THÉORIE DES GROUPES. — *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes de Lie réductifs réels.* Note de **Laurent Clozel** et **Patrick Delorme**, présentée par Pierre Deligne.

Nous prouvons l'existence d'une fonction à support compact sur un groupe de Lie réductif, dont la trace dans toute représentation admissible est la caractéristique d'Euler-Poincaré de celle-ci.

GROUP THEORY. — Pseudo-coefficients and cohomology of real reductive Lie groups.

On a reductive Lie group, we exhibit a compactly-supported function whose trace gives the Euler-Poincaré characteristic of any admissible representation.

1. Énoncé des résultats. — Soit G un groupe de Lie réductif réel vérifiant les hypothèses de [1], §1 : c'est le cas en particulier si $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ pour un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{R}$. Nous supposons de plus que G a une série discrète. Nous allons donner une démonstration directe du résultat suivant, qui dans une Note précédente [2] était déduit du théorème de Paley-Wiener pour G, sous des hypothèses plus restrictives. (Les notations et définitions auxiliaires sont celles de [2].)

Proposition 1.1. — *Soit δ_0 une représentation de G appartenant à la série discrète. Alors, pour tout $r > 0$, il existe $f \in C_c^\infty(G, K)_r$ telle que :*

(i) trace $\delta_0(f) = 1$;

(ii) trace $\pi_{\delta,\lambda}(f) = 0$ *pour toute représentation basique $\pi_{\delta,\lambda}$ de G différente de δ_0.*

Rappelons qu'une telle fonction est appelée *pseudo-coefficient* de σ_0.

Ce résultat a la conséquence suivante, qui nous a été suggérée par J.-P. Labesse. Notons $H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$ le *i*-ième espace de cohomologie relative de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ à valeurs dans le $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module π (*cf.* Borel-Wallach [3], chap. 1).

Cet espace est de dimension finie. Soit :

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi),$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré associée.

Théorème 1.2. — *Soit ξ une représentation de dimension finie de G :*

(i) *Si G n'a pas de série discrète, on a* $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi) = 0$ *pour tout $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module de longueur finie π.*

(ii) *Si G a une série discrète, il existe, pour tout $r > 0$, une fonction $f_\xi \in C_c^\infty(G, K)_r$ telle que, pour tout $(\mathfrak{g}, K)$-module de longueur finie π de G :*

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi \otimes \xi) = \mathrm{trace}\, \pi(f_\xi).$$

Dans le paragraphe suivant, nous démontrons la proposition 1.1. Dans le paragraphe 3, nous prouvons le théorème 1.2.

2. Existence de pseudo-coefficients. — Nous allons démontrer la proposition 1.1.

Tout d'abord, d'après le résultat principal de [1], nous pouvons trouver une fonction $f_1 \in C_c^\infty(G, K)_r$ vérifiant :

(i) trace $\delta_0(f_1) = 1$,

(ii)' trace $\pi_{\delta,\lambda}(f_1) = 0$ pour toute représentation basique $\pi_{\delta,\lambda} \neq \delta_0$, avec δ appartenant à la série discrète de M_i.

0249-6321/85/03000385 \$ 2.00 © Académie des Sciences

THÉORIE DES GROUPES. — *Pseudo-coefficients et cohomologie des groupes de Lie réductifs réels.* Note de **Laurent Clozel** et **Patrick Delorme**, présentée par Pierre Deligne.

Nous prouvons l'existence d'une fonction à support compact sur un groupe de Lie réductif, dont la trace dans toute représentation admissible est la caractéristique d'Euler-Poincaré de celle-ci.

GROUP THEORY. — Pseudo-coefficients and cohomology of real reductive Lie groups.

On a reductive Lie group, we exhibit a compactly-supported function whose trace gives the Euler-Poincaré characteristic of any admissible representation.

1. Énoncé des résultats. — Soit G un groupe de Lie réductif réel vérifiant les hypothèses de [1], § 1 : c'est le cas en particulier si $G = \mathbf{G}(\mathbb{R})$ pour un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{R}$. Nous supposons de plus que G a une série discrète. Nous allons donner une démonstration directe du résultat suivant, qui dans une Note précédente [2] était déduit du théorème de Paley-Wiener pour G, sous des hypothèses plus restrictives. (Les notations et définitions auxiliaires sont celles de [2].)

Proposition 1.1. — *Soit δ_0 une représentation de G appartenant à la série discrète. Alors, pour tout $r>0$, il existe $f \in C_c^\infty(G, K)_r$ telle que :*

(i) trace $\delta_0(f)=1$;

(ii) trace $\pi_{\delta,\lambda}(f)=0$ *pour toute représentation basique* $\pi_{\delta,\lambda}$ *de* G *différente de* δ_0.

Rappelons qu'une telle fonction est appelée *pseudo-coefficient* de σ_0.

Ce résultat a la conséquence suivante, qui nous a été suggérée par J.-P. Labesse. Notons $H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$ le *i*-ième espace de cohomologie relative de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ à valeurs dans le $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module π (*cf.* Borel-Wallach [3], chap. 1).

Cet espace est de dimension finie. Soit :

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi),$$

la caractéristique d'Euler-Poincaré associée.

Théorème 1.2. — *Soit ξ une représentation de dimension finie de* G :

(i) *Si* G *n'a pas de série discrète, on a* $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi\otimes\xi)=0$ *pour tout* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-module de longueur finie* π.

(ii) *Si* G *a une série discrète, il existe, pour tout $r>0$, une fonction $f_\xi \in C_c^\infty(G, K)_r$ telle que, pour tout* $(\mathfrak{g}, K)$*-module de longueur finie* π *de* G :

$$\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi\otimes\xi) = \mathrm{trace}\,\pi(f_\xi).$$

Dans le paragraphe suivant, nous démontrons la proposition 1.1. Dans le paragraphe 3, nous prouvons le théorème 1.2.

2. Existence de pseudo-coefficients. — Nous allons démontrer la proposition 1.1.

Tout d'abord, d'après le résultat principal de [1], nous pouvons trouver une fonction $f_1 \in C_c^\infty(G, K)_r$ vérifiant :

(i) trace $\delta_0(f_1)=1$,

(ii)' trace $\pi_{\delta,\lambda}(f_1)=0$ pour toute représentation basique $\pi_{\delta,\lambda}\neq\delta_0$, avec δ appartenant à la série discrète de M_i.

0249-6321/85/03000385 $ 2.00

Si G n'a pas de série discrète, les $\pi_{\delta,\lambda}$ associés aux paraboliques propres forment une base pour les caractères, et ceci démontre donc la partie (i) du théorème. Supposons que G a une série discrète. Alors, d'après ce qui précède, $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi\otimes\xi)$ est nul pour π basique, à moins que π ne soit une limite de série discrète pour G. Celle-ci doit alors, d'après le lemme de Wigner, avoir même caractère infinitésimal que ξ^*. Comme le caractère infinitésimal d'une représentation de dimension finie est régulier, π doit donc appartenir à la série discrète. Autrement dit, $\mathrm{ep}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi\otimes\xi)$ n'est non nul que si π est une représentation de la série discrète de même caractère infinitésimal que ξ^*. Mais alors, une combinaison linéaire de fonctions données par le corollaire 0.2 résout le problème.

Remarquons que le même raisonnement s'appliquerait, si G n'est pas connexe, à la $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie ([3], chap. 1, § 5). Si G a un centre C non compact, mais a des représentations de carré intégrable modulo le centre, un théorème analogue à la partie (ii) se démontre pour des représentations de caractère central χ fixé; il faut alors prendre une fonction f à support compact modulo C et se transformant sous C selon χ^{-1}.

Remise le 28 janvier 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. CLOZEL et P. DELORME, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, *Inv. Math.* (à paraître).

[2] L. CLOZEL et P. DELORME, *Comptes rendus*, 300, série I, 1985, p. 331-334.

[3] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Princeton University Press, 1980.

L. C. : *Princeton University, Department of Mathematics, Fine Hall-Box* 37, *Princeton N.J.* 08544, *U.S.A.*;

P. D. : *Faculté des Sciences de Luminy, Département de Mathématiques-Informatique, L.A.* n° 255 *du C.N.R.S.*, 70, *route Léon-Lachamp*, 13288 *Marseille Cedex* 9.