Invent. math. 77, 427–453 (1984)

Inventiones mathematicae

Le Théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs

L. Clozel[1]* et P. Delorme

[1] Universite Paris VII, U.E.R. de Mathematiques, L.A. 212 du C.N.R.S. 2, Place Jussieu F-75221 Paris Cedex 05, France

[2] Faculte des Sciences de Luminy Departement de Mathematiques-Informatique L.A. 225 du C.N.R.S. 70, Route Léon Lachamp F-13288 Marseille Cedex 9, France

0. Introduction

Soit G un groupe de Lie réductif (réel). (Pour les hypothèses précises sur G, ainsi que pour le détail des notations, voir le § 1.) Le *problème de Paley-Wiener scalaire* (ou invariant) consiste à caractériser les transformées de Fourier scalaires, par les représentations de G, des fonctions C^∞ à support compact sur G.

Plus précisément, soit P un sous-groupe parabolique cuspidal de G, $P=MAN$ une décomposition de Langlands de $P, \mathfrak{a}=\mathrm{Lie}(A)\otimes\mathbb{C}$. Si δ est une représentation de la série discrète de $M, \lambda\in\mathfrak{a}^*$, on désigne par $\pi_{\delta,\lambda}$ la représentation induite de G associée: elle appartient à la série principale généralisée. Son caractère-distribution trace $\pi_{\delta,\lambda}$ ne dépend pas de N, seulement des données (MA,δ,λ).

Soit alors $\mathbf{M}_i=M_iA_i$ $(i=1,\dots,R)$ un ensemble de représentants, à conjugaison près, de sous-groupes de Levi de paraboliques cuspidaux. Soit $f\in C_c^\infty(G,K)$ une fonction C^∞ sur G, à support compact, que nous supposons de plus *K-finie* pour un sous-groupe compact maximal K de G. Pour tout $i=1,\dots,R$, soit

$$F_i(\delta,\lambda)=\langle \mathrm{trace}\,\pi_{\delta,\lambda}, f\rangle;$$

F_i est donc une fonction à valeurs complexes, définie sur $(\hat{M}_i)_d\times\mathfrak{a}_i^*$.

Notre théorème de Paley-Wiener caractérise les familles $F_i(\delta,\lambda)$ qui sont obtenues comme traces des fonctions K-finies dans les séries principales généralisées.

Pour tout i, disons que F_i est *à support fini en* δ si $F_i(\delta,\lambda)\equiv 0$ sauf pour δ dans un ensemble fini. Par ailleurs, soit $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_i^*)_r$ l'espace des transformées de Fourier de fonctions de $C_c^\infty(\mathfrak{a}_{i,0})_r$: ce sont des fonctions sur $\mathfrak{a}_i^*$. Soit $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_i^*)$ la réunion des espaces $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_i^*)_r$ pour $r>0$. Enfin, soit $W_i=W(A_i)$ le groupe de Weyl de (G,A_i) qui agit sur $(\hat{M}_i)_d$ et $\mathfrak{a}_i^*$.

---

* *Present address:* Princeton University, Department of Mathematics, Fine Hall-Box 37, Princeton NJ 08544, USA

Théorème. *Supposons données, pour $i=1, \ldots, R$, des fonctions $F_i = F_i(\delta, \lambda)$: $(\hat{M}_i)_d \times \mathfrak{a}_i^* \to \mathbb{C}$.*

Alors il existe $f \in C_c^\infty(G, K)$ telle que

$$F_i(\delta, \lambda) = \langle \operatorname{trace} \pi_{\delta, \lambda}, f \rangle$$

si et seulement si les F_i satisfont les conditions suivantes:

(i) *Pour tout i, F_i est à support fini en δ.*

(ii) *Pour tout δ, $F_i(\delta, \lambda)$ appartient, comme fonction de λ, à $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}_i^*)$.*

(iii) *Pour tout i, $F_i(\delta, \lambda) = F_i(w\delta, w\lambda)$ pour $w \in W_i$.*

En fait, nous démontrerons un théorème plus précis qui permet de contrôler les supports. A savoir:

Théorème 1. *Supposons données pour $i=1, \ldots, R$ des fonctions $F_i = F_i(\delta, \lambda)$: $(\hat{M}_i)_d \times \mathfrak{a}_i^* \to \mathbb{C}$. Alors pour $\varepsilon > 0$ il existe $f_\varepsilon \in C_c^\infty(G, K)_{r+\varepsilon}$ telle que: $F_i(\delta, \lambda) = \langle \operatorname{trace} \pi_{\delta, \lambda, f} \rangle$ $i=1, \ldots, R$, si et seulement si:*

(i) *Pour tout i, F_i est à support fini en δ.*

(ii)$_r$ *Pour tout δ, $F_i(\delta, \lambda)$ appartient, comme fonction de λ à $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}_i^*)_r$.*

(iii) *Pour tout i, $F_i(\delta, \lambda) = F_i(w\delta, w\lambda)$ pour $w \in W_i$.*

Dans le cas où le groupe G n'a pas de R-groupes non triviaux, le caractère d'une représentation admissible irréductible peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients entiers de caractères des $\pi_{\delta, \lambda}$ (d'après un théorème de Zuckerman et Harish-Chandra, cf. [17] Prop. 6.6.7); les travaux récents de Vogan sur la conjecture de Kazhdan-Lusztig dans le cas réel permettent, en principe au moins, de calculer explicitement ces coefficients. Par conséquent, notre théorème joint à ces résultats détermine entièrement l'espace des fonctions complexes $\pi \to F(\pi)$ définies sur le dual admissible de G, qui sont de la forme $F(\pi) = \langle \operatorname{trace} \pi, f \rangle$ pour $f \in C_c^\infty(G, K)$.

La solution de ce problème de Paley-Wiener, pour les fonctions K-finies, est donc complète pour les groupes à une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan, $GL(n; \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{H})$ ainsi que pour $SL(2n+1, \mathbb{R})$. Comme nous l'a fait remarquer I.N. Bernstein, le Théorème 1 est insuffisant pour résoudre le problème de Paley-Wiener pour des groupes avec R-groupes non triviaux. (Il faut aussi tenir compte des «limites des série discrète».) Dans un article ultérieur, nous traiterons du cas général. D'ores et déjà, notre théorème permet de résoudre des problèmes stables au sens de Langlands. La restriction aux fonctions K-finies ne devrait pas être un obstacle aux applications: à titre d'exemple, l'appendice est une application du théorème à un problème issu de la théorie de Langlands.

L'idée de la démonstration est la suivante. On utilise un argument de récurrence sur la longueur des K-types utilisant la théorie de Vogan. Notons que ce type de récurrence a déjà été utilisé pour les groupes complexes par Zelobenko [20] et pour les groupes à une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan dans [6] pour établir un théorème de Paley-Wiener matriciel. Cet argument ramène le problème à la démonstration de l'énoncé suivant, relatif à une seule série principale généralisée. Soit MAN cuspidal,

$\delta \in \hat{M}_d$; soit $A(\delta)$ l'ensemble des K-types minimaux de $\pi_{\delta,\lambda}$: il ne dépend pas de λ.

Proposition 1. *Soit* $\mu \in A(\delta)$, *F une fonction complexe sur* $\mathfrak{a}^*$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $f_\varepsilon \in C_c^\infty(G, K)_{r+\varepsilon}$, de type μ

à droite et à gauche, telle que

$$F(\lambda) = \langle \operatorname{trace} \pi_{\delta,\lambda}, f_\varepsilon \rangle$$

si et seulement si

(i)$_r$ *F appartient à* $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r$,

(ii) *F est invariante par* $W(A)_\delta$.

Quant à la Proposition 1, elle résulte elle-même de deux types de «théorèmes de Paley-Wiener». Essentiellement, l'existence de f, F étant donnée, résulte soit du théorème de Paley-Wiener matriciel d'Arthur ([1, 2]), soit de ses conséquences sur les multiplicateurs (cf. [4] pour une démonstration simple de celles-ci) jointes à la formule de Plancherel pour G (cf. [8]). Mais le théorème d'Arthur ne nous donne f que sous des hypothèses trop restrictives sur F («invariance par le group de Weyl complexe»). Pour obtenir toutes les fonctions F requises, nous multiplions celles déjà obtenues par des polynômes. Ceci est possible grâce au théorème de Paley-Wiener infinitésimal de Delorme [5], caractérisant l'action de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ sur le K-type minimal. Quand G n'est pas connexe, on étudie la restriction des séries principales généralisées de G à sa composante neutre G_0, et l'on utilise des résultats sur les sous-espaces de transitions entre K_0-types minimaux des séries principales généralisées de G_0 ($K_0 = K \cap G_0$).

Nous avons regroupé dans le § 1 des définitions et des résultats préliminaires. Le § 2 ramène le théorème 1 à la Proposition 1; le § 3 démontre celleci pour G connexe, le § 4 dans le cas général.

L'Appendice donne une application à la théorie de Langlands. Dans certaines situations (changement de base, endoscopie), celle-ci prévoit une correspondance entre fonctions sur deux groupes réductifs, décrite par des identités entre intégrales orbitales. Que cette correspondance existe a été démontré par D. Shelstad, pour des fonctions dans l'espace de Schwartz d'Harish-Chandra; on le voulait pour des fonctions C_c^∞. Notre théorème nous permet de démontrer, ce qui peut paraître surprenant, qu'on peut obtenir la correspondance entre fonctions K-finies!

L'idée qu'on pouvait démontrer ainsi un tel théorème (Théorème 1) est due à L. Clozel, qui l'avait vérifié dans certains cas; le théorème, dans le cas connexe, est un travail commun, l'extension aux groupes non-connexes est due à P. Delorme. Pour des groupes de petites dimensions, de nombreuses versions de notre théorème ont déjà été obtenues, entre autres par Ehrenpreis, Mautner, K. Johnson, Gupta (cf. [19]).

Nous tenons à remercier M. Duflo, J. Arthur et A. Knapp pour d'utiles explications.

1. Notations et définitions

1.1. Si X est un ensemble fini, on note |X| le nombre de ses éléments

Si L est un groupe de Lie réel, on note L_0 sa composante neutre, Z_L son centre, $\mathfrak{l}_0$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_0\otimes\mathbb{C}$ sa complexifiée, $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{l}$ $Z(\mathfrak{l})$ le centre de $U(\mathfrak{l})$. Si V est un espace vectoriel complexe, $S(V)$ est son algèbre symétrique; elle s'identifie à une algèbre de fonctions sur V^*.

1.2. Hypothèses sur G

G sera un groupe de Lie vérifiant les hypothèses de Knapp [10], à cela près que nous ne supposons pas son centre compact. G est donc un groupe de Lie réel, linéaire et muni d'une injection $G\to GL(N,\mathbb{C})$. On a alors naturellement $\mathfrak{g}\subset M(N,\mathbb{C})$; soit $G_{\mathbb{C}}=\exp(\mathfrak{g})\subset GL(N,\mathbb{C})$. Soit $Z_{\mathbb{C}}(G)$ le centralisateur de G dans $GL(N,\mathbb{C})$. On suppose:

(i) $\mathfrak{g}_0$ est réductive

(ii) G a un nombre fini de composantes connexes.

(iii) $G\subset G_{\mathbb{C}}.\ Z(G)$.

En particulier, G satisfait les hypothèses de Harish-Chandra dans ([7], § 3). Ecrivons alors, comme dans ([7], § 3), $G={}^0GA_G$, où A_G est une composante déployée de G: le groupe ${}^0G$ satisfait alors *toutes* les hypothèses de Knapp. Grâce à cette décomposition en produit, on adapte facilement tous les résultats de [10] et [12] à G.

Exemple. Si $\mathbf{G}$ est un groupe linéaire algébrique réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $G=\mathbf{G}(\mathbb{R})$ satisfait nos hypothèses.

Soit K un sous-groupe compact, maximal de G satisfaisant aux hypothèses de ([7], § 3). Soit θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ et G associée à K ([7], § 3). Comme nous aurons à utiliser des résultats de Vogan [17], nous devons vérifier que la donnée (G,K,θ) satisfait aux hypothèses de [17], p. 1.

Lemme 1. *(G,K,θ) satisfait aux hypothèses de Vogan* ([17], p. 1).

Démonstration. Les conditions (a) ($\mathfrak{g}_0$ réductive), (b) ($\mathrm{Ad}(g)$ intérieur pour $g\in G$), (e) (G a une représentation fidèle de dimension finie), sont évidemment vérifiées. Les conditions (c) (l'ensemble des points fixes de θ est $\mathfrak{k}_0$), (d) ($G \simeq K\exp(\mathfrak{p}_0)$), où $\mathfrak{p}_0$ est le sous-espace propre de θ pour la valeur propre (-1) dans $\mathfrak{g}_0$, le sont d'après ([7], § 3). Il reste à vérifier: (f) Soit $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre der Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Alors le centralisateur H de $\mathfrak{h}_0$ dans G est abélien.

Soit $g\in G$. Ecrivons, suivant (iii), $g=xz$, avec $x\in G_{\mathbb{C}}$, $z\in Z_{\mathbb{C}}(G)$. Alors: $(g\in H)\Leftrightarrow(\mathrm{Ad}\,g=1$ sur $\mathfrak{h}_0)\Leftrightarrow(\mathrm{Ad}\,x=1$ sur $\mathfrak{h}_0)\Leftrightarrow(x\in H_{\mathbb{C}}=\exp(\mathfrak{h}))$. On a donc $H=G\cap H_{\mathbb{C}}Z_{\mathbb{C}}(G)$. Si $g_1=x_1z_1$, $g_2=x_2z_2$ sont dans H, il est clair que g_1 et g_2 commutent si et seulement si z_1 et z_2 commutent. On a $z_i=g_ix_i^{-1}$, donc $z_i\in Z_{\mathbb{C}}(G)\cap GG_{\mathbb{C}}$ $(i=1,2)$. Il suffit donc de remarquer que $Z_{\mathbb{C}}(G)\cap GG_{\mathbb{C}}$ est abélien, puisque $Z_{\mathbb{C}}(G)$ commute à G et $G_{\mathbb{C}}$. Ceci vérifie (f). □

Soit G_0 la composante neutre de G, Z_G son centre. Définissons, d'après Vogan ([17], 5.1.2):

$$G^{\#} = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g) \in \mathrm{Ad}(G_0)\}.$$

Lemme 2. $G^{\#} = G_0 Z_G.$

Démonstration. D'après Knapp [10], Lemme 1.1, le centralisateur de G_0 dans G est égal à Z_G. Si $g \in G^{\#}$, on a $\mathrm{Ad}\, g = \mathrm{Ad}\, g_0$ pour un $g_0 \in G_0$: donc $g g_0^{-1}$ centralise $\mathfrak{g}_0$, donc G_0, donc G. Donc $g = g_0 z$, $z \in Z_G$. □

On notera $K^{\#}$ le groupe $K \cap G^{\#}$.

1.3. Soit P un parabolique cuspidal de H. La donnée de θ définit une décomposition de Langlands $P = MAN$, avec $MA = P \cap \theta P$ (cf. [18]).

On l'appelle *la* décomposition de Langlands de P. On écrit simplement $P = MAN$ pour désigner cette décomposition. On note $W(A)$ le groupe de Weyl de (G, A) égal au quotient du normalisateur dans K de $A, N_K(A)$, par son centralisateur $Z_K(A)$. Il opère sur le dual de M, et sur A. Soit $\hat{M}_d$ l'ensemble des représentations de la série discrète de M. Si $\delta \in \hat{M}_d$, on note $W(A)_\delta$ le stabilisateur de δ.

1.4. Soit $\delta \in \hat{M}_d$ une représentation d'espace H_δ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$; soit H_δ^∞ l'espace des vecteur C^∞ de H_δ. On considère l'espace $I^\infty(\delta, \lambda)$ *des fonctions* C^∞, φ: $G \to H_\delta^\infty$ vérifiant $\varphi(gman) = \delta(m)^{-1} a^{-\lambda-\rho} \varphi(g)$, $g \in G$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$. Le groupe G agit sur $I^\infty(\delta, \lambda)$ par translation à gauche.

On note $I(\delta, \lambda)$ l'espace des vecteurs K-finis de $I^\infty(\delta, \lambda)$, $I^2(\delta, \lambda)$ le complété de $I^\infty(\delta, \lambda)$ pour la structure hilbertienne habituelle. Dans ces trois espaces, on note $\pi_{\delta, \lambda}$ la représentation de G ou de $(\mathfrak{g}, K)$ correspondante. On note $I^\infty(\delta)$, $I(\delta)$, $I^2(\delta)$ l'espace, indépendant de λ, des restrictions à K des éléments de $I^\infty(\delta, \lambda)$, $I(\delta, \lambda)$, $I^2(\delta, \lambda)$.

1.5. Si $\mathfrak{a}_0$ est un espace vectoriel réel muni d'une norme, on note $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{a}^*$, transformées de Fourier de fonctions C_c^∞ sur $\mathfrak{a}_0$, à support dans la boule fermée de rayon r et de centre 0; d'après le théorème de Paley-Wiener classique, c'est l'espace des fonctions entières F sur $\mathfrak{a}^*$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname*{Sup}_{\lambda \in \mathfrak{a}^*}(|F(\lambda)|\, e^{-r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|}(1 + \|\lambda\|)^n) < \infty$$

$(\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Im}\,\lambda$ sont définis par $\mathfrak{a}_0^* \subset \mathfrak{a}^*$ et $\|\cdot\|$ est la norme sur $\mathfrak{a}^*$ déduite de celle sur $\mathfrak{a}_0$ par dualité). On remarquera que $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$ dépend de la structure réelle associée à $\mathfrak{a}_0$.

1.6. On suppose fixée une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}_0$, définie positive sur $\mathfrak{p}_0$, définie négative sur $\mathfrak{k}_0$ et θ-invariante. On la note B et l'on note $(X, Y) = -B(X, \theta Y)$. Alors $(\ ,\ )$ se prolonge en un produit scalaire hilbertien sur $\mathfrak{g}$ noté de la même façon et l'on notera $\|\cdot\|$ la norme qu'on en déduit sur $\mathfrak{g}$ ainsi que ses restrictions aux différents sous-espaces de $\mathfrak{g}$.

1.7. On note $C_c^\infty(G,K)$ l'algèbre des fonctions C^∞ à support compact sur G, K-finies à droite et à gauche. Pour $r>0$, on désigne par $C_c^\infty(G,K)_r$ le sous-espace de $C_c^\infty(G,K)$ des fonctions à support dans $K\exp(B_r)$ où B_r est la boule fermée de rayon r dans $\mathfrak{p}_0$ muni de la norme définie ci-dessus.

On désigne par $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ l'algèbre des invariants de $\mathfrak{k}$ dans $U(\mathfrak{g})$. On notera μ un K-type, c'est-à-dire une représentation irréductible de K.

2. Démonstration du Théorème (modulo la Proposition 1)

Nous allons démontrer que la Proposition 1 implique le Théorème 1.

2.1. On vérifie tout d'abord la partie directe de l'énoncé du théorème. On fixe un parabolique cuspidal $P=MAN$ et une fonction $F:\hat{M}_d\times\mathfrak{a}^*\to\mathbb{C}$ telle que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $f_\varepsilon\in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon}$ vérifiant:

$$\forall\delta\in\hat{M}_d,\qquad \forall\lambda\in\mathfrak{a}^*,\qquad F(\delta,\lambda)=\langle \operatorname{tr}\pi_{\delta,\lambda},f_\varepsilon\rangle.$$

Pour (i), on se fixe $\varepsilon>0$ et nous pouvons supposer que f_ε est isotypique de type (μ_1,μ_2) sous l'action bilatère de K.

Alors $F(\delta,\lambda)=0$ sauf si $\mu_1=\mu_2$, et si de plus $\mu=\mu_1=\mu_2$ est un K-type de $I(\delta)$. Par réciprocité de Frobenius, ceci implique que $\operatorname{Hom}_{K\cap M}(\mu,\delta)\neq 0$. D'après un résultat classique de Harish-Chandra (cf. [14], Théorème 16.15) ce n'est possible que pour un nombre fini de $\delta\in\hat{M}_d$.

Vérifions (ii). Puisque f_ε est K-finie, l'opérateur $\pi_{\delta,\lambda}(f_\varepsilon)$ n'a, dans une base de $I(\delta)$ adaptée à l'action de K, qu'un nombre fini de coefficients non nuls. Vérifions que chacun de ces coefficients est dans $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_{r+\varepsilon}$. Si P est le parabolique *minimal*, ceci est démontré par exemple dans [1], Lemme 3.1 ou [6], Proposition 16.

Pour P cuspidal quelconque, nous pourrions imiter l'argument de [1,6]. Il sera plus rapide d'utiliser la construction suivante, dont nous aurons de nouveau besoin par la suite. Soit $P_m=M_mA_mN_m$ un parabolique minimal. On suppose, ce qui est possible à association près, que P est standard pour P_m: $P\supset P_m$ et $A_m\supset A$. On a $A_m=AA^\perp$, où $A^\perp=A_m\cap M$; $P_m\cap M=M_mA^\perp(N_m\cap M)$ est un parabolique minimal de M. Le théorème du sous-module de Casselman (cf. [18]) réalise δ comme sous-module d'une série principale de M, de la forme $\operatorname{ind}_{P_m\cap M}^M(\sigma_\delta\otimes\lambda'_\delta)$ où $\sigma_\delta\in\hat{M}_m$, $\lambda'_\delta\in(\mathfrak{a}^\perp)^*$. Par double induction, on obtient $\pi_{\delta,\lambda}$ comme sous-module de $\operatorname{ind}_{P_m}^G(\sigma_\delta\otimes\lambda'_\delta\otimes\lambda)$, une représentation de la série principale de G. En particulier, on obtient ainsi un plongement de l'espace de vecteurs K-finis $I(\delta)$ dans $I(\sigma_\delta)$. Pour montrer que $F(\delta,\cdot)$ est dans $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_{r+\varepsilon}$, il suffit de vérifier que pour $v\in I(\delta)$, et pour un produit scalaire hermitien K-invariant quelconque sur $I(\delta)$, la fonction $\lambda\to(\pi_{\delta,\lambda}(f)v,v)$ est dans $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_{r+\varepsilon}$. Mais, identifiant v à son image dans $I(\sigma_\delta)$, cette fonction est de la forme $(\pi_{\sigma_\delta,\lambda'_\delta+\lambda}(f)v,v)$ où $\lambda'_\delta+\lambda\in\mathfrak{a}_m^*=\mathfrak{a}^*\oplus(\mathfrak{a}^\perp)^*$. D'après le résultat pour le parabolique minimal, $\lambda_m\to(\pi_{\sigma_\delta,\lambda_m}(f)v,v)$ est dans $\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}_m^*)_{r+\varepsilon}$. Il suffit donc d'utiliser le fait suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur:

Lemme 3. *Soit $F'(\lambda_m)$: $\mathfrak{a}_m \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_m^*)_r$. Alors la fonction de $\lambda \in \mathfrak{a}^*$: $\lambda \to F'(\lambda'_\delta + \lambda)$ appartient à $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$.*

Alors $F(\delta, \cdot)$ est dans $\bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_{r+\varepsilon}$ qui est clairement égal à $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$. Ceci achève de prouver que F vérifie (ii).

Pour terminer la démonstration de la partie directe du théorème, il suffit de s'assurer que $F(\delta, \lambda) = F(w\delta, w\lambda)$ pour $w \in W(A)$: c'est évident puisque les représentations $\pi_{\delta,\lambda}$ et $\pi_{w\delta, w\lambda}$ ont même caractère ou même suite de Jordan-Hölder.

2.2. Avant de démontrer la réciproque, nous devons rappeler certains résultats de Vogan ([15, 17]). Nous voulons utiliser la théorie des K-types minimaux pour G non connexe, exposée dans [17], mais pour des représentations induites ordinaires, et non cohomologiquement induites. Cela nous oblige à quelques contorsions.

Soit $G \supset G^\# = G_0 Z_G$, $K^\# = K \cap G^\#$. On vérifie facilement que $K^\# = K_0 Z_K$. On pose

$$R^G = G/G^\# \simeq K/K^\#.$$

Soit $\mathfrak{t}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_0$. Soit $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$ un choix des racines positives pour $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Soit T le centralisateur de $\mathfrak{t}_0$ dans K; on a $T \subset K$, et T est abélien. Soit $W(K, T) = N_K(T)/T$. On vérifie alors ([17], Lemma 5.13) qu'il y a un isomorphisme naturel entre R^G et le sous-groupe de $W(K, T)$:

$$\{w \in W(K, T) \colon w\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t}) = \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})\}.$$

Soit alors μ un K-type, i.e. une représentation irréductible de dimension finie de K. Réduit à $K^\#$, μ se décompose en un nombre fini d'irréductibles $\mu_1^\#, \ldots, \mu_r^\#$. Puisque $K^\# = K_0 Z_K$, la théorie de Cartan-Weyl s'étend à $K^\#$: une représentation irréductible de $K^\#$ est déterminée par son plus haut poids (relativement à $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$), qui est un caractère de T. A un K-type μ, on associe alors l'ensemble $(\chi_1, \ldots \chi_r)$ des plus hauts poids des $\mu_i^\#$. Vogan démontre alors ([17], Prop. 5.1.9) que $(\chi_1, \ldots \chi_r)$ est une orbite de $R^G \subset W(K, T)$; de plus les χ_i ont multiplicité 1.

Soit alors $\rho_c \in i\mathfrak{t}_0^*$ la demi-somme des racines de $\Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$. Si χ est un caractère de T, soit $d\chi \in i\mathfrak{t}_0^*$ sa différentielle. Si μ est un K-type, on définit alors $\|\mu\| = (d\chi_i + 2\rho_c, d\chi_i + 2\rho_c)$ pour l'un quelconque des χ_i: c'est un nombre $\geqq 0$, qui ne dépend pas du choix de χ_i puisque R^G stabilise ρ_c.

Si (π, V) est un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible, on appelle *K-type minimal* de V un K-type μ de V tel que $\|\mu\|$ est minimal. Si $P = MAM$ est cuspidal, $\delta \in \hat{M}_d$, on note $A(\delta)$ l'ensemble, indépendant de λ, des K-types minimaux de $\pi_{\delta,\lambda}$.

Proposition 2 (Vogan). (i) *Si $\mu \in A(\delta)$, μ intervient dans $I(\delta)$ avec multiplicité 1.*

(ii) *Soit $M_i A_i$ $(i = 1, 2)$ deux sous-groupes de Levi cuspidaux, $\delta_i \in (\hat{M}_i)_d$.*

Si $I(\delta_1)$ et $I(\delta_2)$ ont un K-type minimal en commun, les données (M_i, δ_i) sont conjuguées par G.

Démonstration. Si G est connexe, ceci est démontré dans [15]. Sinon, cela résulte des résultats de [17], y compris le Théorème 6.6.15. Comme ce théorème n'est pas démontré dans [17], nous donnons un argument indépendant.

Si μ est un K-type, Vogan associe une autre norme à μ, notée $\|\mu\|_{\text{lambda}}$: c'est la longueur d'un certain paramètre λ_μ associé à μ ([17], Prop. 5.3.3 et Définition 5.4.1). Par construction, λ_μ et donc $\|\mu\|_{\text{lambda}}$ ne dépendent que de $\mu|_{K^\#}$; il est clair qu'il en est de même pour $\|\mu\|$. On définit de la façon évidente l'ensemble des K-types lambda-minimaux d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible. Si G est connexe, Vogan montre ([15], Lemme 8.8) que l'ensemble des K-types lambda-minimaux de $I(\delta)$ coïncide avec l'ensemble $A(\delta)$ des K-types minimaux. Utilisant la remarque qui précède, on en déduit qu'il en est de même pour G satisfaisant nos hypothèses.

D'après [17], Corollaire 6.5.15, les K-types lambda-minimaux interviennent avec multiplicité 1 dans tout $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible. Puisque $\pi_{\delta.\lambda}$ est génériquement irréductible, ceci implique l'assertion (i).

Pour démontrer (ii), nous allons utiliser la conséquence suivante de la théorie de Vogan:

Lemme 4 (Vogan). *Soit X, Y deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles ayant le même caractère infinitésimal et un K-type lambda-minimal en commun. Alors $X \simeq Y$.*

Ceci résulte immédiatement de la classification de Vogan ([17], Théorème 6.5.12) et de la fin du Lemme 6.6.18 de [17]. □

Soit MAN cuspidal; soit $M^\S = M \cap G^\#$. Il résulte de [10], Lemme 1.3, que G est engendré par M et $G^\#$. Si $\delta \in \hat{M}_d$, on en déduit qu'une fonction $f \in I^\infty(\delta, \lambda)$ $(\lambda \in \mathfrak{a}^*)$ est déterminée par sa restriction à $G^\#$, *d'où l'isomorphisme:*

$$\pi_{\delta, \lambda|G^\#} \simeq \operatorname{ind}_{M^\S AN}^{G^\#}(\delta_{|M^\S} \otimes \lambda \otimes 1).$$

Si μ intervient dans $I(\delta)$, soit $\mu^\#$ un $K^\#$-type contenu dans μ. Si $\delta|_{M^\S} = \bigoplus_i \delta^i$, $\delta^i \in (\hat{M}^\S)_d$, on voit que $\mu^\#$ intervient dans l'un des $I(\delta^i)$, regardés comme représentations de $K^\#$. Supposons alors, sous les hypothèses de (ii), que μ soit dans $A(\delta_1)$ et $A(\delta_2)$. Alors, si $\mu^\# \subset \mu|_{K^\#}$, $\mu^\#$ intervient dans $I(\delta_1^i)$ et dans $I(\delta_2^j)$ pour des sous-représentations δ_1^i et δ_2^j de $\delta_1|_{M_1^\S}$ et $\delta_2|_{M_2^\S}$. Il est clair que μ est un K-type minimal dans chacune de ces représentations. D'après le résultat (ii) dans le cas connexe, qui s'étend facilement à $G^\#$, on voit que les données $(M_1^\S, \delta_1^i)$ et $(M_2^\S, \delta_2^j)$ sont conjuguées sous $G^\#$. On peut donc supposer $M_1^\S = M_2^\S$, donc $M_1 = M_2 = M$. Si $M \subset MAN$, il est clair que pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ les représentations $\pi_{\delta_1^i, \lambda}$ et $\pi_{\delta_2^j, \lambda}$ de G ont même caractère infinitésimal; il en est de même pour les représentations $\pi_{\delta_1, \lambda}$ et $\pi_{\delta_2, \lambda}$ de G, d'où le résultat d'après le Lemme 4 puisqu'elles sont génériquement irréductibles. Ceci démontre la Proposition 2. □

2.3. Nous pouvons maintenant démontrer la partie réciproque du théorème. Considérons l'ensemble des couples (M, δ) où M est l'un des M_i, $\delta \in \hat{M}_d$. On identifie (M, δ) et $(M, w\delta)$ pour $w \in W(A)$. On notera $\underline{\delta}$ un tel couple, avec δ

définie modulo $W(A)$. L'ensemble de ces données s'identifie donc à $\coprod_{i=1,\dots,R} [(\hat{M}_i)_d/W(A_i)]$.

Si $\underline{\delta}$, $\underline{\delta}'$ sont de telles données, soit $A(\underline{\delta})$, $A(\underline{\delta}')$ les ensembles de K-types minimaux de $I(\delta)$, $I(\delta')$. On définit un ordre (partiel) sur l'ensemble des données de la façon suivante: $\underline{\delta}<\underline{\delta}'$ si, pour tout $\mu\in A(\delta)$, $\mu'\in A(\delta')$, on a $\|\mu\|<\|\mu'\|$.On définit $\underline{\delta}\leqq\underline{\delta}'$ par la relation: $\underline{\delta}<\underline{\delta}'$ ou $\underline{\delta}=\underline{\delta}'$.

Soit alors (F_i) des fonctions satisfaisant les conditions (i)–(ii)$_r$–(iii) du Théorème; on note $F=(F_i)_{i=1,\dots R}$. Soit Γ_F le support de F, c'est-à-dire l'ensemble des données $\underline{\delta}$ telles que $F(\delta,\lambda)\not\equiv 0$. Soit $\bar{\Gamma}_F$ l'ensemble des données inférieures ou égales à une donnée de Γ_F: c'est un ensemble fini. La démonstration va se faire par récurrence sur le cardinal de $\bar{\Gamma}_F$. Nous pouvons donc supposer

Hypothèse de récurrence $(\mathscr{H}_n)$. Pour tout $r>0$, si $F'=(F_i')$ satisfait les hypothèses (i), (ii)$_r$, (iii) du théorème et si $|\bar{\Gamma}_{F'}|<n$, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $f_\varepsilon'\in C_c^0(G,K)_{r+\varepsilon}$ telle que

$$\forall i, \forall\delta\in(\hat{M}_i)_d, \forall\lambda\in\mathfrak{a}_i^*,\qquad \langle\text{trace}\ \pi_{\delta,\lambda}, f_\varepsilon'\rangle=F_i'(\delta,\lambda).$$

Clairement $\mathscr{H}_1$ est vraie. En effet, on a alors $F'\equiv 0$ et on prend $f_\varepsilon'\equiv 0$ pour tout $\varepsilon>0$. Montrons que $\mathscr{H}_n$ implique $\mathscr{H}_{n+1}$. Soit F vérifiant (i), (ii)$_r$, (iii) et $|\bar{\Gamma}_F|=n$. Fixons $\varepsilon>0$. Soit $\underline{\delta}_0$ un élément maximal de $\bar{\Gamma}_F$, qui est donc dans Γ_F. Soit $\mu\in A(\delta_0)$. D'après la proposition 1, on peut trouver $h\in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon/2}$ de type (μ,μ) telle que:

$$\forall\lambda\in\mathfrak{a}^*,\qquad F(\delta_0,\lambda)=\langle\text{trace}\ \pi_{\delta_0,\lambda}, h\rangle.$$

Posons $F'(\delta,\lambda)=F(\delta,\lambda)-\langle\text{trace}\ \pi_{\delta,\lambda}, h\rangle$, $(\delta\in(\hat{M}_i)_d, \lambda\in\mathfrak{a}_i^*)$. Il est clair que F' vérifie (i), (ii)$_{r+\varepsilon/2}$, (iii).

Par ailleurs, on a $\bar{\Gamma}_{F'}\subsetneqq\bar{\Gamma}_F$. En effet, $F'(\delta_0,\lambda)\equiv 0$ par construction. Supposons que $F'(\delta,\lambda)\not\equiv 0$. Alors $F(\delta,\lambda)\not\equiv 0$, soit $\underline{\delta}\in\Gamma_F$ ou $\langle\text{trace}\,\pi_{\delta,\lambda}, h\rangle\not\equiv 0$, ce qui implique que μ intervient dans $I(\delta)$. Si $\mu'\in A(\delta)$, on doit avoir $\|\mu\|\geqq\|\mu'\|$. On ne peut avoir $\|\mu\|=\|\mu'\|$: on aurait alors $\mu\in A(\delta)$, donc, d'après la Proposition 2, $\underline{\delta}=\underline{\delta}_0$, ce qui contredit le fait que $F'(\delta,\lambda)\not\equiv 0$. Donc $\|\mu\|>\|\mu'\|$, soit $\underline{\delta}<\underline{\delta}_0$, d'où $\underline{\delta}\in\bar{\Gamma}_F-\{\underline{\delta}_0\}$. On voit donc que $\Gamma_{F'}\subset\bar{\Gamma}_F-\{\underline{\delta}_0\}$, d'où $\bar{\Gamma}_{F'}\subset\bar{\Gamma}_F-\{\underline{\delta}_0\}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$$F'(\delta,\lambda)=\langle\text{trace}\ \pi_{\delta,\lambda}, f_{\varepsilon/2}'\rangle$$

pour une fonction $f'\in C_c(G,K)_{r+\varepsilon}$. La fonction $f=f'+h$ satisfait alors:

$$F(\delta,\lambda)=\langle\text{trace}\ \pi_{\delta,\lambda}, f\rangle\qquad\text{pour tout }\delta,\lambda$$

et $f_\varepsilon\in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon}$. Il en résulte que $\mathscr{H}_n$ implique $\mathscr{H}_{n+1}$. □

3. Démonstration de la Proposition 1 (G connexe)

Nous démontrons maintenant la Proposition 1 pour G *connexe.* Si $f\in C_c^\infty(G,K)_r$, il résulte du §2 que $F(\delta)=\langle\text{trace}\,\pi_{\delta,\lambda}, f\rangle$ satisfait (i), (ii).

Réciproquement, il s'agit d'exhiber f_ε, F et ε étant donnés; nous voulons de plus f de type (μ,μ), pour μ donné dans $A(\delta)$.

On va utiliser les résultats suivants. Le premier est dû à Delorme [5]. Les données sont celles de la Proposition 1: MAN cuspidal, $\delta\in\hat{M}_d$, $\mu\in A(\delta)$. Comme μ intervient avec multiplicité un dans $\pi_{\delta,\lambda}$, l'algèbre $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}=U(\mathfrak{g})^K$ agit par des scalaires dans l'espace de type μ de I_δ. Cela détermine un homomorphisme d'algèbres $p_{\mu,\lambda}$: $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}\to\mathbb{C}$. On vérifie qu'il est polynomial en λ, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme p_μ: $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}\to S(\mathfrak{a})$ tel que, pour $u\in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$: $p_{\mu,\lambda}(u)=p_\mu(u)(\lambda)$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$.

Théorème 2 ([5] Théorème 3). *Soit $\mu\in A(\delta)$. Alors l'homomorphisme p_μ: $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}\to S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a})_\delta}$ est surjectif.*

Nous aurons aussi besoin d'une conséquence du théorème de Paley-Wiener d'Arthur ([1,2]). Ce résultat nous a été communiqué par Arthur; nous en donnons deux démonstrations: l'une utilise directement le théorème de Paley-Wiener de [1]; l'autre n'utilise que les conséquences du théorème pour les multiplicateurs de $C_c^\infty(G,K)$, (démontrées à peu de frais dans [4]) mais nécessite le recours à la formule de Plancherel pour G (cf. [8]).

Soit $P_m=M_mA_mN_m$ un parabolique minimal de G. Soit $\mathfrak{t}_{m,0}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}_{m,0}$: $\mathfrak{h}_m=\mathfrak{a}_m+\mathfrak{t}_m$ est alors une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et le sous-espace réel $\mathfrak{h}_{m,0}=\mathfrak{a}_{m,0}+i\mathfrak{t}_{m,0}$ de $\mathfrak{h}_m$ est stable pour le groupe de Weyl «complexe» $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_m)=W(\mathfrak{h}_m)$. Nous noterons $\mathscr{PW}(\mathfrak{h}_m^*)$ l'espace de Paley-Wiener sur $\mathfrak{h}_m^*$ defini par la structure réelle $\mathfrak{h}_{m,0}$.

Soit γ une distribution à support compact $W(\mathfrak{h}_m)$-invariante sur $\mathfrak{h}_{m,0}$. Alors sa transformée de Fourier $\hat{\gamma}(\Lambda)$, $\Lambda\in\mathfrak{h}_m^*$ est une fonction entière $W(\mathfrak{h}_m)$-invariante sur $\mathfrak{h}_m^*$. Si γ est une *fonction* C^∞ à support compact, contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon r, $\hat{\gamma}$ est dans $\mathscr{PW}(\mathfrak{h}_m^*)_r^{W(\mathfrak{h}_m)}$.

Si $\sigma\in\hat{M}_m$, $\lambda\in\mathfrak{a}_m^*$, soit $\pi_{\sigma,\lambda}$ la représentation de la série principale associée. Si μ est un K-type, notons $P_\mu(\sigma)$ l'opérateur, agissant dans $I(\sigma)$, égal à 1 sur les composantes isotypiques de type μ et 0 ailleurs. Si $\sigma\in\hat{M}_m$, soit $\lambda_\sigma\in\mathfrak{t}_m^*$ un paramètre d'Harish-Chandra pour le caractère infinitésimal de σ: le caractère infinitésimal de $\pi_{\sigma,\lambda}$ a alors $\lambda_\sigma+\lambda$ comme paramètre d'Harish-Chandra.

Théorème 3. (Arthur). *Soit μ un K-type, $\hat{\gamma}$ un élément de $\mathscr{PW}(\mathfrak{h}_m^*)_r^{W(\mathfrak{h}_m)}$. Alors il existe $f\in C_c^\infty(G,K)_r$, de type (μ,μ), telle que: $\pi_{\sigma,\lambda}(f)=\hat{\gamma}(\lambda_\sigma+\lambda)\ P_\mu(\sigma)$, pour tout $(\sigma,\lambda)\in\hat{M}_m\times\mathfrak{a}_m^*$.*

Démonstration 1. Soit $\mathscr{PW}(G,K)_r$ l'espace, défini par Arthur, des fonctions à valeurs opérateurs F: $(\sigma,\lambda)\to F(\sigma,\lambda)$

$$\hat{M}_m\times\mathfrak{a}_m^*\to\operatorname{End}(I(\sigma))$$

telles que[1]

(i) F est K-finie.

(ii)$_r$ Pour σ fixé, $\lambda\to F(\sigma,\lambda)$ est dans $\mathscr{PW}(\mathfrak{a}_m^*)_r$.

(iii) Supposons qu'on ait, pour tout $x\in G$:

$$\sum_{k=1,\dots,N} D_k[\langle\pi_{\sigma_k,\lambda_k}(x)\,u_k,v_k\rangle]=0 \tag{3.1}$$

[1] Pour des détails, voir [2], §2

où, pour tout k, u_k est un vecteur K-fini de $I(\sigma)$, v_k un vecteur K-fini de $I(\sigma)^*$, $\lambda_k \in \mathfrak{a}_m^*$, D_k est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{a}_m^*$.

Alors:

$$\sum_{k=1,\ldots,N} D_k[\langle F(\sigma_k, \lambda_k) u_k, v_k \rangle] = 0. \tag{3.2}$$

Lemme 5. *L'application* $(\sigma, \lambda) \to \hat{\gamma}(\lambda_\sigma + \lambda) P_\mu(\sigma)$ *est un élément de* $\mathscr{PW}(G, K)_r$.

Démonstration. Les conditions (i) et (ii) sont clairement satisfaites. Il faut vérifier (iii). Ecrivons la série de Taylor de $\hat{\gamma}$ à l'origine:

$$\forall \Lambda \in \mathfrak{h}_m^*, \quad \hat{\gamma}(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\gamma}_n(\Lambda), \quad \text{où } \hat{\gamma}_n \in S^n(\mathfrak{h}_m)^{W(\mathfrak{h}_m)}$$

et la série converge normalement puisque $\hat{\gamma}$ est entière.

Par conséquent, pour montrer que $\hat{\gamma}(\lambda_\sigma + \lambda) P_\mu(\sigma)$ satisfait (iii), il suffit de vérifier que $\hat{\gamma}_n(\lambda_\sigma + \lambda) P_\mu(\sigma)$ le satisfait. Mais $\hat{\gamma}_n \in S^n(\mathfrak{h}_m)^{W(\mathfrak{h}_m)}$. Il existe donc $z_n \in Z(\mathfrak{g})$ tel que $\pi_{\sigma,\lambda}(z_n) = \hat{\gamma}_n(\lambda_\sigma + \lambda)$ pour tout $(\sigma, \lambda) \in \hat{M}_m \times \mathfrak{a}_m^*$. Soit χ_μ le caractère normalisé de μ (i.e. $\chi_\mu = (\text{degré } \mu)^{-1}$ trace $\mu(k)$ pour $k \in K$) regardé comme distribution à support compact sur G. Alors $z_n * \bar{\chi}_\mu$ est une distribution à support compact sur G et $F(\delta) = \hat{\gamma}_n(\lambda_\sigma + \lambda)\ P_\mu(\sigma) = \pi_{\sigma,\lambda}(z_n * \bar{\chi}_\mu)$ vérifie (3.2) par intégration de (3.1) contre $z_n * \bar{\chi}_\mu$. □

Achevons la première démonstration du Théorème 3.

D'après le Lemme 5, $\hat{\gamma}(\lambda_\sigma + \lambda) P_\mu(\sigma)$ appartient à $\mathscr{PW}(G, K)_r$. Le théorème fondamental d'Arthur ([2], Théorème 2) dit que c'est la transformée de Fourier d'une fonction $f \in C_c^\infty(G, K)_r$:

$$\hat{\gamma}(\lambda_\sigma + \lambda)\, P_\mu(\sigma) = \pi_{\sigma,\lambda}(f).$$

L'injectivité de la transformation de Fourier implique que f est de type (μ, μ). □

Démonstration 2 du Théorème 2:

Lemme 6. *Soit* $\mathscr{E}'(G, K)$ *l'algèbre de convolution des distributions à support compact sur* G, K-*finies à droite et à gauche.*

Soit $\mathscr{E}'(\mathfrak{h}_{m,0})$ *l'espace des distributions à support compact sur* $\mathfrak{h}_{m,0}$. *On note* $\mathscr{E}'(G, K)_r$, *(resp.* $\mathscr{E}'(\mathfrak{h}_{m,0})_r$*) l'espace des éléments de* $\mathscr{E}'(G, K)$ *(resp.* $\mathscr{E}'(\mathfrak{h}_{m,0})$*) à support dans* $K \exp B_r$ *(resp.* $\{X \mid X \in \mathfrak{h}_{m,0}, \|X\| \leq r\}$*).*

(i) *Soit* $\gamma \in \mathscr{E}'(\mathfrak{h}_{m,0})_{r_0}^{W(\mathfrak{h}_m)}$ *et* $\hat{\gamma}$ *sa transformée de Fourier.*

Alors il existe un endomorphisme S_γ *de* $\mathscr{E}'(G, K)$ *tel que pour tout* $(\sigma, \lambda) \in \hat{M}_m \times \mathfrak{a}_m^*$ *et* $f \in \mathscr{E}'(G, K)$, $\pi_{\sigma,\lambda}(S_\gamma f) = \hat{\gamma}(\lambda_\sigma + \lambda)\ \pi_{\sigma,\lambda}(f)$.

(ii) *Si en outre* γ *est une fonction* C^∞ *à support compact,* S_γ *envoie* $\mathscr{E}'(G, K)$ *dans* $C_c^\infty(G, K)$ *et* $\mathscr{E}'(G, K)_0$ *dans* $C_c^\infty(G, K)_{r_0}$.

Démonstration. (i) D'après Arthur ([1] Théorème III.4.2, ou bien [4] Théorème 3), il existe un endomorphisme continu T_γ de $C^\infty(G, K)$ (espace des fonctions C^∞ sur G, K-finies à droite et à gauche), laissant stable $C_c^\infty(G, K)$, commutant aux actions à droite et à gauche de K, $U(\mathfrak{g})$ et $C_c^\infty(G, K)$, tel que pour tout $(\sigma, \lambda) \in \hat{M}_m \times \mathfrak{a}_m^*$ et $f \in C_c^\infty(G, K)$: $\pi_{\sigma,\lambda}(T_\gamma f) = \hat{\gamma}(-\lambda_\sigma - \lambda)\ \pi_{\sigma,\lambda}(f)$. En outre, T_γ envoie $C_c^\infty(G, K)_r$ dans $C_c^\infty(G, K)_{r_0 + r}$.

Par dualité, on en déduit un endomorphisme continu S_γ de $\mathscr{E}'(G,K)$ commutant aux actions à droite et à gauche de K, U(g) et $C_c^\infty(G,K)$. On veut montrer que $\pi_{\sigma,\lambda}(S_\gamma f)=\hat{\gamma}(\lambda_\sigma+\lambda)\,\pi_{\sigma,\lambda}(f)$ pour tout $f\in\mathscr{E}'(G,K)$ et $(\sigma,\lambda)\in\hat{M}_m\times\mathfrak{a}_m^*$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $v\in I(\sigma)$, $v'\in I(\sigma^*)$, $(S_\gamma f)*c_{v,v'}=\hat{\gamma}(\lambda_\sigma+\lambda)\,f*c_{v,v'}$, où $c_{v,v'}$ est le coefficient $c_{v,v'}(g)=\langle\pi_{\sigma,\lambda}(g)\,v,v'\rangle$.

Soit $f_1\in C_c^\infty(G,K)$. On a:
$\langle(S_\gamma f)*c_{v,v'},f_1\rangle=\langle S_\gamma f,f_1*\check{c}_{v,v'}\rangle$, où $\check{c}_{v,v'}(g)=c_{v,v'}(g^{-1})$ pour tout $g\in G$.

D'où, grâce à la définition de S_γ:

$$\langle(S_\gamma f)*c_{v,v'},f_1\rangle=\langle f,T_\gamma(f_1*\check{c}_{v,v'})\rangle.$$

Mais $\check{c}_{v,v'}$ est égal au coefficient $c_{v',v}$ de $\pi_{\sigma^*,-\lambda}$.
Alors, grâce aux propriétés de T_γ on a:

$$T_\gamma(f_1*\check{c}_{v',v})=(T_\gamma f_1)*\check{c}_{v',v}=\hat{\gamma}(\lambda_\sigma+\lambda)\,f_1*\check{c}_{v,v'}.$$

D'où:

$$\langle(S_\gamma f)*c_{v,v'},f_1\rangle=\langle\hat{\gamma}(\lambda_0+\lambda)\,f*c_{v,v'},f_1\rangle$$

et S_γ vérifie bien les propriétés voulues.

(ii) Si γ est C^∞ à support compact et $f\in\mathscr{E}'(G,K)$, on voit facilement que pour tout $\sigma\in\hat{M}_m$, $\lambda\to\pi_{\sigma,\lambda}(S_\gamma f)$ est de type Paley-Wiener pour $\mathfrak{a}_{m,0}^*$. Plus généralement, soit $P=MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal de G, standard pour P_m, et $\delta\in\hat{M}_d$. En utilisant le plongement de $\pi_{\delta,\lambda}$ dans la série principale ordinaire $\pi_{\sigma_\delta,\lambda'_\delta+\lambda}$ décrit en 2.1 on voit facilement que pour tout $\delta\in\hat{M}_d$, $\pi_{\delta,\lambda}(S_\gamma f)$ est de type Paley-Wiener pour $\mathfrak{a}_0^*$.

Mais la contribution à la mesure de Plancherel de la série principale généralisée $\pi_{\delta,\lambda}$ est une mesure sur $i\mathfrak{a}_0^*$ qui est une distribution tempérée (cf. [8] §25, Theoreme 1 et §27, Théorème 3). Il en résulte que $S_\gamma f$ est dans $L^2(G)$. Comme pour $X\in U(\mathfrak{g})$, $X*f\in\mathscr{E}'(G,K)$ et $S_\gamma(X*f)=X*(S_\gamma f)$ il en résulte que pour tout $X\in U(\mathfrak{g})$, $X*S_\gamma f$ est dans $L^2(G)$. Par conséquent $S_\gamma f$ est une fonction C^∞. (en utilisant le fait qu'une fonction dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées partielles successives sont dans L^2_{loc} est une fonction C^∞).

Comme d'autre part $S_\gamma f$ est une distribution à support compact on a finalement $S_\gamma f\in C_c^\infty(G,K)$. Enfin si $f\in\mathscr{E}'(G,K)_0$, comme S_γ est obtenu par dualité à partir de T_γ et que T_γ envoie $C_c^\infty(G,K)_r$ dans $C_c^\infty(G,K)_{r+r_0}$, on a bien $f\in\mathscr{E}'(G,K)_{r_0}$ comme annoncé. On déduit immédiatement le Théorème 3 du Lemme 6 en prenant $f=S_\gamma(\overline{\chi_\mu})$ où χ_μ est le caractère normalisé de μ regardé comme distribution sur G à support dans K. □

Nous revenons à la démonstration de la Proposition 1.

Soit donc $F:\mathfrak{a}^*\to\mathbb{C}$, $F\in\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$, invariante par $W(A)_\delta$, où $\delta\in\hat{M}_d$.

D'après [12], §1, on peut décrire δ de la façon suivante. Soit $M^\#=M_0Z_M$.

Soit T un sous-groupe de Cartan compact de M_0; T est connexe. Soit $\mathfrak{t}_0$ l'algèbre de Lie de T, $\Delta(\mathfrak{m},\mathfrak{t})$ les racines de $(\mathfrak{m},\mathfrak{t})$. Soit ρ la demi-somme des racines positives pour un ordre quelconque; $\rho\in i\mathfrak{t}_0^*$. Si λ est régulier pour $\Delta(\mathfrak{m},\mathfrak{t})$, et tel que $\lambda-\rho$ s'intègre à T, Harish-Chandra définit une représentation $\delta^{M_0}(\lambda)$ associée à λ, qui appartient à la série discrète de M_0. Si χ est un caractère de Z_M coïncidant avec $e^{\lambda-\rho}$ sur $T\cap Z_M$, on obtient une représentation $\delta^{M_0}(\lambda)\otimes\chi$ de $M^{\#}$. La représentation

$$\mathrm{ind}_{M^{\#}}^{M}(\delta^{M_0}(\lambda)\otimes\chi)$$

est alors irréductible, et appartient à $\hat{M}_d$. Notons-la $\delta(\lambda,\chi)$.

Soit $W(M,T)=N_M(T)/Z_M(T)$. Alors $\delta(\lambda,\chi)\simeq\delta(\lambda',\chi')$ si et seulement si $\chi=\chi'$, et $\lambda=\lambda'$ modulo $W(M,T)$.

On pose $\lambda=\lambda_\delta$: il est donc bien défini modulo $W(M,T)$ par δ. Via l'isomorphisme de Harish-Chandra associé à l'algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{m}$, λ_δ est le paramètre associé au caractère infinitésimal de δ.

Choisissons un paramètre λ_δ tel que $\delta=\delta(\lambda_\delta,\chi)$; soit $\Delta^+(\mathfrak{m},\mathfrak{t})$ le système de racines positives défini par λ_δ.

Un tel choix de racines positives étant donné, Knapp ([10], § 3) construit une application J de $W(A)$ dans le groupe orthogonal $O(i\mathfrak{t}_0^*)$, qui jouit des propriétés suivantes:

[10], Théorème 3.7, (c): $W(A)$ laisse stable (globalement) $\Delta^+(\mathfrak{m},\mathfrak{t})$.

[10], Théorème 4.10, démonstration: Si $w\in W(A)$ satisfait $w\delta|_{M_0}\simeq\delta|_{M_0}$, alors $J(w)\lambda_\delta=\lambda_\delta$. (Pour ceci, voir aussi [12], assertion (b) du § 8).

En particulier, si $w\in W(A)_\delta$, on voit que $J(w)\lambda_\delta=\lambda_\delta$.

Soit maintenant $\mathfrak{h}=\mathfrak{t}+\mathfrak{a}$; c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On a une application $W(A)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ donnée par $w\to(J(w),w)$. D'après Knapp [10], Théorème 3.7, (a), l'application J satisfait encore:

Pour tout $w\in W(A)$, il existe $k\in N_{K_0}(A)$ tel que $\mathrm{Ad}(k)=w$ sur $\mathfrak{a}$ et $\mathrm{Ad}(k)=J(w)$ sur $i\mathfrak{t}_0$.

En particulier, l'action de $(J(w),w)$ sur $\mathfrak{h}$ est réalisée par un élément de K_0. A fortiori, on voit que $(J,I)\,(W(A))\subset W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{h})$ où $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$.

Considérons alors la fonction F, $W(A)_\delta$-invariante sur $\mathfrak{a}^*$; $F\in\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_r$.

Lemme 7. *Soit $\varepsilon>0$. Alors F s'étend en une fonction F' sur $\mathfrak{h}^*$, $W(A)_\delta$-invariante, telle que $F'\in\mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)_{r+\varepsilon}$ et $F'(\lambda_\delta+\lambda)=F(\lambda)$ pour tout $\lambda\in\mathfrak{a}^*$.*

Démonstration. Soit F_1 une fonction sur $\mathfrak{t}^*$, $W(A)_\delta$-invariante telle que $F_1\in\mathscr{PW}(\mathfrak{t}^*)_\varepsilon$ (pour la structure réelle donnée par $i\mathfrak{t}_0$) et $F_1(\lambda_\delta)=1$. Alors la fonction F' sur $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{t}^*\oplus\mathfrak{a}^*$ définie par: $\forall\lambda\in\mathfrak{t}^*$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, $F'(\lambda_1+\lambda)=F_1(\lambda_1)F(\lambda)$ satisfait les conditions requises. □

On identifie, comme auparavant, par l'application (J,I), $W(A)_\delta$ à un sous-groupe de $W(\mathfrak{h})$. Remarquons que $W(\mathfrak{h})$ laisse stable $\mathfrak{h}_0$; il y opère comme un groupe engendré par des réflexions. Soit $\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)^{W(\mathfrak{h})}$ les invariants de $W(\mathfrak{h})$ dans l'espace de Paley-Wiener. Un théorème de Raïs ([13], Prop. 2.7) nous assure que:

$$\forall r>0,\qquad S(\mathfrak{h})\,\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(\mathfrak{h})}=\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r.$$

Lemme 8. *Pour tout $r>0$:*

$$S(\mathfrak{h})^{W(A)_\delta}\,\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(\mathfrak{h})}=\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(A)_\delta}.$$

Démonstration. En effet, il est clair que le premier membre est inclus dans le second. Réciproquement, soit $f\in\mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(A)_\delta}$. D'après le théorème de Raïs, on peut écrire $f=\sum P_i f_i$, $P_i \in S(\mathfrak{h})$, $f_i \in \mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(\mathfrak{h})}$. En faisant la moyenne des deux membres sur le groupe $W(A)_\delta$, on obtient l'expression désirée de f. □

Lemme 9. *Soit $F' \in \mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_r^{W(\mathfrak{h})}$. Soit $\mu \in A(\delta)$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(G,K)_r$, de type (μ,μ), telle que $\pi_{\delta,\lambda}(f)=F'(\lambda_\delta+\lambda)P_\mu$, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.*

Démonstration. Nous utilisons le plongement de Casselman décrit à la fin du § 2.1 (avant le Lemme 3). On a plongé δ, comme sous-module, dans $\operatorname{ind}_{P_m \cap M}^M(\sigma_\delta \otimes \lambda'_\delta)$, $\sigma_\delta \in \hat{M}_m$, $\lambda'_\delta \in (\mathfrak{a}^\perp)^*$; on en déduit que $\pi_{\delta,\lambda}$ se réalise comme sous-module de $\operatorname{ind}_{P_m}^G(\sigma_\delta \otimes \lambda'_\delta \otimes \lambda)$.

Soit $\mathfrak{h}_{m,0}=i\mathfrak{t}_{m,0}+\mathfrak{a}_{m,0}=i\mathfrak{t}_{m,0}+\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_0^\perp$ une algèbre de Cartan associée au parabolique minimal (cf. avant le Théorème 3). Soit $\mathfrak{c}$ une transformation de Cayley envoyant $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{h}_m$: $\mathfrak{c}$ envoie alors $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathfrak{h}_{m,0}$ puisque ce sont les sous-espaces de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_m$ sur lesquels les racines sont réelles; de plus $\mathfrak{c}$ conjugue $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=W(\mathfrak{h})$ et $W(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_m)$, le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_m)$. Soit $\mathfrak{c}^*\colon \mathfrak{h}_m^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application transposée de $\mathfrak{c}$.

D'après le Théorème 3, on peut trouver $f \in C_c^\infty(G,K)_r$, de type (μ,μ), telle que $\pi_{\sigma_\delta,\lambda'_\delta+\lambda}(f)$ soit égal à $(F' \circ c^*)(\lambda_{\sigma_\delta}+\lambda'_\delta+\lambda)$ sur le K-type μ, nul ailleurs.

Par restriction à l'espace $I(\delta) \subset I(\sigma_\delta)$, on voit que $\pi_{\delta,\lambda}(f)$ a les mêmes propriétés. Mais le paramètre $\lambda_{\sigma_\delta}+\lambda'_\delta+\lambda$ repère, dans l'isomorphisme de Harish-Chandra associé à $\mathfrak{h}_m$, le caractère infinitésimal de $\pi_{\sigma_\delta,\lambda'_\delta+\lambda}$; le paramètre $\lambda_\delta+\lambda$ repère, par rapport maintenant à $\mathfrak{h}$, celui de $\pi_{\delta,\lambda}$ (cf. e.g. [3], p. 93). On doit avoir $c^*(\lambda_{\sigma_\delta}+\lambda'_\delta+\lambda)=\lambda_\delta+\lambda$ modulo $W(\mathfrak{h})$. Donc $\pi_{\delta,\lambda}(f)$ vaut $F'(\lambda_\delta+\lambda)$ sur le K-type μ, 0 ailleurs. □

Ecrivons alors, d'après le Lemme 8, la fonction F' définie par le Lemme 7 comme:

$\forall \Lambda \in \mathfrak{h}^*$, $F'(\Lambda)=\sum P_i(\Lambda)F'_i(\Lambda)$, $P_i \in S(\mathfrak{h})^{W(A)_\delta}$, $F'_i \in \mathscr{PW}(\mathfrak{h}^*)_{r+\varepsilon}^{W(\mathfrak{h})}$. Le Lemme 9 nous donne des fonctions f_i sur G, de type (μ,μ), vérifiant

$$\pi_{\delta,\lambda}(f_i)=F'_i(\lambda_\delta+\lambda)P_\mu \text{ et } f_i \in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon}.$$

Le Théorème 2 dit qu'il existe des éléments u_i de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{k}}$ agissant par $P_i(\lambda_\delta+\lambda)$ sur le K-type μ de $\pi_{\delta,\lambda}$. Si l'on pose $f=\sum u_i * f_i$, il est clair que $f \in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon}$ est de type (μ,μ); $\pi_{\delta,\lambda}(f)$ est nul sur les composantes isotypiques distinctes de μ; sur la composante de type μ,

$$\begin{aligned}\pi_{\delta,\lambda}(f)&=\sum \pi_{\delta,\lambda}(u_i)\pi_{\delta,\lambda}(f_i)\\&=\sum P_i(\lambda_\delta+\lambda)F'_i(\lambda_\delta+\lambda)\\&=F(\lambda_\delta+\lambda).\end{aligned}$$

Prenant la trace, on voit donc que

$$\frac{1}{\deg(\mu)}\langle \operatorname{trace}\pi_{\delta,\lambda}, f\rangle = F'(\lambda_\delta+\lambda)=F(\lambda)$$

ce qui démontre la Proposition 1 pour G connexe. □

Remarquons enfin que la Proposition 1 s'étend facilement de G connexe à G satisfaisant: $G=G^\#=G_0 Z_G$. Si $P=MAN$, on a alors, en effet, $MA=G^A$

$=(M\cap G_0)A(Z_G\cap M)$, d'où $M=(M\cap G_0)(M\cap Z_G)$; il est facile de voir que $M\cap Z_G=K\cap Z_G$.

Une représentation $\delta\in\hat{M}_d$ s'écrit alors $\delta=\delta_0\otimes\chi$, $\delta_0\in(\widehat{M\cap G_0})_d$, χ un caractère de $M\cap Z_G$, δ_0 et χ compatibles. Si $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, on a alors $\pi_{\delta,\lambda}=\pi_{\delta_0,\lambda}\otimes\chi$; on a utilisé la décomposition, facile à vérifier: $G=G_0(K\cap Z_G)$. Les K-types minimaux de $\pi_{\delta,\lambda}$ sont de la forme $\mu=\mu_0\otimes\chi$ où $\mu_0\in A(\delta_0)$, et $K=K_0(K\cap Z_G)$.

Soit alors $F(\lambda)$ donné comme dans la Proposition 1, vérifiant (i) et (ii)$_r$. Soit $\varepsilon>0$ et $f_0\in C_c^\infty(G_0,K_0)_{r+\varepsilon}$ satisfaisant $F(\lambda)=\langle\operatorname{trace}\pi_{\delta_0,\lambda},f_0\rangle$ et de type (μ_0,μ_0) pour $\mu_0\in A(\delta_0)$. La fonction f définie par $f(g_0z)=f_0(g_0)\chi(z)^{-1}(g_0\in G_0, z\in K\cap Z_G)$ - on vérifie que ceci est bien défini - est de type μ, et:

$$\begin{aligned}\langle\operatorname{trace}\pi_{\delta,\lambda},f\rangle&=\int_G\operatorname{trace}\pi_{\delta,\lambda}(g)f(g)\,dg\\&=\int_{G.(Z_G\cap K)}\operatorname{trace}\pi_{\delta_0,\lambda}(g_0)\chi(z)f_0(g_0)\chi(z)^{-1}\,dg_0\,dz\\&=\langle\operatorname{trace}\pi_{\delta_0,\lambda},f_0\rangle.\end{aligned}$$

De plus, on voit facilement que $f\in C_c^\infty(G,K)_{r+\varepsilon}$, d'où le résultat. □

4. Démonstration de la Proposition 1 (cas général)

4.1. Dans tout ce paragraphe, on se fixe un sous-groupe parabolique cuspidal, P, de G. Soit $P=MAN$ (resp. $P_m=M_mA_mN_m$) la décomposition de Langlands de P (resp. de P_m où P_m est un sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P). Alors $M_m\subset M$, $A\subset A_m$ et $N\subset N_m$. Avec les notations de 1.1 et 1.2 soit $F=Z_{M_m}\cap(Z_C(G)\cdot\exp i\mathfrak{a}_m)$, qui est un groupe abélien. Alors on sait que $G=G_0F$ et $M=M_0F$ (cf. [10] Lemme 1.3). On définit $P^\S=P\cap G^\#$, $M^\S=M\cap G^\#$, $F^\S=F\cap M^\S(=F\cap G^\#)$, $P_m^\S=P_m\cap G^\#$ et $M_m^\S=M_m\cap G^\#$.

Alors $P_m^\S=M_m^\S A_mN_m$ (resp. $P^\S=M^\S AN$) est la décomposition de Langlands du sous-groupe parabolique $P_m^\S$ (resp. $P^\S$) de $G^\#$ et $F^\S$ est le sous-groupe «F» correspondant. Donc $G^\#=G_0F^\S$ et $M^\S=M_0F^\S$, toujours d'après [10] Lemme 1.3. Il résulte de la commutativité de F que $M^\S$ est distingué dans M. Donc M et F agissent par conjugaison sur $M^\S$. On en déduit une action de M et F sur $(\hat{M}_0)_d$ et $(\hat{M}^\S)_d$.

Lemme 10. *Soit* $\delta\in\hat{M}_d$. *Alors* $\delta|_{M^\S}$ *est semisimple et sans multiplicité. Soit* $\delta_0\in(\hat{M}^\S)_d$ *un sous-module simple de* $\delta|_{M^\S}$. *Alors le statilisateur de* δ_0 *dans* F *est égal à* $F'=F^\S(F\cap Z_M)$ *et l'ensemble des sous-modules simples de* $\delta|_{M^\S}$ *est égal à* $(F/F')\delta_0$.

Démonstration. Grâce à la théorie de Mackey, on voit que la semisimplicité de $\delta|_{M^\S}$ résulte du fait que δ est unitaire et irréductible et que $M/M^\S$ est fini. Le fait que $\delta|_{M^\S}$ est sans multiplicité est une conséquence du Lemme 4.4 de [10], ou plutôt de la démonstration de ce lemme, qui prouve que $\delta|_{M_0}$ est déjà sans multiplicité. Ce même lemme, appliqué successivement à G et $G^\#$, nous montre que $\delta|_{M_0}$ possède $|M/M^\#|$ sous-modules simples et que pour tout $\delta'\in(\hat{M}^\S)_d$,

$\delta'|_{M_0}$ possède $|M^{\S}/(M^{\S})^{\#}|$ sous-modules simples. Ici $M^{\#}=M_0Z_M$ et $(M^{\S})^{\#}=M_0\cdot Z_{M^{\S}}$. Alors, d'après [10], Lemme 4.2, appliqué à G et $G^{\#}$, $M/M^{\#}\simeq F/F\cap Z_M$ et $M^{\S}/(M^{\S})^{\#}=F^{\S}/F^{\S}\cap Z_{M^{\S}}$. Or $F^{\S}\cap Z_{M^{\S}}=F^{\S}\cap Z_M$. En effet, si $f\in F^{\S}\cap Z_{M^{\S}}$, f commute à F (car F est abélien) et commute à M_0 (car $M_0\subset M^{\S}$) donc commute à $M=M_0F$. De ce qui précède, il résulte que $\delta|_{M^{\S}}$ possède $|F/F\cap Z_M|\times|F^{\S}/F^{\S}\cap Z_m|^{-1}$ sous-modules simples. Or on peut regarder $F^{\S}/F^{\S}\cap Z_M$ comme un sous-groupe de $F/F\cap Z_M$ et le quotient est isomorphe à F/F'. Donc $\delta|_{M^{\S}}$ possède $|F/F'|$ sous-modules simples. Soit δ_0 un sous-module simple de $\delta|_{M^{\S}}$. Clairement $\delta_0\in(\hat{M}^{\S})_d$ et l'ensemble des sous-modules simples de $\delta|_{M^{\S}}$ est l'orbite dans $(\hat{M}^{\S})_d$ de δ_0 sous M ou encore sous F, puisque $M=M^{\S}F$. De plus $F'=F^{\S}(F\cap Z_M)$ stabilise δ_0. Or on a vu que $\delta|_{M^{\S}}$ possède exactement $|F/F'|$ sous-modules simples. On en déduit que F' est égal au stabilisateur de δ_0 dans F pour des raisons de cardinalité et le lemme en résulte.

Remarque 1. a) Nous avons vu, au cours de la démonstration de la Proposition 2, que l'ensemble des K-types minimaux de $I(\delta)$ coïncidait avec l'ensemble des K-types-lambda-minimaux de $I(\delta)$. On utilisera fréquement ce fait sans référence particulière et on utilisera la «traduction» en terme de K-types minimaux de certains résultats de [17] rédigés en terme de K-types lambda-minimaux.

b) Les résultats de [15] et [16] (essentiellement les Theorème 1.1 à 1.4 de [15]) démontrés dans le cas connexe s'étendent facilement à $G^{\#}$.

Lemme 11. *Soit* $\delta|_{M^{\S}}=\bigoplus_{i=0}^{n}\delta_i$ *avec* $\delta_i\in(\hat{M}^{\S})_d$. *Par restriction des fonctions de G à $G^{\#}$ (resp. K à $K^{\#}$) on obtient un isomorphisme canonique* $\pi_{\delta,\lambda|G^{\#}}\simeq\bigoplus_{i=0}^{n}\pi_{\delta_i,\lambda}$ *pour tout* $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ $\left(\textit{resp. } I(\delta)\simeq\bigoplus_{i=0}^{n}I(\delta_i)\right)$ *(cf. démonstration de la Proposition 2). Avec ces identifications:*

(i) $\forall f\in F$, $f.I(\delta_i)=I(f.\delta_i)$ *pour tout i.*

(ii) *Si* $i\neq j$, $I(\delta_i)$ *et* $I(\delta_j)$ *n'ont pas de $K^{\#}$-type minimal en commun* i.e. $A(\delta_i)\cap A(\delta_r)=\emptyset$. *Plus précisément, si* $\mu^{\#}\in A(\delta_i)$ *pour un i, la composante isotypique sous $K^{\#}$ de type $\mu^{\#}$ de* $I(\delta_r)$, $I(\delta_r)^{\mu^{\#}}$, *est réduite à zéro si* $i\neq j$. *En outre, les éléments de* $A(\delta_i)$ *et* $A(\delta_j)$ *sont des $K^{\#}$-types de même longueur.*

(iii) *Si* $\mu^{\#}\in A(\delta_i)$ *pour un i, le K-sous-module engendré par* $I(\delta_i)^{\mu^{\#}}$ *est irréductible. Notant μ sa classe on a* $\mu\in A(\delta)$.

(iv) *Réciproquement, tout K-type minimal μ de $I(\delta)$ vérifie* $I(\delta)^{\mu}=\bigoplus_{i=0}^{n}(I(\delta)^{\mu}\cap I(\delta_i))$ *et* $I(\delta)^{\mu}\cap I(\delta_i)$ *est une somme non vide de K-types minimaux de* $I(\delta_i)$ *(pour tout i).*

(v) *Pour tout i,j,* $A(\delta_i)$ *et* $A(\delta_j)$ *ont même cardinal.*

Démonstration. (i) est clair. Montrons (ii). Supposons que $\mu^{\#}\in A(\delta_i)\cap A(\delta_j)$. Soit $\lambda\in i\mathfrak{a}_0^*$, régulier pour $W(A)$. D'après [11], Corollaire 9.8, $I(\delta,\lambda)$ et $I(\delta_j,\lambda)$ sont des $(\mathfrak{g},K^{\#})$-modules simples. En outre, ils ont même caractère infinitésimal, à savoir celui de $I(\delta,\lambda)$, et ils ont un $K^{\#}$-type minimal en commun, à savoir $\mu^{\#}$. Utilisant la Remarque 1a) et le Lemme 4 on en déduit que (δ_i,λ) et (δ_j,λ) sont conjugués sous $W(A)$. Or λ est $W(A)$-régulier. Finalement, si $A(\delta_i)\cap A(\delta_j)\neq\emptyset$ on a $\delta_i\simeq\delta_j$ soit encore $i=j$ puisque $\delta|_{M^\S}$ est sans multiplicité (d'après le Lemme 10).

D'autre part, soit $\mu_0^\#$ un $K^\#$-type minimal de $I(\delta)$ regardé comme $K^\#$-module. Alors $\mu_0^\#\in A(\delta_{i_0})$ pour un certain i_0. D'après (i) le K-module engendré par $I(\delta_{i_0})^{\mu_0^\#}$ rencontre chacun des $I(\delta_i)$. Mais d'après [17], Proposition 5.1.9 tous les K-sous-modules simples de ce K-module ont même longueur, à savoir la longueur de $\mu_0^\#$. Il en résulte que pour tout i, $I(\delta_i)$ contient un $K^\#$-type de longueur $\|\mu_0^\#\|$. De la minimalité de $\mu_0^\#$ résulte que tous les éléments de $A(\delta_i)$ sont de longueur $\|\mu_0^\#\|$. Alors si $\mu^\#\in A(\delta_i)$ pour un i et $I(\delta_j)^{\mu^\#}\neq 0$ pour un j, on aurait $\mu^\#\in A(\delta_j)$, d'où $i=j$ d'après ce qui précède. Ceci achève de prouver (ii).

Montrons (iii). Soit $\mu^\#\in A(\delta_i)$ pour un i. D'après (ii), $\mu^\#$ est contenu avec multiplicité 1 dans le $K^\#$-module $I(\delta)$. Alors le K-module engendré par $I(\delta_i)^{\mu^\#}$ dans $I(\delta)$ contient $\mu^\#$ avec multiplicité 1 et par conséquent il est irréductible. Notons μ sa classe. Toujours d'après [17], Proposition 5.1.9 $\|\mu\|=\|\mu^\#\|$ et il résulte alors de (ii) que μ est un K-type minimal de $I(\delta)$ ce qui achève de prouver (iii).

Montrons (iv). Soit $\mu^\#$ la classe d'un $K^\#$-sous-module simple X de $I(\delta)^\mu$. Alors $\mu^\#$ est un $K^\#$-type minimal de $I(\delta)$, donc $\mu^\#\in A(\delta_i)$ pour un i et $\mu^\#$ est contenu avec multiplicité 1 dans $I(\delta)$ d'après (ii). Donc $X=I(\delta_i)^{\mu^\#}$. Par suite $I(\delta)^\mu=\bigoplus_{i=0}^{n} I(\delta)^\mu\cap I(\delta_i)$ et pour tout i, $I(\delta)^\mu\cap I(\delta_i)$ est une somme de $K^\#$-types minimaux de $I(\delta_i)$. D'autre part, il résulte de (i) que pour tout i, $I(\delta)^\mu\cap I(\delta_i)\neq 0$ ce qui achève de prouver (iv).

Montrons (v). D'après [15], Théorème 1.4 et la remarque 1b), $|A(\delta_i)|$ est égal au nombre de $(\mathfrak{g},K^\#)$-sous-modules simples de $I(\delta_i,0)$. Utilisant l'automorphisme de $G^\#$ déterminé par la conjugaison par $f\in F$ tel que $f\delta_i=\delta_j$, on en déduit que $|A(\delta_i)|=|A(\delta_j)|$. $\square$

4.2. Remarquons que $W(A)$ est le même pour G et pour $G^\#$ (ce que suggère la notation!) car, d'après ([10], Théorème 3.7.a), tout élément de $W(A)$ a un représentant dans K_0 et donc $W(A)=N_{K_0}(A)/Z_{K_0}(A)$. Dans la suite, on écrira W au lieu de $W(A)$.

Lemme 12. *Soit $\delta\in\hat{M}_d$ et $\delta|_{M^\S}=\bigoplus_{i=0}^{n}\delta_i$ avec $\delta_i\in(\hat{M}^\S)_d$. Alors W_δ est inclus dans W_{δ_0}.*

Démonstration. Soit $w\in W_\delta$. Alors $w\delta\simeq\delta$ implique $w\delta_0\simeq\delta_i$ pour un i. Donc $I(\delta_0)$ et $I(\delta_i)\simeq I(w\delta_0)$ sont isomorphes comme $K^\#$-modules. En particulier $A(\delta_0)=A(\delta_i)$. Donc $i=0$ d'après le Lemme 11 (ii). $\square$

Avec les notations ci-dessus, soit $\mu_0\in A(\delta_0)$. On note encore $\mu_0\in\hat{T}$ le plus haut poids de μ_0 relativement à $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ (cf. 2.2 pour les notations). Le groupe R^G agit sur $\hat{T}$ et l'on note $R_{\mu_0}=R^G_{\mu_0}$ le stabilisateur de μ_0 dans R^G. On notera $R^\perp_{\mu_0}$ l'orthogonal dans $\hat{R}^G$ de R_{μ_0}.

D'autre part, comme $R^G\simeq G/G^\#$, on a $R^G\simeq F/F^\S$ puisque $G=G_0\cdot F$ et $G^\#=G_0\cdot F^\S$ (cf. 4.1). Alors F/F' est un quotient de R^G que l'on note R' et l'on a la suite exacte:

$$0 \to F \cap Z_M / F^{\S} \cap Z_M \to R^G \to R' \to 0.$$

et par dualité:

$$0 \to \hat{R}' \to \hat{R}^G \to (F \cap Z_M / F^{\S} \cap Z_M)\hat{} \to 0.$$

Rappelons enfin que d'après [10], démonstration du Lemme 4.4, pour tout δ', $\delta'' \in \hat{M}_d$ on a $\delta' \simeq \delta''$ si et seulement si $\delta'|_{M_0} \simeq \delta''|_{M_0}$ et $\chi_{\delta'} = \chi_{\delta''}$ où $\chi_{\delta'}$ (resp. $\chi_{\delta''}$) est le caractère central de δ' (resp. δ'') restreint à $F \cap Z_M$.

Soit $w \in W_{\delta_0}$. Le caractère $\chi_{w\delta} \cdot (\chi_\delta)^{-1}$ de $F \cap Z_M$ est trivial sur $F^{\S} \cap Z_M$. D'où une application p de W_{δ_0} dans $(F \cap Z_M / F^{\S} \cap Z_M)\hat{}$. Soient $w_1, w_2 \subset W_{\delta_0}$. Alors $w_1 \delta|_{M_0}$ et $w_2 \delta|_{M_0}$ qui contiennent $\delta_0|_{M_0}$ sont équivalentes. Comme $p(w_1) = p(w_2)$ est équivalent à $\chi_{w_1\delta} = \chi_{w_2\delta}$, d'après ce qui précède, ceci est équivalent à $w_1 \delta \simeq w_2 \delta$, soit encore $w_1^{-1} w_2 \in W_\delta$. Donc p passe au quotient par W_δ et définit une injection de W_{δ_0}/W_δ dans $(F \cap Z_M / F^{\S} \cap Z_M)\hat{} \simeq \hat{R}^G / \hat{R}'$ (cf. plus haut). On note encore p l'injection de W_{δ_0}/W_δ dans $\hat{R}^G/\hat{R}'$ correspondante.

Lemme 13. *On a $R_{\mu_0}^{\perp} \supset \hat{R}'$ et p est une injection de W_{δ_0}/W_δ dans $R_{\mu_0}^{\perp}/\hat{R}'$.*

Démonstration. Soit $w \in W_{\delta_0}$ et soit $\chi \in \hat{R}^G$ un relèvement de $p(w) \in \hat{R}^G/\hat{R}'$. Alors χ est un caractère de F trivial sur $F^{\S}$ qui coïncide avec $(\chi_{w\delta})(\chi_\delta)^{-1}$ sur $F \cap Z_M$. On peut regarder χ comme un caractère de M (puisque $R^G \simeq F/F^{\S} \simeq M/M^{\S}$). Comparons alors $w\delta$ et $\chi \otimes \delta$. Clairement $w\delta$ et $\chi \otimes \delta$ sont des éléments de $\hat{M}_d$. D'autre part, χ étant trivial sur $M^{\S}$ on a $(\chi \otimes \delta)|_{M_0} \simeq \delta|_{M_0}$. Comme $w\delta|_{M_0} \simeq \delta|_{M_0}$ (puisque $w \in W_{\delta_0}$) on voit que $(\chi \otimes \delta)|_{M_0} \simeq w\delta|_{M_0}$. En outre $\chi \otimes \delta$ et $w\delta$ coïncident sur $F \cap Z_M$. Finalement on a $w\delta \simeq \chi \otimes \delta$.

Regardant χ comme un caractère de G trivial sur $G^{\#}$ ($R^G \simeq G/G^{\#}$) il en résulte que pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\pi_{w\delta,\lambda} \simeq \chi \otimes \pi_{\delta,\lambda}$. On en déduit que les K-types minimaux de $I(w\delta)$ sont exactement les K-types de la forme $\chi \otimes \mu$ où μ est un K-type minimal de $I(\delta)$.

Or $A(w\delta) = A(\delta)$ puisque $I(w\delta)$ et $I(\delta)$ sont des K-modules isomorphes. Donc si $\mu \in A(\delta)$ on a $\chi \otimes \mu \in A(\delta)$. Mais μ et $\chi \otimes \mu$ ont même restriction à $K^{\#}$. Il résulte alors du Lemme 11 (ii), (iv) que $\mu = \chi \otimes \mu$ pour tout $\mu \in A(\delta)$. Utilisant [17], Proposition 5.1.9c, on en déduit que $\chi \in R_{\mu_0}^{\perp}$ (en prenant pour μ le K-type minimal de $I(\delta)$ qui contient μ_0). Appliquant ceci pour w égal à l'élément neutre de W_{δ_0} on voit que $\hat{R}' \subset R_{\mu_0}^{\perp}$. Plus généralement cela implique que p envoie W_{δ_0}/W_δ dans $R_{\mu_0}^{\perp}/\hat{R}'$. $\square$

4.3. Introduisons maintenant le R-groupe selon Knapp et Stein (cf. [11] Théorème 13.4).

Soient $\delta \in \hat{M}_d$ et $w \in W_\delta$. La normalisation des intégrales d'entrelacement permet de définir une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*$ à valeurs dans les endomorphismes de $I(\delta)$ notée $\lambda \to \delta(w)\, \mathscr{A}_p(w, \delta, \lambda)$ dans [11], Corollaire 8.7, et que nous noterons ici $\lambda \to \mathscr{A}(w, \delta, \lambda)$. Lorsqu'il est défini, l'opérateur $\mathscr{A}(w, \delta, \lambda)$ entrelace $\pi_{\delta,\lambda}$ et $\pi_{\delta,w\lambda}$. Si $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, $\mathscr{A}(w, \delta, \lambda)$ est défini et unitaire et les opérateurs $\mathscr{A}(w, \delta, \lambda)$, où w décrit $W_{\delta,\lambda}$ (stabilisateur dans W de (δ, λ)), engendrent le commutant de $\pi_{\delta,\lambda}$. Alors on définit:

$$W_\delta^0 = \{w \in W_\delta, \mathscr{A}(w,\delta,0) \text{ est scalaire}\} \quad \text{et} \quad R_\delta = W_\delta / W_\delta^0.$$

Pour $\delta_0 \in (\hat{M}^\S)_d$ on a des objets similaires relativement à $G^\#$.

Lemme 14. *Soit $\delta \in \hat{M}_d$ et $\delta_0 \in (\hat{M}^\S)_d$ avec $\delta_0 \subset \delta|_{M^\S}$. Alors $W_\delta^0 = W_{\delta_0}^0 \cap W_\delta$ et R_δ s'injecte canoniquement dans R_{δ_0}.*

Démonstration. Clairement il suffit de montrer que $W_\delta^0 = W_{\delta_0}^0 \cap W_\delta$. Regardons $I(\delta_0)$ comme un sous-espace de $I(\delta)$ (cf. Lemme 11). Lorsqu'il est défini, l'opérateur $\mathscr{A}(w,\delta,\lambda)$ laisse stable $I(\delta_0)$ et sa restriction à $I(\delta_0)$ est égale à $\mathscr{A}(w,\delta_0,\lambda)$. En effet, la propriété correspondante est claire pour les intégrales d'entrelacement (convergentes) et cette propriété est conservée par normalisation et prolongement méromorphe. Alors, tenant compte de $W_\delta \subset W_{\delta_0}$ (Lemme 12), on en déduit que $W_\delta^0 \subset W_{\delta_0}^0 \cap W_\delta$. Réciproquement, si $w \in W_{\delta_0}^0 \cap W_\delta$, $\mathscr{A}(w,\delta,0)$ est scalaire sur $I(\delta_0)$. Mais d'après les Lemmes 10 et 11 (i), $I(\delta) = \pi_{\delta,0}(F) I(\delta_0)$, donc $I(\delta_0)$ est cyclique pour $\pi_{\delta,0}$. L'opérateur $\mathscr{A}(w,\delta,0)$ qui est scalaire sur $I(\delta_0)$ et commute à $\pi_{\delta,0}$ est donc scalaire sur $I(\delta)$. Donc $w \in W_\delta^0$. □

On se propose de montrer que $W_\delta^0 = W_{\delta_0}^0$, ou, ce qui revient au même, que la surjection canonique $W_{\delta_0}/W_\delta \to R_{\delta_0}/R_\delta \to 0$ est une bijection, A cette fin, on va étudier le nombre d'éléments de R_{δ_0}/R_δ. Au préalable, rappelons que R_{δ_0} s'identifie canoniquement au R-groupe de Vogan défini dans [15] (cf. [5], Théorème 1) et l'on a une action simplement transitive canonique de $\hat{R}_{\delta_0}$ sur $A(\delta_0)$ (cf. [15] introduction). D'après [5], Théorème 1, cette action est caractérisée de la façon suivante:

Soient $\beta, \beta' \in A(\delta_0)$ et $w \in W_{\delta_0}$; soit $r_{\beta,\beta'}$ l'unique élément de $\hat{R}_{\delta_0}$ tel que $r_{\beta,\beta'} \cdot \beta' = \beta$. L'opérateur $\mathscr{A}(w,\delta_0,0)$ est scalaire sur $I(\delta)^\beta$ et $I(\delta)^{\beta'}$. Le rapport de ces scalaires est égal à $r_{\beta,\beta'}(w)$.

Lemme 15. *Soient $\mu_0 \in A(\delta_0)$, μ le K-type minimal de $I(\delta)$ contenant μ_0 (cf. Lemme 11) et $X = \{\beta \in A(\delta_0) | \beta \subset \mu|_{K^\#}\}$. Alors:*

i) *L'ensemble X est égal à $R_\delta^\perp \cdot \mu_0$ où $R_\delta^\perp$ est l'orthogonal dans $\hat{R}_{\delta_0}$ de R_δ.*

(ii) $|R_{\delta_0}/R_\delta| \times |F/F'| = |R_{\mu_0}^\perp|$.

Démonstration. Montrons (i). Soient $\beta \in X$ et $w \in W_\delta$. D'après le Lemme 11 $\beta \subset \mu|_{K^\#}$ implique $I(\delta_0)^\beta \subset I(\delta)^\mu$. D'autre part $I(\delta_0)^{\mu_0} \subset I(\delta)^\mu$. Or $\mathscr{A}(w,\delta,0)$ est scalaire sur $I(\delta)^\mu$, puisque μ est contenu avec multiplicité 1 dans $I(\delta)$. Donc $r_{\beta,\mu_0}(w) = 1$. On vient donc de montrer que $X \subset R_{\mu_0}^\perp \cdot \mu_0$. Réciproquement, soit $\beta \in R_{\mu_0}^\perp \cdot \mu_0$. Alors pour tout $w \in W_\delta$, $r_{\beta,\mu_0}(w) = 1$ ce qui implique que $\mathscr{A}(w,\delta,0)$ prend la même valeur sur $I(\delta_0)^\beta$ et $I(\delta_0)^{\mu_0}$. Mais les opérateurs $\mathscr{A}(w,\delta,0)$, $w \in W_\delta$, engendrent le commutant de $\pi_{\delta,0}$. Donc $I(\delta_0)^\beta$ et $I(\delta_0)^{\mu_0}$ sont contenus dans le même $(\mathfrak{g},K)$-sous-module simple V de $I(\delta,0)$. Si $\delta|_{M^\S} = \bigoplus_{i=0}^n \delta_i$ avec $\delta_i \in (\hat{M}^\S)_d$, il résulte du Lemme 11 que

$$I(\delta)^\mu = \bigoplus_{i=0}^n \bigoplus_{\substack{\beta \in (\delta_i) \\ \beta \subset \mu|_{K^\#}}} I(\delta_i)^\beta.$$

Si $\beta \in A(\delta_i)$ pour un i, notons V_β le $(\mathfrak{g}, K)$-sous-module de $I(\delta_i, 0)$ engendré par $I(\delta_i)^\beta$. Alors:

$$V = \bigoplus_{i=0}^{n} \sum_{\substack{\beta \in A(\delta_i) \\ \beta \subset \mu|_{K^\#}}} V_\beta .$$

Or, d'après [15] Théorème 1.4 chaque V_β est simple et contient un seul $K^\#$-type minimal. On a donc:

$$V = \bigoplus_{i=0}^{n} \bigoplus_{\substack{\beta \in A(\delta_i) \\ \beta \subset \mu|_{K^\#}}} V_\beta .$$

Par suite, si $\beta \in A(\delta_0)$ apparaît dans V regardé comme $K^\#$-module, on voit que $\beta \subset \mu|_{K^\#}$. Finalement, on vient de voir que $\beta \in X$ implique $\beta \in R_\delta^\perp \cdot \mu_0$ ce qui achève de prouver (i).

Montrons (ii). Il résulte de (i) et du Lemme 11(iv) que le nombre de K-types contenus dans $\mu|_K$ est égal à $\sum_{i=0}^{n} |R_{\delta_i}/R_\delta|$, puisque $|R_{\delta_i}/R_\delta|$ est égal au cardinal de l'orthogonal de R_δ dans R_{δ_i}. D'autre part, d'après [15], Théorème 1.4 $|R_{\delta_i}| = |A(\delta_i)|$ pour tout i. Utilisant le Lemme 11(v) on en déduit que $|R_{\delta_i}| = |R_{\delta_0}|$ pour tout i. Donc $|X| = (n+1)|R_{\delta_0}/R_\delta|$. Mais, d'après le Lemme 10, $n+1 = |F/F'| = |R'|$. Donc $|X| = |R_{\delta_0}/R_\delta| \times |F/F'|$. Or, d'après [17], Proposition 5.1.9 a), $|X| = |R^G \cdot \mu_0| = |R^G/R_{\mu_0}| = |R_{\mu_0}^\perp|$. D'où l'égalité cherchée. □

Lemme 16. (i) *L'injection p du Lemme 13 est une bijection entre W_{δ_0}/W_δ et $R_{\mu_0}^\perp/\hat{R}'$.*

(ii) *La surjection canonique $W_{\delta_0}/W_\delta \to R_{\delta_0}/R_\delta \to 0$ est un isomorphisme et $W_\delta^0 = W_{\delta_0}^0$.*

Démonstration. D'après le Lemme 13 $|W_{\delta_0}/W_\delta| \leqq |R_{\mu_0}^\perp| \times |\hat{R}'|^{-1}$. D'autre part, $|W_{\delta_0}/W_\delta| \geqq |R_{\delta_0}/R_\delta|$. Or, d'après le Lemme 15 $|R_{\delta_0}/R_\delta| = |R_{\mu_0}^\perp| \times |R'|^{-1}$. Comme $|\hat{R}'| = |R'|$ on en déduit $|W_{\delta_0}/W_\delta| = |R_{\delta_0}/R_\delta| = |R_{\mu_0}^\perp| \times |\hat{R}'|^{-1}$ et p est bijective pour des raisons de cardinalité. Pour la même raison, la surjection canonique $W_{\delta_0}/W_\delta \to R_{\delta_0}/R_\delta$ est un isomorphisme. Par ailleurs, il résulte des définitions que le noyau de cet homomorphisme est égal à $(W_{\delta_0}^0 \cdot W_\delta)/W_\delta$. D'où $W_{\delta_0}^0 \subset W_\delta$ et l'égalité $W_{\delta_0}^0 = W_\delta^0$ résulte du Lemme 15. □

Corollaire du Lemme 16. *Le groupe W_{δ_0} agit par conjugaison sur W_δ et $R_{\delta_0}/R_\delta (\simeq W_{\delta_0}/W_\delta)$ agit sur $S(\mathfrak{a})^{W_\delta}$. En décomposant ce R_{δ_0}-module selon ses composantes isotypiques on a $S(\mathfrak{a})^{W_\delta} = \bigoplus_{r \in R_\delta^\perp} (S(\mathfrak{a})^{W_\delta^0})^r$.*

4.4. Nous pouvons maintenant procéder à la démonstration de la Proposition 1. On se fixe F vérifiant (i)$_r$ et (ii) et $\varepsilon > 0$.

Comme W est le groupe de Weyl d'un système de racines dans $\mathfrak{a}_0$ (cf. [9]), W est engendré par des réflexions. Alors il résulte de [13] que $S(\mathfrak{a})\mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r^W = \mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r$. En moyennant sous W_δ on en déduit

$$S(\mathfrak{a})^{W_\delta} \mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r^W = \mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r^{W_\delta} \quad \text{et a fortiori} \quad S(\mathfrak{a})^{W_\delta} \mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r^{W_{\delta_0}} = \mathscr{P}\mathscr{W}(\mathfrak{a}^*)_r^{W_\delta}.$$

Soient $\mu \in A(\delta)$, $\mu_0 \in A(\delta_0)$ avec $\mu_0 \subset \mu|_{K^*}$ (cf. Lemme 11(iv)), $F \in \mathscr{PW}(\mathfrak{a}^*)^{W^{\delta_0}}$ et $P \in (S(\mathfrak{a})^{W_\delta^0})^r$. Il résulte du corollaire du Lemme 16 et de ce qui précéde, qu'il suffit, pour démontrer la Proposition 1,de vérifier qu'il existe $f \in C_c^\infty(G)_{r+\varepsilon}^{\mu\mu}$ telle que $\langle \operatorname{trace} \pi_{\delta,\lambda}, f \rangle = P(\lambda) F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

D'après la Proposition 1 pour $G^\#$ (cf. Section 3), il existe $f_1 \in C_c^\infty(G^\#)_{r+\varepsilon}^{\mu_0\mu_0}$ telle que $\langle \operatorname{trace} \pi_{\delta_0,\lambda}, f_1 \rangle = F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Soit χ_μ le caractère normalisé de μ (i.e. $\chi_\mu(k) = (\dim \mu)$ trace $\mu(k)$) que l'on regarde comme distribution à support compact sur G. D'autre part $G^\#$ est ouvert et fermé dans G comme réunion d'un nombre fini de composantes connexes de G. En la prolongeant par 0 sur $G - G^\#$ on peut regarder f_1 comme un élément de $C_c^\infty(G)_{r+\varepsilon}$. On définit $f_2 = \bar{\chi}_\mu * f_1 * \bar{\chi}_\mu \in C_c^\infty(G)_{r+\varepsilon}^{\mu\mu}$.

Soit $\mu_1 = r \cdot \mu_0 \in A(\delta_0)$. D'après le Lemme 15(i), on a $\mu_1 \subset \mu|_{K^*}$. Alors $I(\delta_0)^{\mu_0}$, $I(\delta_0)^{\mu_1} \subset I(\delta)^\mu$ d'après le Lemme 11. Comme $R^G \simeq K/K^\#$ conjugue tous les $K^\#$-sous-modules simples de μ, on peut choisir $k_0 \in K$ tel que $\pi_{\delta,\lambda}(k)$ réalise un isomorphisme entre $I(\delta_0)^{\mu_0}$ et $I(\delta_0)^{\mu_1}$. En fait $\pi_{\delta,\lambda}(k)$ est indépendant de $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et on notera T l'isomorphisme entre $I(\delta_0)^{\mu_0}$ et $I(\delta_0)^\mu$ qu'il réalise. Alors d'après [5], Théorème 3(ii) et Proposition 3(iii) il existe $u \in U(\mathfrak{g})$ tel que $\pi_{\delta,\lambda}(u)|_{I(\delta_0)^{\mu_1}} = P(\lambda) T^{-1}$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

On définit alors $f = \bar{\chi}_\mu * u * (k_0 f_2)$ avec $(k_0 f_2)(g) = f_2(k_0^{-1} g)$ pour tout $g \in G$. Clairement f est un élément de $C_c^\infty(G)_{r+\varepsilon}^{\mu\mu}$. D'autre part, un calcul facile montre que $\pi_{\delta,\lambda}(f) = P(\lambda)\ (\pi_{\delta_0,\lambda}(f_1) \circ P_{\mu_0})$, où P_{μ_0} est le projecteur orthogonal de $I(\delta)$ sur $I(\delta_0)^{\mu_0}$. Alors $\langle \operatorname{trace} \pi_{\delta,\lambda}, f \rangle = P(\lambda)\ \langle \operatorname{trace} \pi_{\delta_0,\lambda}, f_1 \rangle$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, soit encore $\langle \operatorname{trace} \pi_{\delta,\lambda}, f \rangle = P(\lambda) F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et ceci achève la démonstration de la Proposition 1. □

Appendice: Transfert d'integrales orbitales de fonctions a support compact

L. Clozel

Le faisceau de conjectures qui constitute la «fonctorialité de Langlands» prévoit de nombreuses relations entre représentations admissibles (resp. automorphes) des groupes réductifs sur un corps local (resp. des groupes réductifs à valeurs dans les adèles d'un corps global). Dans le cas local, la théorie prévoit, par dualité, des relations entre intégrales orbitales de fonctions lisses à support compact; de telles relations seront d'ailleurs nécessaires à l'application de la formula des traces au cas global-voir l'exposé de Langlands [22].

Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$ (le cas de $\mathbb{C}$ s'y réduit par restriction des scalaires), de telles relations entre caractères et entre intégrales orbitales ont été démontrées par D. Shelstad dans trois cas de fonctorialité: formes intérieures [23], L-indiscernabilité [24], changement de base [25], la relation entre caractères dans ce dernier cas étant démontrée dans [21]. Mais Shelstad n'obtient des relations entre intégrales orbitales que pour des fonctions dans l'espace de Schwartz d'Harish-Chandra. L'objet de cet appendice est d'étendre ses résultats aux fonctions C^∞ à support compact et K-finies. Nous ne traitons que le cas des formes intérieures et de la L-indiscernabilité; le changement de base s'insèreradans un article ultérieur.

A.1. Notations et définitions

Si $\mathbf{G}$ est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, on note G le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ des $\mathbb{R}$-points de $\mathbf{G}$. Si $\mathbf{P}$ est un parabolique de $\mathbf{G}$, on note $\mathbf{P} = \mathbf{MN}$, $P = MN$ sa décomposition de Levi. (Remarquons que cette notation n'est pas conforme à celle du corps de l'article, où notre M était noté MA.) On notera $G={}^0GA_G$ la décomposition de Langlands de G; A_G est donc la composante neutre du tore déployé central maximal de G. On note ${}^LG={}^LG^0\times W_{\mathbb{R}}$ le L-groupe de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{R}$ (pour la théorie de Langlands dans le cas réel, cf. [24]); $W_{\mathbb{R}}$ est le groupe de Weil de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi\colon W_{\mathbb{R}}\to{}^LG$ une section du L-groupe, pertinente pour G («relevant for G» dans [24]). On associe à φ un *pseudo-L-paquet* (ou «L-paquet de séries principales généralisées») $\tilde{\Pi}_\varphi^G$ défini de la façon suivante. Soit ${}^LM\subset{}^LG$ un parabolique minimal parmi ceux qui factorisent φ; on a donc $\varphi\colon W_{\mathbb{R}}\to{}^LM\subset{}^LG$. La dualité associe à φ un L-paquet de séries discrètes de M, noté Π_φ^M: c'est une somme finie de représentations irréductibles de M. On définit alors:

$$\tilde{\Pi}_\varphi^G=\operatorname{ind}_{MN}^G\Pi_\varphi^M;$$

$\tilde{\Pi}_\varphi^G$ est donc une représentation de longueur finie de G, que nous considérons comme un élément du groupe de Grothendieck des représentations virtuelles de longueur finie modulo Jordan-Hölder. Si Π_φ^G est le L-paquet associé à φ, on a $\Pi_\varphi^G\subset\tilde{\Pi}_\varphi^G$ (dans le groupe de Grothendieck); on a égalité si φ est essentiellement tempérée.

Deux groupes G, H ont même L-groupe si et seulement si G est une forme intérieure de H. Dans ce cas, on peut identifier canoniquement certains sous-groupes de Cartan de G à des sous-groupes de Cartan de H. Si $T_G\xrightarrow{i}T_H$ est une telle identification, i est unique modulo conjugaison stable sur T_G et T_H ([23]). On dit que G est plus déployé que H si tout sous-groupe de Cartan de H s'identifie ainsi à un sous-groupe de G. Dans ce cas, tout parabolique de ${}^LG$ pertinent pour H l'est pour G.

Soit $T=\mathbf{T}(\mathbb{R})$ un sous-groupe de Cartan de G. Soit $\mathscr{D}(T)$ l'ensemble paramétrant la conjugaison stable sur T modulo conjugaison par G. Soit $\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$ le groupe dérivé de $\mathbf{G}$, $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}=\mathbf{T}\cap\mathbf{G}_{\mathrm{sc}}$, $X_*(\mathbf{T})$ et $X_*(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}})$ les groupes de caractères de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}_{\mathrm{sc}}$; σ_T, l'élément non trivial du groupe de Galois, opère sur $X_*(\mathbf{T})$ et $X_*(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}})$. Si κ est un caractère (peut-être non unitaire) sur $X_*(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}})/(X_*(\mathbf{T}_{\mathrm{sc}})\cap(1-\sigma_T)X_*(\mathbf{T}))$, κ définit une fonction, encore notée κ, sur $\mathscr{D}(T)$. Soit T_{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T. Si $f\in C_c^\infty(G)$, et si dt,dg sont des mesure de Haar sur G, T, on définit, pour $t\in T_{\mathrm{reg}}$:

$$\Phi_f^{(T,\kappa)}(t,dt,dg)=\sum_{\omega\in\mathscr{D}(T)}\kappa(\omega)\int_{G/T}f(gt\omega g^{-1})\,dg/dt.$$

Si $\kappa=1$, c'est l'intégrale orbitale stable de f sur T.

Soit H un groupe endoscopique pour G; on a donc H quasi-déployé et $\xi\colon{}^LH\to{}^LG$, injectif sur ${}^LH^0$ ([24]). Soit $\mathbf{G}^*\supset\mathbf{T}^*$ la forme quasi-déployée de $\mathbf{G}$ qui définit le L-groupe, avec son tore de référence. Si T est un sous-groupe de Cartan de G, une *pseudo-diagonalisation* de T est un morphisme $\eta\colon\mathbf{T}\to\mathbf{T}^*$ de la forme $\mathrm{Ad}(x)\circ\psi$ pour un $x\in\mathbf{G}^*(\mathbb{C})$; ψ est l'isomorphisme de base: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}^*$.

Sous ces hypothèses, Shelstad définit alors une famille $\mathscr{T}_H(G)$ de paires (T,η) où T est un sous-groupe de Cartan de G,η une pseudodiagonalisation de T; pour tout $(T,\eta)\in\mathscr{T}_H(G)$, il existe un isomorphisme naturel de T avec un sous-groupe de Cartan T_H de H. Soit $i\colon T_H\to T$ un tel isomorphisme. Si $i(t_H)=t$, $t\in T_{\mathrm{reg}}$, on dit que t_H *provient de* t via (T,η). L'élément t_H est alors unique à conjugaison stable (dans H) près. Si un tore T_H peut être ainsi obtenu, on dit que T_H *provient de* G. Si $(T,\eta)\in\mathscr{T}_H(G)$, la donnée endoscopique pour H définit une fonction κ sur $\mathscr{D}$ comme *supra*.

Si $\xi\colon{}^LH\to{}^LG$ est un plongement de L-groupes, on dit que ξ est *de type unitaire* s'il envoie, par composition, les sections tempérées: $W_{\mathbb{R}}\to{}^LH$ sur des sections tempérées.

Si $H,G\ldots$ est un groupe réductif, on notera $K_H,K_G\ldots$ un sous-groupe compact maximal. Enfin, G_{reg} est l'ensemble des éléments réguliers de G.

A.2. Resultats

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$, $G=G(\mathbb{R})$.

Théorème A.2. *Soit H une forme intérieure de G. On suppose G plus déployé que H.*

Soit $\varepsilon(G,H)=\varepsilon(G)\,\varepsilon(H)$ (cf. [23]). *Il existe alors des mesures de Haar dg sur G, dh sur H telles que:*

(i) *Si* $f_G \in C_c^\infty(G, K_G)$ *satisfait:*

$$\Phi_{f_G}^{(T,1)}(t, dt, dg) = 0, \qquad t \in T_{\mathrm{reg}},$$

pour tout $T \subset G$ *ne provenant pas de* H, *il existe* $f_H \in C_c^\infty(H, K_H)$ *telle que si* $T_H \xrightarrow{i} T$ *est une identification canonique, et* $dt_H = i^* dt$:

$$\Phi_{f_H}^{(T_H,1)}(t_H, dt_H, dh) = \varepsilon(G, H)\, \Phi_{f_G}^{(T,1)}(t, dt, dg). \tag{$*$}$$

(ii) *Réciproquement, si* $f_H \in C_c^\infty(H, K_H)$, *il existe* f_G *satisfaisant* $(*)$ *sur les tores provenant de* H, *et dont les intégrales orbitales stables sur les autres tores sont nulles.*

Un énoncé plus faible, dans le cas où les fonctions sont à décroissance rapide, se trouve dans Shelstad [23].

Théorème A.3. *Soit* H *un groupe endoscopique pour* G, G, ξ: ${}^L H \to {}^L G$ *un prolongement admissible. Soit* $\Delta_{(T,\eta)}$ *une famille de facteurs de transfert pour les intégrales orbitales sur* H *et* G ([24]). *Alors, pour tout* $f \in C_c^\infty(G, K_G)$, *il existe* $f_H \in C_c^\infty(H, K_H)$ *telle que,* dg, dh *étant normalisées comme en* [24], *et avec* $dt_H = i^* dt$:

$$\Phi_{f_H}^{(T_H,1)}(t_H, dt_H, dh) = \Delta_{(T,\eta)}(t)\, \Phi_{f_G}^{(T,\kappa)}(t, dt, dg)$$

si t_H *provient de* $t \in G_{\mathrm{reg}}$ *via* (T, η),

$$= 0 \text{ si } T_H \text{ ne provient pas de } G.$$

Le même énoncé pour f et f_H dans les espaces de Schwartz-Harish-Chandra de G, H est dû à Shelstad [24].

A.3. Démonstration

La démonstration du Théorème A.2. se fait suivant les mêmes lignes que celle du Théorème A.3.; A.2. résulte d'ailleurs de A.3. si G est quasi-déployé et donc endoscopique pour H. Nous bornerons à démontrer le Théorème A.3.

Nous avons besoin d'une forme stable du Théorème 1. Soit $G = {}^0 G A_G$ admettant une série discrète (modulo le centre). Si Π est un L-paquet de séries discrètes pour G, on a $\Pi = \bigoplus_i {}^0\pi_i \otimes \lambda$ où λ: $A_G \to \mathbb{C}^\times$ est un quasi-caractère et les ${}^0\pi_i$ sont l'ensemble des représentations de $({}^0 G)_d$ ayant un caractère central et infinitésimal donnés. On peut donc écrire $\Pi = {}^0\Pi \otimes \lambda$. Les pseudo-$L$-paquets de G (cf. A.1.) sont alors de la forme:

$$\pi_{\delta,\lambda} = \mathrm{ind}_{{}^0 M A_M N}^G (\delta \otimes \lambda \otimes 1)$$

où δ est de la forme ${}^0\Pi_M$, i.e. δ est la restriction à ${}^0 M$ d'un L-paquet discret pour M. Notons $\Pi_d({}^0 M)$ l'ensemble des sommes finies de représentation de la série discrète de ${}^0 M$ ainsi obtenues. Avec les mêmes notations que pour le Théorème 1, on a alors:

Théorème A.1. *Soit* F_i: $\Pi_d({}^0 M_i) \times \mathfrak{a}_i^* \to \mathbb{C}$.

Alors il existe $f \in C_c^\infty(G, K)$ *telle que* $F_i(\delta, \lambda) = \mathrm{trace}\, \Pi_{\delta,\lambda}(f)$ *si et seulement si:*

(i) $F_i(\delta, \lambda)$ est à support fini en δ

(ii) $\lambda \to F_i(\delta, \lambda)$ est de type Paley-Wiener quel que soit δ

(iii) $F_i(\delta, \lambda) = F_i(w\delta, w\lambda)$, $w \in W_i$.

Démonstration. Ceci résulte du Théorème 1. Il suffit évidemment d'exhiber f, les F_i étant données. Soit $\delta \in \Pi_d({}^0 M)$. Le nombre de composants de δ est $r = |W(M_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}})/W(M, H)|$ où H est un sous-groupe de Cartan, compact modulo A_M, de M (cf. e.g. [21, §7]). Soit $\delta = \delta_1 \otimes \ldots \otimes \delta_r$; si $M = M_i$, définissons alors

$$F_i'(\delta_j, \lambda) = \frac{1}{r} F_i(\delta, \lambda).$$

Les fonctions F_i' sont alors définies sur $(\widehat{{}^0M_i})_d \times \mathfrak{a}^*$. Je dis qu'elles satisfont les conditions du Théorème 1. Il suffit évidemment de vérifier (iii).

C'est clair car si δ_0, représentation de la série discrète de ${}^0M_i$, se plonge dans $\delta \in \Pi_d({}^0M_i)$, $w\delta_0$ se plonge dans $w\delta$ et il suffit alors d'utiliser l'hypothèse (iii) du Théorème A.1. Donc il existe $f \in C_c^\infty(G,K)$ ayant pour transformées de Fourier les F_i'; on en déduit que ses transformées de Fourier stables sont bien les F_i. □

Nous démontrons maintenant le Théorème A.3. On a indiqué dans le § A.1. comment associer un pseudo-L-paquet de représentations de H à une section $\varphi_H\colon w_{\mathbb{R}} \to {}^LH$. On vérifie facilement que deux pseudo-L-paquets ont le même caractère si et seulement leurs sections sont conjugées par ${}^LH^0$.

Soit alors $\varphi\colon W_{\mathbb{R}} \to {}^LG$ obtenue en composant φ_H avec le plongement ξ. Si φ_H est tempérée, Shelstad définit alors un «caractère du L-paquet», $\varepsilon\colon \Pi_\varphi^G \to \{\pm 1\}$, ayant la propriété suivante: si f, f_H dans les espaces de Schwartz de G, H respectivement sont associées au sens du Théorème A.3., on a, en notant Θ_π le caractère d'une représentation, et Θ_{φ_H} le caractère de $\Pi_{\varphi_H}^H$:

$$(**)\quad \langle \Theta_{\varphi_H}, f_H\rangle = \left| \begin{array}{l} \sum_{\pi\in\Pi_\varphi^G} \langle \varepsilon(\pi)\,\Theta_\pi, f\rangle \text{ si } \varphi \text{ est pertinente pour } G \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

(Shelstad [24, Théorème 4.1.1.]).

Lemme A.4. *Soit $f \in C_c^\infty(G, K_G)$. Alors il existe $f_H \in C_c^\infty(H, K_H)$ vérifiant* (**) *pour toutes les sections tempérées φ_H de ${}^LH$.*

Démonstration. Nous allons bien sûr appliquer le Théorème A.1. Pour ceci, il nous faut étendre le membre de droite de (**) aux sections φ provenant de φ_H non tempérée. Soit donc $\varphi_H\colon W_{\mathbb{R}} \to {}^LH$. On suppose que φ_H est une section discrète pour un radical de Levi de parabolique ${}^LM_H \subset {}^LH$. Il existe alors un sous-groupe de Levi ${}^LM_G$ de ${}^LG$ tel que le tore elliptique T_H de M_H provienne d'un tore de $M_{G^*} \subset G^*$, et que ${}^LM_H \subset {}^LM_G$; si φ est pertinent pour G, on peut prendre ${}^LM_G$ pertinent pour G, d'où $M_G \subset G$. Si l'on tord $\tilde{\Pi}_{\varphi_H}^H$ par un caractère de H, ce qui revient à multiplier φ_H par un élément de $H^1(W_{\mathbb{R}}, Z({}^LH))$, les données ${}^LM_H$, ${}^LM_G$, et M_G s'il y a lieu, ainsi que le fait que φ est ou non pertinente, ne changent pas. Si φ est pertinente pour G, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & {}^LM_H \arrow[r, hook] \arrow[d] & {}^LH \arrow[d, "\xi"] \\ W_{\mathbb{R}} \arrow[ur, "\text{(discrète)}"] \arrow[r] & {}^LM_G \arrow[r, hook] & {}^LG \end{tikzcd}$$

(pour ce qui précéde, voir [24, p. 412]).

Dans ce cas, la section $W_{\mathbb{R}} \to {}^LM_G$ passe par le L-groupe d'un tore elliptique de ${}^LM_G$, et détermine donc un L-paquet de représentations de M_G formé de limites de série discrète ([24, p. 406]).

A la section φ_H est associé un L-paquet discret pour M_H; soit $M_H = {}^0M_H A(M_H)$: ce L-paquet est donc, suivant la description donnée dans le § A.3, de la forme ${}^0\delta \otimes \lambda$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*(M_H)$, ${}^0\delta$ une somme finie de séries discrètes de ${}^0M_H$. Par ailleurs, M_H et M_G ont un tore elliptique en commun; comme ils ont le même tang, ils ont même rang déployé. Supposons ξ *de type unitaire:* a on peut s'y ramener en le tordant par un élément de $H^1(W_{\mathbb{R}}, Z({}^LH))$, ce qui revient à multiplier f_H par un quasi-caractère de H. On peut alors fixer un isomorphisme $A(M_H) \cong A(M_G)$ de telle façon que, si φ_H est associée à ${}^0\delta \otimes \lambda (\lambda \in \mathfrak{a}^*(M_H))$, $\varphi = \xi_0 \varphi_H$ est associée à la représentation ${}^0\delta^G \otimes (\lambda + \lambda_\xi)$, où ${}^0\delta^G$ est une somme finie de limites de série discrète pour ${}^0M_G$, et $\lambda_\xi \in \mathfrak{a}_0(M_G)$ est un paramètre unitaire associé à ξ (Shelstad [24, 3.3. et 4.4.].

Si φ est pertinente, le pseudo-L-paquet $\tilde{\Pi}_\varphi^G$ est alors la somme (avec multiplicité) des constituants de l'induite (on a posé $M^G = {}^0M^G A(M^G) N$):

$$\mathrm{ind}_{{}^0M^G A(M^G) N}^G ({}^0\delta^G \otimes \lambda \otimes 1) = \sum_i \mathrm{ind}_{{}^0M^G A(M^G) N}^G (\delta_i \otimes \lambda \otimes 1).$$

où l'on a posé ${}^0\delta^G = \bigoplus \delta_i$, et où, pour simplifier, λ remplace $\lambda + \lambda_\xi$. Pour λ unitaire, on a alors $\mathrm{ind}(\delta_i \otimes \lambda \otimes 1) = \bigoplus_{j=1}^{n_i} \pi_{i,j}$. Le facteur ε est stable par induction, c'est à dire qu'il existe un facteur ε_M:

$\Pi_\varphi^{M_G} \to \{\pm 1\}$ tel que $\varepsilon(\pi_{ij}) = \varepsilon_M(\delta_i)$ pour tout j $j=1, \ldots, n_i$ ([24, 4.4.3, 4.4.10, 4.5.1]). Dans le domaine non-unitaire, nous définissons de même $\varepsilon(\pi) = \varepsilon_M(\delta_i)$ si π est un sous-quotient de ind $(\delta_i \otimes \lambda)$;

la fonction
$$\varphi_H \to \sum_{\pi \in \tilde{\Pi}_\varphi^G} \langle \varepsilon(\pi)\, \Theta_\pi, f \rangle, \quad \varphi \text{ pertinente pour } G$$
$$0 \text{ sinon,}$$

est définie pour tout φ_H, et prolonge l'expression définie pour les sections tempérées.

Etant donnée $f \in C_c^\infty(G, K_G)$, nous voulons maintenant vérifier que le membre de droite de (**), étendu ainsi aux φ_H non-tempérées, satisfait les conditions du Théorème A.1. La condition (iii) est évidente: si $(\delta_1, \lambda_1) = w(\delta, \lambda)$, les pseudo-$L$-paquets correspondants ont le même caractère, donc les sections φ_H^1 et φ_H sont conjuguées par ${}^L H^0$. A fortiori, les sections φ et φ^1 correspondantes sont conjuguées dans ${}^L G^0$, et le membre de droite pour φ et φ^1 (qu'il soit ou non nul) a la même valeur.

Il est clair aussi que la condition (ii) est vérifiée: si φ_H est associée à $\mathrm{ind}({}^0\delta \otimes \lambda \otimes 1)$, φ est associée, on l'a vu, à $\mathrm{ind}({}^0\delta^G \otimes (\lambda + \lambda_\xi) \otimes 1)$, ou bien φ n'est pas pertinente, et ceci indépendamment de λ. Il est clair que, dans le premier cas, le membre de droite de (**), étendu comme on l'a fait au domaine non-unitaire, est de type Paley-Wiener en $\lambda \in \mathfrak{a}^*(M_H) \cong \mathfrak{a}^*(M_G)$, cela résulte du Théorème 1. Dans les deux cas, on obtient une fonction de type Paley-Wiener.

Il reste à vérifier la condition (i). Nous devons montrer que, si f est K_G-finie, l'expression $\sum_{\pi \in \tilde{\Pi}_\varphi^G} \varepsilon(\pi) \langle \Theta_\pi, f \rangle$ ne peut être non-nulle que pour un nombre fini de φ_H modulo torsion par les caractères de la composante déployée de H. Si l'on fixe comme ci-dessus ${}^L M_H$, et que l'on suppose φ_H discrète pour M_H, d'où la représentation ${}^0\delta$ de ${}^0 M_H$, il faut montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour ${}^0\delta$. On a vu que, sous ces conditions, la décomposition ${}^0\delta^G = \oplus \delta_i$ induit une décomposition $\tilde{\Pi}_\varphi^G = \bigoplus_{i,j} \pi_{ij}$.

Par réciprocité de Frobenius, on voit alors que si $\tilde{\Pi}_\varphi^G$ recontre un ensemble fixe, fini, de K_G-types, il existe un ensemble fixe, fini, de K_M-types, rencontrant au moins l'un des δ_i; comme les δ_i sont des limites de série discrète pour ${}^0 M_G$, on en déduit que les δ_i sont dans un ensemble fini déterminé par f, à l'aide du lemme suivant:

Lemme A.5. *Soit H un groupe réductif réel ayant un nombre fini de composantes connexes et contenant un sous-groupe de Cartan compact. Soit F un ensemble fini de K_H-types. Alors l'ensemble des limites de série discrète pour H contenant un K_H-type de F est fini.*

Démonstration. On se ramène à H connexe. Il satisfait donc aux hypothèses de Vogan [15, Lemma 7.3] dont on utilise les notations. Soit T un sous-groupe de Cartan compact, $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{t})$ le système de racines associé. Une limite de série discrète est de la forme $\Theta(\Psi, \lambda)$, avec Ψ un système de racines positives pour $\Delta(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}), \lambda$ dominant pour $\Psi, \lambda + \rho \in \hat{T}$ où ρ est la demi-somme des racines de Ψ. Il suffit de considérer un Ψ fixé. Les K_H-types de $\Theta(\Psi, \lambda)$ sont de la forme $\mu + \mathrm{Q}$, $\mu = \lambda + \rho - 2\rho_c, Q$ une somme de racines positives. Donc:

$\mu + Q \in F \Rightarrow \lambda + \rho - 2\rho_c + Q \in F \Rightarrow \lambda \in (F - \rho + 2\rho_c - Q) \cap \bar{C} \cap \hat{T}$, où $\bar{C}$ est la chambre de Weyl positive associée à Ψ. Mais cette intersection est un ensemble fini. □

Ceci démontre donc le Lemme A.4. □

Revenons au Théorème A.3. D'après le théorème de Shelstad, il existe une fonction $f_H^1 \in \mathscr{C}(H)$, l'espace de Schwartz de H, satisfaisant aux conditions requises (au moins si ξ est de type unitaire. On s'y ramènera en tordant par un caractère de H).

Les traces de f_H^1 dans les L-paquets tempérés satisfont alors les identités (**) avant le Lemme A.4. Celui-ci implique qu'il existe une fonction $f_H \in C_c^\infty(H, K_H)$ satisfaisant les mêmes relations. On en déduit que, pour tout L-paquet tempéré Π^H de représentations de H,

$$\sum_{\pi \in \Pi^H} \langle \mathrm{trace}\, \pi, f_H - f_H^1 \rangle = 0.$$

Il ne nous reste qu'à citer le théorème suivant, dû à Shelstad [23]:

Théorème A.4 (Shelstad). $\mathbf{G}$ *réductif connexe sur* $\mathbb{R}, G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$. *Soit* $\mathscr{C}(G)$ *l'espace de Schwartz-Harish-Chandra de* G. *Alors, si* $f \in \mathscr{C}(G)$, *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Les intégrales orbitales stables de* f, *sur les éléments réguliers, sont nulles:* $\Phi_f^{(T,1)}(t, dt, dg) \equiv 0$, $t \in T_{\text{reg}}$, *pour tout sous-groupe de Cartan* $T \subset G$.

(ii) *Les traces de* f *dans les L-paquets tempérés sont nulles: trace* $\pi(f) = 0$ *pour tout L-paquet tempéré* π.

Le Théorème A.4 implique que les intégrales orbitales stables de f_H et f_H^1 coïncident. Par conséquent, celles de f_H vérifient les identités du Théorème A.3. Ceci termine la démonstration. □

Bibliographie

1. Arthur, J.: A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, à paraître dans Acta Math.
2. Arthur, J.: Multipliers and a Paley-Wiener theorem for real reductive groups, a paraître dans Conférence d'analyse harmonique. Salt Lake City: Birkhauser 1982
3. Borel, A., Wallach, N.: Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Ann. of Math. Studies, vol. 94, Princeton U.P. 1980
4. Delorme, P.: Multipliers for the convolution algebra of left and right K-finite compactly supported smooth functions on a semi-simple Lie group. Invent. Math. **75**, 9–24 (1984)
5. Delorme, P.: Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes réductifs réels connexes (preprint) – Faculté des Sciences Marseille-Luminy
6. Delorme, P.: Théorème de Type Paley-Wiener pour les groupes de Lie semi-simples réels avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan. J. Funct. Ana. **47**, 26–63 (1982)
7. Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups, I. J. Funct. Anal. **19**, 104–204 (1975)
8. Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups, III. Ann. of Math. **104**, 117–201 (1976)
9. Knapp, A.: Weyl group of a cuspidal parabolic. Ann. Sc. E.N.S., 4e série **8**, 275–294 (1975)
10. Knapp, A.: Commutativity of intertwining operators for semi-simple groups. Compositio Math. **46**, 33–84 (1982)
11. Knapp, A., Stein, E.: Intertwining operators for semisimple groups, II. Invent. Math. **60**, 9–84 (1980)
12. Knapp, A., Zuckerman, G.: Classification of irreducible tempered representations of semi-simple groups. Ann. of Math. **116**, 389–501 (1982)
13. Raïs, M.: Action de certains groupes dans des espaces de fonctions C^∞, in: Non-Commutative Harmonic Analysis. Lecture Notes in Math., vol. 466, pp. 147–150. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
14. Varadarajan, V.S.: Harmonic analysis on real reductive groups. Lecture Notes in Math., vol. 576. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
15. Vogan, D.: The algebraic structure of the representations of semi-simple Lie Groups I. Ann. of Math. **109**, 1–60 (1979)
16. Vogan, D.: The algebraïc structure of the representations of semi-simple Lie groups II. Preprint M.I.T.
17. Vogan, D.: Representations of real reductive Lie groups. Progress in Math. Boston: Birkhäuser 1981
18. Wallach, N.: Representations of reductive Lie groups. In: Proc. of Symposia in Pure Math. **33**, (1) AMS, 1979
19. Wallach, N.: On the Selberg trace formula in the case of compact quotient. Bull. A.M.S. **82**, 171 (1976)
20. Zelobenko, D.P.: Analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples complexes. Mir. Moscow, 1974 (en russe)

21. Clozel, L.: Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels. Ann. Sc. E.N.S. (4) **15**, 45–115 (1982)
22. Langlands, R.P.: Les débuts d'une formule des traces stable, Publications mathématiques de l'université Paris VII (1983)
23. Shelstad, D.: Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$. Compositio Math. **39**, 11–45 (1979)
24. D. Shelstad: L-indistinguishability for real groups, Math. Ann. **259**, 385–430 (1982)
25. Shelstad, D.: Endoscopic groups and base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. Pacific Journ. Math. **110** (2), 397–416 (1984)

Oblatum 20-V-1983