\sigma \in \tilde{\delta}$ on a $\dim \mathscr{E}^\delta_\sigma = 1$ et l'on identifie $\mathscr{E}^\delta_\sigma$ à $\mathbb{C}$. Alors pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\hat{\varphi}^{\delta\delta}_{bb}(\sigma, \lambda)$ est un scalaire égal à $(r_{\sigma\lambda}(\varphi)\, b, b)$ où b est regardé comme un élément de $L^\delta(\sigma) \simeq E_\delta$ et où le produit scalaire est celui défini en V. 4 sur $L^\infty(\sigma)$. De même $(\hat{\varphi}_0)^{\varepsilon_0\varepsilon_0}(\varepsilon_0, \lambda)$ (où ε_0 est indifféremment la représentation triviale de K ou de M) est un scalaire.

LEMME 12. *Avec les notations précédentes, on a:*

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad \hat{\varphi}^{\delta\delta}_{bb}(\sigma, \lambda) = (\dim E_\sigma)\,(\dim E_\delta)^{-2}\, \hat{\varphi}^{\varepsilon_0\varepsilon}_0(\varepsilon_0, \lambda + \nu^\delta).$$

Démonstration. D'après ce qui précède on a:

$$\hat{\varphi}^{\delta\delta}_{bb}(\sigma, \lambda) = \int_G c_\delta(g)\, \varphi_0(g)(r_{\sigma\lambda}(g)\, b, b)\, dg.$$

Utilisant la formule d'intégration liée à la décomposition $G = KAK$ (cf. [6, prop. X.1.17]) on en déduit:

$$\hat{\varphi}_{bb}^{\delta\delta}(\sigma, \lambda) = \int_{A \times K \times K} D(a)\, c^{\delta}(k_1 a k_2)\, \varphi_0(k_1 a k_2)(r_{\sigma\lambda}(k_1 a k_2)\, b, b)\, da\, dk_1\, dk_2$$

avec $D(a) = C \prod_{\alpha \in \Delta^+} (a^{\alpha} - a^{-\alpha})$ où C est une constante dépendant des normalisations des mesures sur A et G. Mais $\varphi_0(k_1 a k_2) = \varphi_0(a)$ pour $k_1, k_2 \in K$, $a \in A$. Évaluons alors:

$$S(a, \lambda) = \int_{K \times K} (e_{\mu^\delta}, \pi(k_1 a k_2)(r_{\sigma\lambda}(k_1 a k_2), b, b)\, dk_1\, dk_2.$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E_δ regardé indifféremment comme sous espace de $L(\sigma)$ ou E_{μ^δ}. Il résulte aisément des relations d'orthogonalité de Schur que l'on a:

$$S(a, \lambda) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (\dim E_\delta)^{-2}\, (e_j, \pi(a)\, e_i)(r_{\sigma\lambda}(a)\, e_i, e_j).$$

Décrivons plus précisément les éléments de $L^{\delta}(\sigma) \simeq E_\delta$. Soit $(e_1, \dots, e_l)$ une base de $E_\sigma \subset E_\delta$. Alors on a $e_i(k) = \sum_{m=1}^{l} (e_i, \delta(k)\, e_m)\, e_m$ pour $i = 1, \dots, l$. Maintenant, pour $k \in K$ et a $a \in A$ on écrit $a^{-1}k = k_0 a_0 n_0$ avec $k_0 \in K$, $a_0 \in A$, $n_0 \in N$. Alors

$$(r_{\sigma\lambda}(a)\, e_i, e_j) = \sum_{m=1}^{l} \int_K a_0^{-\lambda-\rho}(e_i, \delta(k_0)\, e_m)\overline{(e_j, \delta(k)\, e_m)}\, dk.$$

Tenant compte des égalités $(e_i, \delta(k_0)\, e_m) = (e_i, \pi(k_0)\, e_m)$, $(e_j, \delta(k)\, e_m) = (\pi(k)\, e_j, e_m)$ on voit que:

$$S(a, \lambda) = (\dim E_\delta)^{-2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ 1 \leqslant m \leqslant l}} \int_K a_0^{-\lambda-\rho}\overline{(\pi(k^{-1})\, e_j, e_m)}$$

$$\times\, (\pi(a)\, e_i, e_j)(\pi(k_0)\, e_m, e_i)\, dk.$$

Soit encore

$$S(a, \lambda) = (\dim E_\delta)^{-2} \sum_{1 \leqslant m \leqslant l} \int_K a_0^{-\lambda-\rho}(\pi(k^{-1} a k_0)\, e_m, e_m)\, dk.$$

Mais $k^{-1} a k_0 = n_0^{-1} a_0^{-1}$. D'où

$$S(a, \lambda) = (\dim E_\delta)^{-2} \sum_{1 \leqslant m \leqslant l} \int_K a_0^{-\lambda-\rho}(\pi(n_0^{-1} a_0^{-1})\, e_m, e_m)\, dk.$$

Mais $e_m \in E_\sigma \subset E_{\mu^\delta}$ est de poids $\mu^\delta|_{\mathfrak{a}} = \nu^\delta$ sous $\mathfrak{a}$ et $(\pi(n_0^{-1} a_0^{-1})\, e_m, e_m) = a_0^{-\nu^\delta}$. D'où

$$S(a, \lambda) = (\dim E_\sigma)(\dim E_\delta)^{-2} \int_K a_0^{-\lambda-\rho-\nu^\delta}\, dk.$$

Donc

$$\hat{\varphi}_{bb}^{\delta\delta}(\sigma, \lambda) = \int_A \int_K (\dim E_\sigma)(\dim E_\delta)^{-2} \varphi_0(a)\, a_0^{-\lambda-\rho-\nu^\delta} D(a)\, da\, dk.$$

Le lemme résulte immédiatement de cette dernière formule en l'appliquant également au cas où $\delta = \varepsilon_0$ et $\sigma = \varepsilon_0$.

4

PROPOSITION 18. *Pour tout $r > 0$ et $\delta \in \hat{K}$ on a:*

(i) ${}_rX_\delta^{\delta\delta} = {}_rH_\delta^{\delta\delta}$,

(ii) ${}_{r'}\mathscr{X}_\delta^{\delta\delta} = {}_{r}\mathscr{H}_\delta^{\delta\delta}$.

Démonstration. D'abord, d'après la proposition 16, on a ${}_rX_\delta^{\delta\delta} \subset {}_rH_\delta^{\delta\delta}$. D'autre part, d'après les définitions, ${}_rH_\delta^{\delta\delta}$ s'identifie à ${}_{r'}\mathscr{P}^{W_\sigma}$ où W_σ est le stabilisateur dans W de $\sigma \in \hat{M}$, identification que nous ferons dans la suite. Mais, d'après le lemme 12, ${}_rX^{\delta\delta}$ contient l'espace des fonctions

$$\lambda \in \mathfrak{a}^* \to F(\lambda) \in \mathbb{C} \qquad \text{avec} \qquad F(\lambda) = G(\lambda + \nu^\delta) \quad \text{où} \quad G \in {}_rX_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0}.$$

Or, d'après la proposition 17, ${}_rX_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0\varepsilon_0} = {}_{r'}\mathscr{P}^W$. On a donc

$${}_r\mathscr{P}^{W_\sigma} \supset {}_rX_\delta^{\delta\delta} \supset \{F \mid \lambda \to F(\lambda), F(\lambda) = G(\lambda + \nu^\delta) \text{ où } G \text{ décrit } {}_{r'}\mathscr{P}^W\}.$$

On en déduit que ν^δ est invariant sous l'action de W_σ. D'autre part ${}_rX_\delta^{\delta\delta}$ est stable sous l'action de $I_\delta^{\delta\delta}$ d'après la proposition 15(v). Mais $I_\delta^{\delta\delta}$ s'identifie, d'après la proposition 10 à $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ et $I_\delta^{\delta\delta}$ agit alors sur ${}_rX_\delta^{\delta\delta}$ par multiplication des fonctions. Comme d'après [9], on a:

$$S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}\, {}_{r'}\mathscr{P}^W = {}_{r'}\mathscr{P}^{W_\sigma},$$

en faisant le changement de variable $\lambda \to \lambda - \nu^\delta$ (qui laisse stable ${}_{r'}\mathscr{P}^{W_\sigma}$ puisque W_σ stabilise ν^δ) on obtient ${}_{r'}\mathscr{P}^{W_\sigma} \subset {}_rX_\delta^{\delta\delta}$. Comme on a déjà vu que ${}_rX_\delta^{\delta\delta} \subset {}_rH_\delta^{\delta\delta} = {}_{r}\mathscr{P}^{W_\sigma}$, la partie (i) de la proposition en résulte. (ii) résulte de (i), de la définition de ${}_{r'}\mathscr{X}_\delta^{\delta\delta}$ (cf. V. 5) et de la proposition 15(iii).

5. Soient $\gamma, \delta, \varepsilon \in \hat{K}$. On definit:

$$\begin{aligned}{}_rY_\varepsilon^{\delta\gamma} = \{F \in {}_rH_\varepsilon^{\delta\gamma} \mid \forall \sigma \in \tilde{\varepsilon}, \forall \alpha \in \Delta^+, \text{simple},\\ \forall \lambda \in A^\alpha(\sigma), F(\sigma, \lambda)\, s^\gamma(\sigma, \lambda, \alpha) = 0\}.\end{aligned}$$

[1] Je remercie Barlet pour m'avoir fourni une démonstration de l'égalite $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}\, {}_{r'}\mathscr{P}^W = {}_{r'}\mathscr{P}^{W_\sigma}$, avant que je ne prenne connaissance de [9].

PROPOSITION 19. *Soient $\sigma, \gamma, \varepsilon \in \hat{K}$. On suppose que pour tout $\sigma \in \tilde{\varepsilon}$, $\mathscr{E}_\sigma^\delta \neq 0$ et $\mathscr{E}_\sigma^\gamma \neq 0$. Alors on a:*

$$ {}_rY_\varepsilon^{\delta\gamma} = F_\varepsilon^{\delta\varepsilon}\, {}_rH_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon} F_\varepsilon^{\varepsilon\gamma}. $$

Démonstration. (a) Si un élément de ${}_r\mathscr{P}$ est divisible, comme fonction analytique, par un polynôme, elle est divisible dans ${}_r\mathscr{P}$ par ce polynôme (cf. [9, 2.6]).

(b) Sur l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ vérifiant $\operatorname{Re} \lambda_\alpha \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^+$, la fonction $|\prod_{\alpha \in \Delta^+} P_{\sigma\delta}^\alpha(-\lambda)|$ est bornée inférieurement par une constante strictement positive.

(c) Tenant compte de (a) et (b), la démonstration de la proposition 19 est analogue à celle de la proposition 13 où l'on remplace $I_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$ par ${}_rH_\varepsilon^{\varepsilon\varepsilon}$, $K_\varepsilon^{\delta\gamma}$ par ${}_rY_\varepsilon^{\delta\gamma}$, et où la proposition 18 joue le rôle de la proposition 10.

6. Le théorème suivant décrit l'espace des transformés de Fourier des éléments de $\mathscr{D}_{(K)}$.

THÉORÈME 4. *$\forall r > 0$, $\forall \delta, \gamma \in \hat{K}$ on a:*

(i) ${}_rX^{\delta\gamma} = {}_rH^{\delta\gamma} = \sum_{\varepsilon \in \hat{K}} F^{\delta\varepsilon}\, {}_rH^{\varepsilon\varepsilon} F^{\varepsilon\gamma}$,

(ii) ${}_r\mathscr{X}^{\delta\gamma} = {}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma}$,

(iii) ${}_r\mathscr{X}_{(K)} = {}_r\mathscr{H}_{(K)}$.

Démonstration. Le point (i) se déduit de la proposition 19 comme le théorème 2 se déduit de la proposition 13.

(ii) résulte alors de (i), de la proposition 15(iii) et de la définition de ${}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma}$ (cf. V. 5).

(iii) est une conséquence de (ii) et des définitions.

Au passage on remarque que la démonstration du théorème 4 et l'injectivité de la transformation de Fourier (voir plus loin) donne:

THÉORÈME 5. *Le sous espace vectoriel de $\mathscr{D}$ engendré (algébriquement) par les fonctions $u * (c_\delta \varphi) * v$ où $u, v \in \mathbb{U}$, $\delta \in \hat{K}$ et φ décrit les éléments de $\mathscr{D}$ biinvariants par K, est égal à $\mathscr{D}_{(K)}$, sous-espace de $\mathscr{D}$ formé des éléments K-finis à droite et à gauche.*

IV. THÉORÈME DE TYPE PALEY–WIENER POUR L'ESPACE $\mathscr{D} = C_c^\infty(G)$

1. *Formule d'inversion de Fourier. Théorème de Plancherel*

On définit $\mathscr{L}^2$ l'espace des applications $(\sigma, \lambda) \to F(\sigma, \lambda)$ où (σ, λ) décrit

$\hat{M} \times i\mathfrak{a}_0^*$ et $F(\sigma, \lambda)$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt dans $L^2(\sigma)$, vérifiant:

$$\sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(F(\sigma, \lambda)\, F(\sigma, \lambda)^*)\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda < \infty.$$

Ici $d\lambda$ est une mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel réel $i\mathfrak{a}_0^*$ et $m(\sigma, \lambda) = \dim E_\sigma \prod_{\alpha \in \Sigma} (\sigma + \rho_{\mathrm{m}} + \nu)(H_\alpha)$. Ici Σ est l'ensemble des $\alpha \in \Delta_{\mathrm{C}}$ tel que le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ de $\mathfrak{g}$ de poids α sous $\mathfrak{h}$ soit contenu dans $\mathfrak{n}$. On définit sur $\mathscr{L}^2$ un produit scalaire hilbertien par:

$$\forall F, G \in \mathscr{L}^2, \qquad (F, G) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(F(\sigma, \lambda)\, G^*(\sigma, \lambda))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda.$$

Alors on a la proposition suivante, qui est un cas particulier de la formule de Plancherel pour les groupes semi-simples réels due à Harish–Chandra:

PROPOSITION 20 (cf. [13, 8.15.14]). (i) *Pour $\varphi \in C_c^\infty(G)$, la restriction de $\hat{\varphi}$ à $\hat{M} \times i\mathfrak{a}_0^*$ notée encore $\hat{\varphi}$ est un élément de $\mathscr{L}^2$.*

(ii) *Il existe une normalisation de la mesure de Haar de G telle que l'application $\varphi \to \hat{\varphi}$ de $C_c^\infty(G)$ dans $\mathscr{L}^2$ se prolonge en une isométrie d'espaces de Hilbert de $L^2(G)$ dans $\mathscr{L}^2$. Cette isométrie sera encore notée $\varphi_\to \hat{\varphi}$.*

(iii) *Pour $\varphi \in C_c^\infty(G)$ on a la formule d'inversion de Fourier:*

$$\forall g \in G, \qquad \varphi(g) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(\hat{\varphi}(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda.$$

2. Le lemme suivant est facilement déduit de la proposition 8 de [2].

LEMME 13. *Soit $X \in \mathfrak{a}_0$. Il existe des fonctions C^∞ sur K, $x_1, \ldots, x_l$, $y_1, \ldots, y_m$, avec $y_1, \ldots, y_m$ invariantes à droite par M, des polynômes $P_1, \ldots, P_m$ sur $\mathfrak{a}^*$ et des éléments $X_1, \ldots, X_l \in \mathfrak{k}$ tels que:*

$$\forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad \forall \varphi \in L(\sigma),$$

$$(r_{\sigma\lambda}(X)\, \varphi)(k) = \sum_{i=1}^{l} x_i(k)(r_{\sigma\lambda}(X_i)\, \varphi)(k) + \sum_{j=1}^{m} y_j(k)\, P_j(\lambda)\, \varphi(k).$$

Le lemme suivant résulte immédiatement des définitions et du lemme précédent.

LEMME 14. *Soient $F \in \mathscr{H}$ et $X \in \mathfrak{a}$. Alors l'application $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times a^* \to r_{\sigma\lambda}(X)\, F(\sigma, \lambda)$ est encore un élément de $\mathscr{H}$.*

Le lemme suivant est clair.

LEMME 15. *Soient E un espace de Hilbert de dimension finie, T un opérateur linéaire de E dans E, U un opérateur unitaire de E dans E. Alors on a:*

$$|\mathrm{Tr}(TU)| \leqslant \dim E \, \|T\|.$$

LEMME 16. *Soit $F \in \mathscr{H}$. Alors pour tout $g \in G$, la formule*

$$\varphi(g) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda$$

a un sens, les intégrales et la série convergeant absolument.

Démonstration. Pour $\delta \in \hat{K}$ et $\sigma \in \hat{M}$ notons P_σ^δ le projecteur orthogonal de $L^2(\sigma)$ sur $L^\delta(\sigma)$ et étudions d'abord

$$\mathrm{Tr}(P_\sigma^\delta F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1})) \qquad \text{pour } \lambda \in i\mathfrak{a}_0^*.$$

Comme $r_{\sigma\lambda}(g^{-1})$ est unitaire on a, d'après le lemme 16:

$$|\mathrm{Tr}(P_\sigma^\delta F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))| \leqslant \dim L^\delta(\sigma)\, \|P_\sigma^\delta F(\sigma, \lambda)\|.$$

Clairement, $\dim L^\delta(\sigma) \leqslant (\dim E_\delta)^2$.

D'autre part on sait quxil existe u élément du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{k}$ tel que pour tout $\delta \in \hat{K}$ l'action u sur E_δ soit la multiplication par $(\dim E_\delta)^2$. Appliquant $\mathscr{H}5$ (cf. V. 5) à F et $u^{p+1} \in U(\mathfrak{k})$ on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $C_{n,p}$ telle que:

$$\forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in i\mathfrak{a}_0^*, \qquad \forall \delta \in \hat{K},$$
$$|\mathrm{Tr}(P_\sigma^\delta F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))| < C_{n,p}(\dim E_\delta)^{-2p}\,(1 + \|\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^{-n}.$$

Comme pour p assez grand la série $\sum_{\delta \in K} (\dim E_\delta)^{-2p}$ converge absolument, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $C_n > 0$ telle que

$$\forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in i\mathfrak{a}_0^*, \qquad |\mathrm{Tr}(F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))| < C_n(1 + \|\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^{-n}.$$

D'autre part d'après la définition de $m(\sigma, \lambda)$:

$$\exists C > 0, \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad \forall \sigma \in \hat{M}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*,$$
$$|m(\sigma, \lambda)| < C(1 + \|\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^{n_0}.$$

Le lemme en résulte immédiatement.

LEMME 17. *La fonction φ définie au lemme précédent est C^∞.*

Démonstration. De la définition de $\mathscr{H}$, du lemme 15 et du fait que $\mathfrak{g}$ est engendrée par $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a}$, on déduit que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'application $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \to r_{\sigma\lambda}(X)\ F(\sigma, \lambda)$ est encore dans $\mathscr{H}$. Utilisant ce fait et le lemme précédent on voit facilement que φ est différentiable. De manière plus précise $(X_* \varphi)(g) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i_0^*} \mathrm{Tr}(r_{\sigma\lambda}(X)\, F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda}(g^{-1}))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda$, ceci pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $X_* \varphi$ est dans $L^2(G)$. φ est donc un vecteur C^∞ de la représentation régulière de G, donc C^∞.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 21. *Soit $F \in {}_r\mathscr{H}$. Alors la fonction sur G définie par $\varphi(g) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(F(\sigma, \lambda)\, r_{\sigma\lambda(g}{}^{-1}))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda$ est C^∞ à support compact contenu dans B_r. En outre $\hat{\varphi} = F$.*

Démonstration. D'après le lemme 17, φ est C^∞. Alors $\varphi = \sum_{\delta\gamma \in \hat{K}} \varphi^{\delta\gamma}$ où la convergence est uniforme dans $C^\infty(G)$ (cf. [14, 4.4.2.1]). Ici $\varphi^{\delta\gamma} = \chi_\sigma * \varphi * \chi_\gamma$. Comme pour $\delta, \gamma \in \hat{K}$, $r_{\sigma\lambda}(\chi_\delta) = P_\sigma^\delta$ et $r_{\sigma\lambda}(\chi_\gamma) = P_\gamma$, on voit que:

$$\varphi^{\delta\gamma}(g) = \sum_{\sigma \in \hat{M}} \int_{i\mathfrak{a}_0^*} \mathrm{Tr}(F^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)\, r_{\delta\lambda}(g^{-1}))\, m(\sigma, \lambda)\, d\lambda$$

Comme $F^{\delta\gamma} \in {}_r\mathscr{H}^{\delta\gamma}$ (cf. fin de V. 6), il existe, d'après le théorème 4, $\varphi_1^{\delta\gamma} \in {}_r\mathscr{D}^{\delta\gamma}$ telle que $(\varphi_1^{\delta\gamma})\hat{} = F^{\delta\gamma}$. En appliquant la formule d'inversion de Fourier (cf. proposition 20(iii)) à $\varphi_1^{\delta\gamma}$, on voit que $\varphi_1^{\delta\gamma} = \varphi^{\delta\gamma}$. Comme $\varphi = \sum_{\delta, \gamma \in K} \varphi^{\delta\gamma}$ où la série converge uniformément dans $C^\infty(G)$, on voit que φ est dans ${}_r\mathscr{D}$ et qu'en outre la série ci-dessus converge uniformément dans ${}_r\mathscr{D}$. De la continuité de l'application $\varphi \to \hat{\varphi}$ de ${}_r\mathscr{D}$ dans ${}_r\mathscr{H}$ (cf. proposition 16(i)) on en déduit que $\hat{\varphi} = \sum_{\delta, \gamma \in \hat{K}} F^{\delta\gamma}$. Mais, toujours d'après [14, 4.4.2.1], on a $F = \sum_{\delta, \gamma \in \hat{K}} F^{\delta\gamma}$ où la serie converge uniformément dans ${}_r\mathscr{H}$. D'où $\hat{\varphi} = F$ et la proposition est démontrée.

3

THÉORÈME 6. (i) *Pour tout $r > 0$, l'application ${}_r\mathscr{D} \to {}_r\mathscr{H}$ définie par $\varphi \to \hat{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.*

(ii) *L'application de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{H}$ définie par $\varphi \to \hat{\varphi}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.*

Démonstration. (i) D'après les propositions 16 et 20, $\varphi \to \hat{\varphi}$ est une injection continue de ${}_r\mathscr{D}$ dans ${}_r\mathscr{H}$. D'après la proposition précédente c'est également une surjection. (i) résulte alors de l'application du théorème du graphe fermé pour les espaces de Fréchet. (ii) est une conséquence immédiate de (i) et des définitions.

ACKNOWLEDGMENTS

Je remercie très vivement M. Duflo de m'avoir permis d'utiliser ses notes et de m'avoir suggéré ce travail comme prolongement de [2].

Je remercie également N. Wallach pour m'avoir suggéré une simplification de ma démonstration de la proposition 16.

REFERENCES

1. N. BOURBAKI, "Groupes et algèbres de Lie," Chaps. IV, V, et VI, Herman, Paris, 1972.
2. P. DELORME, Homomorphismes de Harish–Chandra et K-types minimaux des séries principales des groupes de Lie semi-simples réels, preprint.
3. J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthiers Villars, Paris, 1974.
4. M. DUFLO, "Représentations irréductibles des groupes de Lie semi-simples complexes," Lecture Notes in Mathematics No. 497, pp. 26–87, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.
5. R. GANGOLLI, On the Plancherel formula and the Paley–Wiener theorem for the spherical functions on semi-simple Lie groups, *Ann. of Math.* **93** (1971), 150–165.
6. S. HELGASON, "Differential Geometry and Symmetric Spaces," Academic Press, New York, 1962.
7. B. KOSTANT, On convexity, the Weyl group and the Iwasawa decomposition, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **6** (1973), 413–455.
8. M. PRIMČ, Representations of semi-simple Lie groups with one conjugacy class of Cartan subgroups, preprint.
9. M. RAÏS, "Actions de certains groupes dans des espaces de fonctions C^∞," Lecture Notes in Mathematics No. 466, pp. 147–150, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
10. E. THIELEKER, On the quasi simple irreducible representations of the Lorentz groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **179** (1973), 465–505.
11. P. TORASSO, Le théorème de Paley–Wiener pour l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact sur un espace symétrique de type non compact, *J. Funct. Anal.* **26** (1977), 201–213.
12. D. VOGAN, The algebraic structure of the representations of semi-simple Lie groups, I, *Ann. of Math.* **109** (1979), 1–60.
13. N. WALLACH, "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces," Dekker, New York, 1973.
14. G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups," Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1972.
15. D. P. ZELOBENKO, "Analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples complexes," Mir, Moscow, 1974. [in Russian]