INJECTION DE MODULES SPHERIQUES

POUR LES ESPACES SYMETRIQUES REDUCTIFS

DANS CERTAINES REPRESENTATIONS INDUITES

par Patrick DELORME (*)

Avec un appendice d'Erik van den BAN (* *) et Patrick DELORME.

0. INTRODUCTION.

Soit G un groupe réel réductif dans la classe de Harish Chandra (cf. [H.C.]), σ une involution de G et H un sous-groupe ouvert du groupe G^{σ} des points fixes de σ. Soit θ une involution de Cartan de G commutant à σ (cf. [v.d.B], prop. 1.1) et soit K le groupe des points fixes de θ. C'est un sous-groupe compact maximal de G, σ - stable. Soit $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de G. Dans cet article on appellera $\underline{g}$ - module H - sphérique un sous $(\underline{g}, K)$ - module admissible de longueur finie (en abrégé G - module de Harish Chandra) de $C^{\infty}(G/H)$, ou, ce qui revient au même, d'après [v.d.B, D], la donnée d'un G - module de Harish Chandra et d'un vecteur dans son dual algébrique, fixé par $K \cap H$ et l'algèbre de Lie $\underline{h}$ de H.

Nous établissons pour les modules H - sphériques irréductibles des résultats analogues aux premières étapes de la classification de Langlands des G - modules simples. Pour cela, nous utilisons les propriétés asymptotiques des fonctions K - finies et $Z(\underline{g})$ - finies de $C^{\infty}(G/H)$, établies dans [v.d.B]. Ici $Z(\underline{g})$ est le centre de l'algèbre enveloppante de $\underline{g}$. Nous établissons (th. 1) un analogue du théorème du sous-module de Casselman, résultat annoncé il y a plusieurs années par Oshima (cf. [O_{*}], prop. 12). Puis nous montrons (Corollaire du théorème 3) que tout module H - sphérique peut être réalisé comme sous-module d'une induite $\operatorname{Ind}_{MAN \uparrow G} \delta \otimes e^{\lambda} \otimes 1_N$ d'un sous-groupe parabolique $P = MAN$ de G vérifiant les propriétés suivantes :

$L = MA$ est un sous-groupe de Levi de P, σ et θ stable, A est le sous-groupe vectoriel du centre de L constitué des éléments g de celui-ci vérifiant $\theta(g) = g^{-1}$, $\sigma(g) = g^{-1}$ et N le radical unipotent de P ; en outre, δ est une sous-représentation irréductible de $L^2(M/M \cap H)$ (série discrète de l'espace symétrique $M/M \cap H$) et λ une forme linéaire sur $\underline{a} = \text{Lie } A$ tel que $\text{Re } \lambda$ soit dans la fermeture de la chambre de Weyl négative déterminée par les racines de $\underline{a}$ dans $\underline{n} = \text{Lie } N$. Au passage nous montrons que les représentations H-sphériques irréductibles tempérées peuvent être réalisées comme sous-représentations d'une induite du type précédent avec λ unitaire (résultat déjà annoncé par Oshima). Ceci fait l'objet du théorème 2.

Nos démonstrations doivent beaucoup à l'article de Hecht et Schmid ([H.S.]) ainsi qu'à l'article de Carmona ([Car]).

En outre nous utilisons un résultat d'extension de fonctions analytiques de A à G tout entier. Ce résultat est une conséquence de l'appendice qui est un travail commun avec Erik van den Ban.(*)

1. NOTATIONS.

1.1

Si V est un espace vectoriel, on notera V^* son dual. Si V est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié, $S(V)$ l'algèbre symétrique de $V_{\mathbb{C}}$ que l'on identifie aux fonctions polynomiales sur V^* lorsque V est de dimension finie.

Si S est un groupe de Lie réel, S^0 désignera sa composante neutre, $\underline{s}$ son algèbre de Lie, $U(\underline{s})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\underline{s}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{s}$ et $Z(\underline{s})$ le centre de $U(\underline{s})$. On notera $s \to L_s$ (resp. $s \to R_s$) la représentation régulière gauche (resp. droite) de S et $X \to L_X$ (resp. $X \to R_X$) la représentation de $U(\underline{s})$ obtenue par différentiation.

(*) voir note après la bibliographie de l'article.

Si S est un groupe compact, on notera $\hat{S}$ son dual unitaire. Si $\delta \in \hat{S}$ et (μ , E) est une représentation de S, on notera E^{δ} la composante isotypique de type δ et E^{S} les invariants de E sous S. Enfin, si X est un espace muni d'une action de S on appellera fonction μ - sphérique sur X toute fonction f sur X à valeurs dans E telle que :

$$\forall x \in X \ , \forall s \in S \ , \ f(s \, . \, x) = \mu(s) f(x) \ .$$

1.2

On retient les notations de l'introduction. Soit $\underline{p}$ (resp. $\underline{q}$) le sous-espace propre pour la valeur propre -1 de l'endomorphisme θ (resp. σ) de $\underline{g}$. On note $\underline{c}$ le centre de $\underline{g}$ et $\underline{g}_1 = [\underline{g}, \underline{g}]$. On fixe une forme bilinéaire B sur $\underline{g}$, négative définie sur $\underline{k}$ et positive définie sur $\underline{p}$, qui coïncide avec la forme de Killing sur $\underline{g}_1$ et telle que $\underline{g}_1$ et $\underline{c}$ soient orthogonaux.

Soit $\underline{a}_{\emptyset}$ un sous-espace abélien maximal de $\underline{p} \cap \underline{q}$. On note $\underline{g}_{\sigma\theta} = \underline{k} \cap \underline{h} \oplus \underline{p} \cap \underline{q}$ i.e. $\underline{g}_{\sigma\theta}$ est l'ensemble des points fixes de l'involution $\sigma\theta$ de $\underline{g}$. On note $\Delta_{\sigma\theta}$ (resp. $\Delta = \Delta(\underline{g}, \underline{a}_{\emptyset})$) l'ensemble des racines de $\underline{a}_{\emptyset}$ dans $\underline{g}_{\sigma\theta}$ (resp. $\underline{g}$). Pour $\alpha \in \Delta$, le sous-espace radiciel correspondant est noté $\underline{g}^{\alpha}$. Il est stable par σ et θ et l'on note $\underline{g}_{+}^{\alpha}$ (resp. $\underline{g}_{-}^{\alpha}$) le sous-espace propre de l'endomorphisme $\sigma\theta$ de $\underline{g}^{\alpha}$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1). On a $\alpha \in \Delta_{\sigma\theta}$ si et seulement si $\underline{g}_{+}^{\alpha} \neq 0$ et en général $\underline{g}_{+}^{\alpha} = \underline{g}_{\sigma\theta} \cap \underline{g}^{\alpha}$. Notez que $\Delta_{\sigma\theta}$ est le système de racines de $(\underline{g}_{\sigma\theta}, \underline{a}_{\emptyset})$ puisque $\underline{a}_{\emptyset}$ est un sous-espace de Cartan de $\underline{g}_{\sigma\theta}$. On se fixe une fois pour toutes un ensemble de racines positives $\Delta_{\sigma\theta}^{+}$ de $\Delta_{\sigma\theta}$. On définit $\underline{a}_{\emptyset}^{-}$ la chambre de Weyl négative correspondante i.e. $\underline{a}_{\emptyset}^{-} = \{H \in \underline{a}_{\emptyset} | \alpha(H) < 0, \forall \alpha \in \Delta_{\sigma\theta}^{+}\}$.

On rappelle que l'application de $K \times (\underline{p} \cap \underline{q}) \times (\underline{p} \cap \underline{h})$ dans G définie par $(h, X, Y) \to k \exp X \exp Y$ est un difféomorphisme sur G . En outre, pour tout $X \in \underline{p} \cap \underline{q}$, il existe Y dans $\mathrm{cl}\ \underline{a}_{\emptyset}^{-}$ (fermeture de $\underline{a}_{\emptyset}^{-}$) tel que $X = \mathrm{Ad}\, k\, Y$ pour un $k \in K \cap H^0$. Enfin, pour tout $g \in G$, il existe un unique $a \in \exp \underline{a}_{\emptyset}^{-}$ tel que $g \in K a H^0$ (cf. [v.d.B.], prop. 1.3 et cor. 1.4).

On note $\underline{\ell}_{\emptyset}$ le centralisateur de $\underline{a}_{\emptyset}$ dans $\underline{g}$. On a $\underline{\ell}_{\emptyset} = \underline{\ell}_{\emptyset,kq} \oplus \underline{\ell}_{\emptyset,kh} \oplus \underline{a}_{\emptyset} \oplus \underline{\ell}_{\emptyset,ph}$, où $\underline{\ell}_{\emptyset,kq} = \underline{\ell}_{\emptyset} \cap \underline{k} \cap \underline{q}$, etc... C'est une algèbre de Lie réductive qui contient $\underline{a}_{\emptyset}$ dans son centre. Montrons que $\underline{m}_{\emptyset} = \underline{\ell}_{\emptyset,kq} \oplus \underline{\ell}_{\emptyset,kh} \oplus \underline{\ell}_{\emptyset,ph}$ est une sous-algèbre de $\underline{\ell}_{\emptyset}$. Le seul point non trivial est que : $[\underline{\ell}_{\emptyset,kq}, \underline{\ell}_{\emptyset,ph}] \subset \underline{m}_{\emptyset}$. Mais on a : $[\underline{\ell}_{\emptyset,kq}, \underline{\ell}_{\emptyset,ph}] \subset \underline{\ell}_{\emptyset,pq} = \underline{a}_{\emptyset}$. Or $\underline{\ell}_{\emptyset}$ est réductive et $\underline{a}_{\emptyset}$ dans le centre de $\underline{\ell}_{\emptyset}$. Donc $[\underline{\ell}_{\emptyset}, \underline{\ell}_{\emptyset}] \cap \underline{a}_{\emptyset} = \{0\}$. Donc $[\underline{\ell}_{\emptyset,kq}, \underline{\ell}_{\emptyset,ph}] = 0$. Ce qui démontre notre assertion.

On note $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles de racines positives de Δ contenant $\Delta_{\sigma\theta}^{+}$. Un tel ensemble sera dit compatible avec $\Delta_{\sigma\theta}^{+}$. Soit $\mathcal{P}$ un élément de $\mathfrak{F}$. On notera alors $\underline{n}_{\emptyset}(\mathcal{P}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P}} \underline{g}^{\alpha}$ et

$\underline{p}_{\emptyset}(\mathcal{P}) = \underline{m}_{\emptyset} \oplus \underline{a}_{\emptyset} \oplus \underline{n}_{\emptyset}(\mathcal{P})$. Soit $P_{\emptyset}(\mathcal{P})$ le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\underline{p}_{\emptyset}(\mathcal{P})$. On note $M_{\emptyset}$ le sous-groupe de G engendré par le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{m}_{\emptyset}$ et le centralisateur dans K de $\underline{a}_{\emptyset}$. Alors on a $P_{\emptyset}(\mathcal{P}) = M_{\emptyset} A_{\emptyset} N_{\emptyset}(\mathcal{P})$ où $A_{\emptyset}$ et $N_{\emptyset}(\mathcal{P})$ sont les sous-groupes analytiques de G d'algèbres de Lie $\underline{a}_{\emptyset}$ et $\underline{n}_{\emptyset}(\mathcal{P})$. On notera $\underline{a}_{\emptyset}^{-}(\mathcal{P}) = \{H \in \underline{a}_{\emptyset} | \alpha(H) < 0, \forall \alpha \in \mathcal{P}\}$.

On a $\mathrm{Cl}\, \underline{a}_{\emptyset}^{-} = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathcal{F}} \mathrm{Cl}\, \underline{a}_{\emptyset}^{-}(\mathcal{P})$. Enfin $M_{\emptyset}$ est laissé stable par σ et θ et l'espace symétrique $M_{\emptyset} / M_{\emptyset} \cap H$ est dans la classe d'Harish Chandra. On notera, pour $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$, $\rho_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{P}} (\dim \underline{g}_{\alpha})\, \alpha$,

$\mathcal{L}^{+}(\mathcal{P}) = \{\lambda \in \underline{a}_{\emptyset}^{*} \mid \lambda = \sum_{i} n_i \alpha_i$, où $n_i \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \in \mathcal{P}\}$, $\Sigma_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des racines simples de $\mathcal{P}$. Pour $\Theta \subset \Sigma_{\mathcal{P}}$ on notera $\underline{a}_{\Theta} = \bigcap_{\alpha \in \Theta} \mathrm{Ker}\, \alpha$, $\underline{\ell}_{\Theta}$ le centralisateur dans $\underline{g}$ de $\underline{a}_{\Theta}$. On note $\underline{m}_{\Theta}$ l'orthogonal dans $\underline{\ell}_{\Theta}$ de $\underline{a}_{\Theta}$ pour la forme bilinéaire B restreinte à $\underline{\ell}_{\Theta}$. Comme $\underline{a}_{\Theta}$ et donc $\underline{\ell}_{\Theta}$ sont σ et θ stables, il est aisé de voir que B restreinte à $\underline{\ell}_{\Theta}$ est non dégénérée, que $\underline{m}_{\Theta}$ est une sous-algèbre de Lie de $\underline{\ell}_{\Theta}$, σ et θ stable qui vérifie $\underline{\ell}_{\Theta} = \underline{m}_{\Theta} \oplus \underline{a}_{\Theta}$. On note $\underline{a}^{\Theta} = \underline{m}_{\Theta} \cap \underline{a}_{\emptyset}$,

$\underline{n}_{\Theta}(\mathcal{P}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{P},\ \alpha|_{\underline{a}_{\Theta}} \neq 0} \underline{g}^{\alpha}$, $\rho_{\mathcal{P},\Theta} = \rho_{\mathcal{P}}|_{\underline{a}_{\Theta}}$,

$\mathcal{L}^{+}(\mathcal{P}, \Theta) = \{\lambda|_{\underline{a}_{\Theta}} \mid \lambda \in \mathcal{L}^{+}(\mathcal{P})\}$. On notera $P_{\Theta}(\mathcal{P})$ le sous-groupe parabolique d'algèbre de Lie $\underline{p}_{\Theta}(\mathcal{P}) = \underline{m}_{\Theta} \oplus \underline{a}_{\Theta} \oplus \underline{n}_{\Theta}(\mathcal{P})$. On a alors $P_{\Theta}(\mathcal{P}) = M_{\Theta} A_{\Theta} N_{\Theta}(\mathcal{P})$, où A_{Θ} (resp. $N_{\Theta}(\mathcal{P})$) est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{a}_{\Theta}$ (resp. $\underline{n}_{\Theta}(\mathcal{P})$) et M_{Θ} est le sous-groupe de G engendré par $M_{\emptyset}$ et le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{m}_{\Theta}$. Alors M_{Θ} est stable sous σ et θ et l'espace symétrique $M_{\Theta} / M_{\Theta} \cap H$ est dans la classe d'Harish Chandra.

2. PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DES FONCTIONS K - FINIES ET Z ($\underline{g}$) - FINIES SUR G/H .

2.1 Nous allons maintenant rappeler, sous une forme appropriée, des résultats de van den BAN ([v.d.B]).

Soit I un idéal de Z ($\underline{g}$) de codimension finie. Alors il existe un ensemble fini X (I) dans $(\underline{a}_\emptyset^*)_{\mathbb{C}}$ possédant la propriété suivante : pour toute fonction F , K finie et C^∞ sur G/H , annulée par I , il existe des fonctions sur $K \times \underline{a}_\emptyset$ notées $(k, X) \to P_{\lambda,\mathcal{P}}(k, X, F)$, où λ décrit $X(I) + \mathscr{L}^+(\mathcal{P})$, vérifiant :

(i) Pour k fixé, les fonctions $X \to P_{\lambda,\mathcal{P}}(k, X, F)$ sont polynomiales sur $\underline{a}_\emptyset$. De plus,

$$\forall X \in \underline{a}_\emptyset^-(\mathcal{P}) , \; F(k \exp X) = \sum_{\lambda \in X(I) + \mathscr{L}^+(\mathcal{P})} P_{\lambda,\mathcal{P}}(k, X, F) e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{P}})(X)} .$$

En outre, la convergence est valable aussi lorsqu'on développe les polynomes $P_{\lambda,\mathcal{P}}(k, X, F)$ en monomes, en utilisant des coordonnées sur $\underline{a}_\emptyset$.

(ii) Pour k fixé, les fonctions polynomiales $X \to \mathcal{P}_{\lambda,\mathcal{P}}(k, X, F)$ sont entièrement déterminées par (i). Il suffit même que la convergence soit valable sur un ouvert de $\underline{a}_\emptyset^-$ stable par dilatation.

(iii) La convergence de la série dans (i) est absolue et uniforme, y compris après développement des P_λ en monomes, sur tout translaté de $\underline{a}_\emptyset^-(\mathcal{P})$ dont la fermeture est entièrement contenue dans $\underline{a}_\emptyset^-(\mathcal{P})$.

(iv) Les fonctions $X \to P_{\lambda,\mathcal{P}}(.,X,F)$ sont des fonctions polynomiales sur $\underline{a}_{\emptyset}$ à image dans un sous-espace de dimension finie et K - fini de $C^{\infty}(K)$ (si F est de type $\mu \in \hat{K}$, $P_{\lambda,\mathcal{P}}(.,X,F)$ est également de type μ). En outre, pour F fixé, leur degré est borné indépendamment de $\lambda \in X(I) + \mathcal{L}^{+}(\mathcal{P})$.

(v) On peut dériver terme à terme par tout élément de $U(\underline{a}_{\emptyset})$ et de $U(\underline{k})$ la série de (i), y compris après développement en monome, les modes de convergence de (i) et (iii) étant préservés.

Références :

Pour exhiber $X(I)$ et les $P_{\lambda,\mathcal{P}}$ satisfaisant (i), il suffit d'utiliser les théorèmes 3.4 et 3.5 de [v.d.B.] et de développer en série de Taylor à l'origine les fonctions $F^{\mathcal{L}}_{s,m}$ du théorème 3.5 de cet article. Alors (ii) résulte du lemme A. 1.7 de [Ca.M.]. Enfin (iii), (iv) et (v) résultent des points précédents, des théorèmes 3.4 et 3.5 de [v.d.B.], ainsi que des propriétés élémentaires des séries entières.

2.2

Nous aurons besoin aussi des développements asymptotiques le long des murs. On conserve les notations de 2.1. On se fixe $\mathcal{P} \in \mathcal{J}$ et Θ un sous-ensemble de l'ensemble des racines simples de $\mathcal{P}$. On notera $X(I,\Theta)$ (resp. $\mathcal{L}^{+}(\mathcal{P},\Theta)$) l'ensemble des restrictions à $\underline{a}_{\Theta}$ des éléments de $X(I)$ (resp. $\mathcal{L}^{+}(\mathcal{P})$). Alors, pour tout F comme en 2.1, il existe des fonctions $(k,a,X) \to Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k,a,X,F)$ où μ décrit $X(I,\Theta) + \mathcal{L}^{+}(\mathcal{P},\Theta)$, définies sur $K \times A^{\Theta} \times \underline{a}_{\Theta}$ (ici $A^{\Theta} = \exp \underline{a}^{\Theta}$)

vérifiant :

(i) Les fonctions $Q_{\mu,\mathcal{P},\mathfrak{F}}$ sont polynomiales sur $\underline{a}_{\Theta}$ pour k et a fixés et analytiques en $a \in A_{\Theta}$ pour k et X fixés. En outre, pour k et a fixés, on a :

$$\forall\, X \in \underline{a}_{\Theta}^{-}(\mathcal{P}) = \{H \in \underline{a}_{\Theta} \mid \forall\, \alpha \in \mathcal{P}\,,\ \alpha_{|\underline{a}_{\Theta}} \neq 0\,,\ \alpha(H) < 0\}\ ,$$

$$F(k\, a \exp X) = \sum_{\mu} Q_{\mu,\Theta,\mathcal{P}}(k,a,X)\, e^{(\mu + \rho_{\mathcal{P},\Theta})(X)}\ ,$$

la convergence étant également valable après développement des polynomes sur $\underline{a}_{\Theta}$, $Q_{\mu,\Theta}(k,a,.,F)$ en monomes (en utilisant des coordonnées sur $\underline{a}_{\Theta}$).

(ii) Les fonctions $Q_{\mu,\Theta,\mathcal{P}}$ sont entièrement déterminées par (i). Il suffit même que la convergence (après développement en monomes) soit valable sur un ouvert de $\underline{a}_{\Theta}^{-}(\mathcal{P})$ stable par dilatation. En outre, la convergence est uniforme et absolue sur tout translaté de $\underline{a}_{\Theta}^{-}(\mathcal{P})$ dont la fermeture est contenue dans $\underline{a}_{\Theta}^{-}(\mathcal{P})$.

(iii) Soit $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des racines de $\mathcal{P}$ s'annulant sur $\underline{a}_{\Theta}$. C'est un ensemble de racines positives du système des racines de $\underline{a}^{\Theta}$ dans $\underline{m}_{\Theta}$. Soit $\mathcal{P}'_1$ un autre ensemble de racines positives de ce système tel que si $\alpha \in \Delta^{+}_{\sigma\theta}$ est nul sur $\underline{a}_{\Theta}$ on ait $\alpha \in \mathcal{P}'_1$.
Soit $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \cup \{\alpha \in \mathcal{P} \mid \alpha_{|\underline{a}_{\Theta}} \neq 0\}$. Alors $\mathcal{P}'$ est ensemble de racines positives compatible avec $\Delta^{+}_{\sigma\theta}$, i.e. $\mathcal{P}' \in \mathfrak{F}$. On notera Θ' les racines simples de $\mathcal{P}'_1$ (qui sont simples aussi dans $\mathcal{P}'$) . Alors $\underline{a}_{\Theta} = \underline{a}_{\Theta'}$,

$\underline{a}^{\Theta} = \underline{a}^{\Theta'}$, $\underline{m}_{\Theta} = \underline{m}_{\Theta'}$, etc... En outre, $\underline{a}^-_{\Theta'}(\mathcal{P}') = \underline{a}^-_{\Theta}(\mathcal{P})$. Enfin, si $X \in (\underline{a}^{\Theta})^-(\mathcal{P}'_1) = \{H \in \underline{a}^{\Theta} \mid \forall \alpha \in \mathcal{P}'_1 , \alpha(H) < 0\}$ et $Y \in \underline{a}^-_{\Theta}(\mathcal{P}')$, on a les relations :

$$Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k, \exp X, Y, F) = \sum_{\lambda \in X(I) + \mathcal{L}^+(\mathcal{P}),\, \lambda_{|\underline{a}_{\Theta}} = \mu} P_{\lambda,\mathcal{P}'}(k, X+Y, F) e^{(\lambda + \rho_{\mathcal{P}'_1})(X)}$$

où $\rho_{\mathcal{P}'_1}$ est la demi somme des racines de $\mathcal{P}'_1$ comptées avec multiplicités, valable y compris après développement des $P_{\lambda,\mathcal{P}'}$ en monomes.

(iv) On peut dériver terme à terme la série donnant $F(k\, a \exp X)$ par tout élément de $U(\underline{k})$ et $S(\underline{a}_{\Theta})$ tout en préservant le mode de convergence décrit en (i). De même on peut dériver terme à terme le développement de $Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k, \exp X, Y, F)$ de (iii) par tout élément de $S(\underline{a}^{\Theta})$ tout en préservant le mode de convergence décrit en (iii).

Références :

Pour (i), cf. [v.d.B], § 7 et 8. Le point (ii) résulte de [Ca.M.], lemme A. 1.7. Pour (iii), on utilise le développement relatif à $\mathcal{P}'_1$ de $F(k \exp (X + Y))$ donné en 2.1, puis on procède à un regroupement des termes correspondant à des λ ayant même restriction à $\underline{a}_{\Theta}$. On obtient alors un développement du type de celui décrit en (i) pour $F(k\, a \exp X)$ valable pour $\log a$ dans $(\underline{a}^{\Theta})^-(\mathcal{P}'_1)$ et X dans $\underline{a}^-_{\Theta'}(\mathcal{P}') = \underline{a}^-_{\Theta}(\mathcal{P})$. D'après l'unicité, décrite en (ii), d'un tel développement, on obtient l'identité voulue. Pour les dérivations terme à terme de (iv), les propriétés élémentaires des séries entières permettent de conclure.

2.3 Soit F une fonction comme ci-dessus. Alors on notera
$e(\mathcal{P},F) = \{\lambda \mid P_{\lambda,\mathcal{P}}(.,.,F) \not\equiv 0\}$ et $e(\mathcal{P},\Theta,F) = \{\mu \mid Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(.,.,.,F) \not\equiv 0\}$.
On remarquera que pour tout $\mathcal{P}'$ comme en 2.2 (iii), on a aussi l'égalité :
$e(\mathcal{P},\Theta,F) = \{\mu \mid \mu = \lambda_{|\underline{a}_\Theta}, \lambda \in e(\mathcal{P}',F)\}$. En effet, utilisant le développement des $Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}$ donné en 2.2 (iii) dont l'unicité est assurée grâce au lemme A.1.7 de [Ca.M.], on voit que si $Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta} \equiv 0$ on a $P_{\lambda,\mathcal{P}'} \equiv 0$ dès que $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \mu$.
Le lemme suivant est une conséquence immédiate de l'unicité des fonctions $Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}$ (cf. 2.3 (iii)).

Lemme 1.

Avec les notations ci-dessus on a

(i) $\forall\, k_0, k \in K$, $\forall\, a \in A^\Theta$, $\forall\, X \in \underline{a}_\Theta$,

$$Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k_0 k, a, X, F) = Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k, a, X, L_{k_0^{-1}} F) .$$

(ii) D'autre part, si $m \in M_\Theta \cap K \cap H$ vérifie $m^{-1} a m \in A^\Theta$ pour un $a \in A^\Theta$ on a :

$$\forall\, k \in K, \ \forall\, X \in \underline{a}_\Theta, \ Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k m, a, X, F) = Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(k, \mathrm{Ad}m^{-1} a, X, F) .$$

Remarque :

Les résultats concernant les polynomes Q s'appliquent aux polynomes P en faisant $\Theta = \emptyset$, car $P_{\lambda,\mathcal{P}} = Q_{\lambda,\mathcal{P},\emptyset}$.

3. CONSTRUCTION DE MORPHISMES ENTRE REPRESENTATIONS H - SPHERIQUES ET REPRESENTATIONS INDUITES.

3.1 On se donne un sous module de Harish Chandra V de $C^\infty(G/H)$, annulé par l'idéal de codimension finie $Z(\underline{g}), I$. On notera $e(P,V) = \bigcup_{F \in V} e(P,F)$ et $e(P,\Theta,V)$ l'ensemble des restrictions à $\underline{a}_\Theta$ des éléments de $e(P,V)$. On introduit un ordre $\underset{P}{\leq}$ sur $\underline{a}^*_{\emptyset,\mathbb{C}}$ (resp. $\underset{P,\Theta}{\leq}$ sur $\underline{a}^*_{\Theta,\mathbb{C}}$) de la façon suivante :

$$\lambda \underset{P}{\leq} \lambda' \iff \lambda' - \lambda \in \mathbb{Z}^+(P)$$

$$\mu \underset{P,\Theta}{\leq} \mu' \iff \mu' - \mu \in \mathbb{Z}^+(P,\Theta)$$

On notera $e_\ell(P,V)$ (resp. $e_\ell(P,\Theta,V)$) les éléments minimaux pour $\underset{P}{\leq}$ (resp. $\underset{P,\Theta}{\leq}$) de $e(P,V)$ (resp. $e(P,\Theta,V)$. D'après 2.1 et 2.2 ces ensembles sont non vides, discrets et, d'après [v.d.B.], th. 3.4, $e_\ell(P,V)$ est fini.

Lemme 2.

Soit $\lambda_0 \in e_\ell(P,\Theta,V)$. Pour $F \in V$ on note $j_{\lambda_0}(F)$ la fonction sur A^Θ à valeurs dans $S(\underline{a}_\Theta)$ qui à $a \in A^\Theta$ associe la fonction polynomiale sur $\underline{a}_\Theta$, $X \to Q_{\lambda_0,P,\Theta}(e,a,X,F)$.

Alors :

(i) Si $D \in \underline{n}_\Theta(P)$, $j_{\lambda_0}(DF) = 0$, pour tout $F \in V$.

(ii) Soit ad la représentation adjointe de $\underline{a}_\Theta$ dans $S(\underline{a}_\Theta)$ et $\lambda_0 + \rho_{P,\Theta}$ le caractère de $\underline{a}_\Theta$ correspondant à cet élément de $\underline{a}^*_{\Theta,\mathbb{C}}$.
Alors, si $D \in S(\underline{a}_\Theta)$, $j_{\lambda_0}(DF) = [\mathrm{ad} \otimes (\lambda_0 + \rho_{P,\Theta})]\,(D)\,(j_{\lambda_0}(F))$.

(iii) Il existe un entier n tel que pour tout $F \in V$ et $a \in A^\Theta$, $j_{\lambda_0}(F)(a)$ est de degré inférieur à n dans $S(\underline{a}_\Theta)$.

(iv) Pour tout $F \in V$ et tout $D \in S(\underline{a}^\Theta)$, on a :

$$L_D\,(j_{\lambda_0}(F)) = j_{\lambda_0}(L_D F) \quad .$$

(v) Pour tout $F \in V$ et $D \in \underline{m}_\Theta \cap \underline{h}$,

$$j_{\lambda_0}(L_D F)(0) = 0 \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

(i) Pour prouver (i), on peut supposer, par linéarité que $D \in g_+^\alpha$ ou g_-^α avec $\alpha \in P$ et $\alpha_{|\underline{a}_\Theta} \neq 0$. Alors, pour tout $a \in A_\emptyset$ avec $a^\alpha \neq 1$, on a :

$$D = f_1(a)\,(D + \theta D) + f_2(a)\,\mathrm{Ad}\,a^{-1}\,(D + \sigma D)$$

$$\text{avec} \quad f_1(a) = \frac{\mp a^{2\alpha}}{1 \mp a^{2\alpha}} \quad , \quad f_2(a) = \frac{1}{a^{-\alpha} \mp a^\alpha} \quad .$$

Alors on peut calculer $(L_D F)(\exp X)$ pour $X \in \underline{a}_\emptyset^-(P)$ en différentiant terme à terme la série donnant $F(\exp X)$ (cf. 2.1), y compris après développement des polynomes $P_{\lambda,P}$ en monomes. On obtient ainsi pour $X \in \underline{a}_{\emptyset}^{-}(\mathcal{P})$:

$$(L_D F)(\exp X) = \sum_{\lambda \in e(\mathcal{P},F)} f_1(\exp X)\,(L_{D+\theta D}P_{\lambda,\mathcal{P}})(e,\exp X,F)e^{\lambda+\rho_{\mathcal{P}}(X)} ,$$

avec convergence absolue, y compris après développement des $P_{\lambda,\mathcal{P}}$ en monomes et donc aussi des $L_{D+\theta D}P_{\lambda,\mathcal{P}}$.

Par ailleurs on peut développer $f_1(\exp X)$:

$$\forall X \in \underline{a}_{\emptyset}^{-}(\mathcal{P}) ,\ f_1(\exp X) = \mp \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n e^{(2n+1)\alpha(X)} ,$$

avec convergence absolue. On peut alors réécrire le produit des deux séries donnant $(L_D F)(\exp X)$ en groupant les termes différemment :

$$\forall X \in \underline{a}_{\emptyset}^{-}(\mathcal{P}) ,\ (L_D F)(\exp X) = \sum_{\nu} \overline{\sum_{\lambda \in e(\mathcal{P},F),\, n \in \mathbb{N},\, \lambda+(2n+1)\alpha=\nu}}$$

$$(L_{D+\theta D}P_{\lambda,\mathcal{P}})(e,\exp X,F)\, e^{(\nu+\rho_{\mathcal{P}})(X)}$$

avec convergence y compris après développement des $L_{D+\theta D}P_{\lambda,\mathcal{P}}$ en monomes. Ce développement doit coïncider avec le développement de $L_D F$ rappelé en 2.1 (i) d'après son unicité (cf. 2.1.(ii)). Il en résulte que si $P_{\nu,\mathcal{P}}(e,\exp X,L_D F)$ est non identiquement nul, ν est de la forme $\lambda+(2n+1)\alpha$ avec $\lambda \in e(\mathcal{P},F)$. Soit alors $\lambda_0 \in e_{\ell}(\mathcal{P},\Theta,V)$ et $\lambda \in (\underline{a}_{\emptyset}^{*})_{\mathbb{C}}$ avec $\lambda_{|\underline{a}_{\Theta}} = \lambda_0$. Si on avait $P_{\lambda,\mathcal{P}}(e,\exp X,L_D F) \not\equiv 0$,

on aurait, d'après ce qui précède, $\lambda-(2n+1)\alpha \in e(\mathcal{P},F)$ pour au moins un $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le lien entre $e(\mathcal{P},\Theta,F)$ et $e(\mathcal{P},F)$ (cf. 2.3), cela contredirait la minimalité de λ_0.

D'où P_λ $(e, \exp X, D\,F) \equiv 0$ pour tout $\lambda \in (\underline{a}^*_\emptyset)_{\mathbb{C}}$ tel que $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \lambda_0$.

Alors (i) résulte des relations entre les polynomes $Q_{\lambda_0, \mathcal{P}, \Theta}$ et $P_{\lambda, \mathcal{P}}$ (cf. 2.2 (iii)).

Démontrons (ii). Pour cela on dérive terme à terme par $D \in S(\underline{a}_\Theta)$ le développement de F (a exp X), $a \in A^\Theta$, $X \in \underline{a}_\Theta^-(\mathcal{P})$ de 2.3 (i), grâce à 2.3 (iv). L'unicité du développement de $(L_D\,F)$ (a exp X) implique immédiatement (ii).

Démontrons (iii). D'après (i) l'application j_{λ_0} passe au quotient par $\underline{n}_\Theta(\mathcal{P})\,V$. Or $V_1 = V/\underline{n}_\Theta(\mathcal{P})\,V$ est un module de Harish Chandra pour $M_\Theta\,A_\Theta$ (cf. [H.S.], prop. 2.24). En particulier, V_1 est annulé par un idéal de codimension finie de $S(\underline{a}_\Theta)$. Alors, grâce à (ii), on en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $D \in \underline{a}_\Theta$, $F \in V$ et $a \in A^\Theta$

$([\mathrm{ad} \otimes (\lambda_0 + \rho_{\mathcal{P}})]\,(D) - (\lambda_0 + \rho_{\mathcal{P}})\,(D))^n\,(j_{\lambda_0}(F)\,(a)) \equiv 0$.

Cela signifie que $j_{\lambda_0}(F)\,(a)$ est annulé par $(\mathrm{ad}\,D)^n$ pour tout a et $D \in \underline{a}_\Theta$, ce qui implique que $j_{\lambda_0}(F)\,(a)$ est de degré inférieur ou égal à n et ceci achève de prouver (iii).

Prouvons (iv). En dérivant terme à terme le développement de 2.1 (i) par $D \in S(\underline{a}^\Theta)$, grâce à 2.1 (v), on obtient $P_{\lambda,\mathcal{P}}(e, X, L_D\,F)$ en fonction de $P_{\lambda,\mathcal{P}}(e, X, F)$ pour $X \in \underline{a}_\emptyset$ et $\lambda \in (\underline{a}^*_\emptyset)_{\mathbb{C}}$ avec $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \mu$. En reportant cette formule dans l'expression de $Q_{\mu,\mathcal{P},\Theta}(e, \exp X, Y, L_D\,F)$ donnée par 2.2 (iii), on peut exprimer cette quantité à l'aide des $P_{\lambda,\mathcal{P}}(e, X+Y, F)$. Par ailleurs, on obtient le même résultat en dérivant terme à terme par $D \in S(\underline{a}^\Theta)$ l'expression de $Q_{\mu, P, \Theta}(e, \exp X, Y, F)$

donnée par 2.2 (iii), en fonction des $P_{\lambda,\rho}(e, X+Y, F)$ (grâce à 2.2 (iv)). D'où l'identité pour $X \in (\underline{a}^{\Theta})^{-}(\rho_1)$ et $Y \in a_{\Theta}^{-}$ de $L_D(Q_{\mu,\rho,\Theta}(e, \exp X, Y, F)$ et $Q_{\mu,\rho,\Theta}(e, \exp X, Y, L_D F)$. D'où le résultat voulu par prolongement analytique des identités.

Prouvons (v). Il nous faut étudier $(L_D F)(\exp X)$ pour $D \in \underline{m}_{\Theta} \cap \underline{h}$ et $X \in \underline{a}_{\Theta}$. Mais $\underline{m}_{\Theta}$ et $\underline{a}_{\Theta}$ commutent et F est invariante à droite par H. D'où $(L_D F)(\exp X) = 0$ pour tout X dans $\underline{a}_{\Theta}$ et l'assertion en résulte.

3.2 On note $V_1 = V/\underline{n}_{\Theta}(\rho)V$. Notons V_2 le sous-espace de $S(\underline{a}_{\Theta})$ engendré par les $j_{\lambda_0}(F)(a)$, où F décrit V et a décrit A_{Θ}. D'après le lemme 2 (iii), V_2 est de dimension finie. On choisit une forme linéaire non nulle sur V_2, ℓ, qui se transforme sous la contragrediente de $\mathrm{ad} \otimes (\lambda_0 + \rho_{\rho,\Theta})$ par le caractère $(-\lambda_0 - \rho_{\rho,\Theta})$ de $\underline{a}_{\Theta}$. Alors à F dans V on associe la fonction $i_{\lambda_0}(F)$ sur $M_{\Theta} / M_{\Theta} \cap H$ définie de la façon suivante :

Si $m \in M_{\Theta}$ s'écrit $m = m_1 a h$ avec $m_1 \in M_{\Theta} \cap K$, $a \in A^{\Theta}$ et $h \in H$, on pose $i_{\lambda_0}(F)(m) = \ell(j_{\lambda_0}(L_{m_1^{-1}} F)(a))$.

On va montrer que $i_{\lambda_0}(F)$ est analytique sur M_{Θ}(*). Il résulte de la définition et du fait que F est K - finie que $i_{\lambda_0}(F)$ est $M_{\Theta} \cap K$ - finie. Comme, d'autre part, pour $k \in M_{\Theta} \cap K$, $X \in \underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_{\Theta}$,
$i_{\lambda_0}(F)(k \exp X) = i_{\lambda_0}(L_{k^{-1}} F)(\exp X)$, pour démontrer l'analyticité de $i_{\lambda_0}(F)$ pour tout F dans V, il suffit de prouver l'analyticité sur $\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_{\Theta}$ de $X \to i_{\lambda_0}(F)(\exp X)$ pour tout F dans V.

(*) Voir note après la bibliographie de l'article.

On introduit la fonction Ψ_F de $\underline{p} \cap \underline{q}$ dans $C^\infty(M_\Theta \cap H \cap K)$ définie par

$$(\Phi_F(X))(m) = (i_{\lambda_0}(F))\,(\exp(\mathrm{Ad}\, m \,.\, X))$$

$$= (i_{\lambda_0}(F))\,(m \exp X) = (i_{\lambda_0}(L_{m^{-1}} F))\,(\exp X)$$

pour $m \in M_\Theta \cap H \cap K$ et $X \in \underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta$.

Le fait que $i_{\lambda_0}(F)$ soit $M_\Theta \cap K$ - finie implique que Ψ_F est à valeurs dans un sous-espace de dimension finie E de $C^\infty(M_\Theta \cap K \cap H)$ stable par les représentations régulières de $M_\Theta \cap K \cap H$. On note μ la représentation régulière droite de $M_\Theta \cap K \cap H$ dans E . Munissant $\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta$ de l'action adjointe de $M_\Theta \cap K \cap H$, on voit que Ψ_F est μ - sphérique. En outre Φ_F restreinte à $\underline{a}^\Theta$ coïncide avec $X \to \ell\,(J_{\lambda_0}(L_{m^{-1}} F)\,(\exp X))$ qui est clairement analytique. On veut calculer $(L_D\,\Phi)(0)$ pour $D \in S(\underline{a}^\Theta)$. Il résulte du lemme 2 (iv) que $L_D\,(J_{\lambda_0}(L_{m^{-1}} F)) = J_{\lambda_0}(L_D\, L_{m^{-1}} F)$.

D'où $((L_D\,\Psi)\,(0))\,(m) = i_{\lambda_0}(L_D\, L_{m^{-1}} F)\,(0)$. Or $m \in M_\Theta \cap K \cap H$ et $i_{\lambda_0}(L_D\, L_{m^{-1}} F)$ est invariante à droite par $M_\Theta \cap H$.

Donc $(L_D\,\Psi_F(0))\,(m) = i_{\lambda_0}(L_D\, L_{m^{-1}} F)\,(m^{-1})$, soit encore :

$$(L_D\,\Psi_F\,(0))\,(m) = i_{\lambda_0}(L_m\, L_D\, L_{m^{-1}} F)\,(0) .$$

On pose alors $\varphi(D) = (L_D\,\Phi_F)\,(0)$ pour $D \in S(\underline{a}^\Theta)$. D'autre part on note β la symétrisation de $S(\underline{g})$ dans $U(\underline{g})$. Alors on définit une application linéaire ψ de $S(\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta)$ dans E par :

$$\forall\, D \in S(\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta),\ \forall\, m \in M_\Theta \cap H \cap K,\ (\psi(D))(m) = i_{\lambda_0}(L_m\, L_{\beta(D)}\, L_{m^{-1}} F)(0)$$

Il est clair que ψ est μ - sphérique et prolonge φ . On peut alors appliquer la proposition A.1 de l'appendice pour conclure que Φ_F est analytique et ceci achève de prouver que $i_{\lambda_0}(F)$ est analytique. On note au passage que, toujours d'après la proposition A.1, on a

$(L_{\beta(D)} F)(0) = (\psi(D))(0) = i_{\lambda_0}(L_{\beta(D)} F)(0)$

pour tout $D \in S(\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta)$.

On va montrer $i_{\lambda_0}(L_D F) = L_D\, i_{\lambda_0}(F)$ pour tout D dans $U(\underline{m}_\Theta)$.

Pour cela il suffit de comparer les séries de Taylor à l'origine, puisque ces fonctions sont analytiques. Il faut donc voir que :

$\forall\, D \in U(\underline{m}_\Theta)$, $i_{\lambda_0}(L_D F)(0) = (L_D\, i_{\lambda_0}(F))(0)$.

La décomposition $\underline{m}_\Theta = (\underline{m}_\Theta \cap \underline{k}) \oplus (\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta) \oplus (\underline{p} \cap \underline{h} \cap \underline{m}_\Theta)$ montre que l'on a :

$$U(\underline{m}_\Theta) = U(\underline{h} \cap \underline{m}_\Theta)\, \beta\, (S(\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta))\, U(\underline{k} \cap \underline{m}_\Theta) .$$

Soit $D = D_1 D_2 \in U(\underline{m}_\Theta)$ avec $D_1 \in \underline{h} \cap \underline{m}_\Theta$. Il est alors clair que $(L_D\, i_{\lambda_0}(F))(0) = 0$, puisque $L_{D_2}\, i_{\lambda_0}(F)$ est invariante à droite par $M_\Theta \cap H$. D'autre part, d'après le lemme 2 (v), on a $j_{\lambda_0}(L_{D_1}(L_{D_2} F))(0) = 0$ d'où $i_{\lambda_0}(L_D F)(0) = 0$. On a donc l'égalité voulue pour $D \in (\underline{h} \cap \underline{m}_\Theta)\, U(\underline{m}_\Theta)$. D'autre part on a facilement :

$$\forall\, D \in U(\underline{m}_\Theta \cap \underline{k}) \ , \quad i_{\lambda_0}(L_D F) = L_D\, i_{\lambda_0}(F) .$$

Il suffit donc de prouver l'égalité pour tout F et tout $D \in \beta(S(\underline{p} \cap \underline{q} \cap \underline{m}_\Theta))$, mais cela a déjà été vu plus haut. On a donc bien :

$$\forall\, D \in U(\underline{m}_\Theta) \ , \quad i_{\lambda_0}(L_D F) = L_D\, i_{\lambda_0}(F) .$$

D'autre part, d'après le lemme 2 (ii), on a :

$$\forall\ D \in S(\underline{a}_{\Theta})\ ,\ j_{\lambda_0}(D\,F) = (\mathrm{ad} \otimes \lambda_0 + \rho_{\mathcal{P},\Theta})\,(D)\, j_{\lambda_0}(F)\ .$$

D'où : $i_{\lambda_0}(L_D\, F) = (\lambda + \rho_{\mathcal{P},\Theta})\,(D)\, i_{\lambda_0}\,(F)$.

En résumé i_{λ_0} est un morphisme de $M_\Theta\, A_\Theta$ - modules de Harish Chandra de $V/\underline{n}_\Theta(\mathcal{P})\,V$ dans $C^\infty(M_\Theta / M_\Theta \cap H) \otimes \mathbb{C}_{\lambda_0 + \rho_{\mathcal{P},\Theta}}$.

On note $V'_1 \subset C^\infty(M_\Theta / M_\Theta \cap H)$ l'image de i_{λ_0} . Alors, d'après la réciprocité de Frobenius (cf. [H.S.], 4.11, par exemple) on vient de construire un morphisme (non nul) de V_1 dans

$$\underset{M_\Theta A_\Theta N_\Theta(\mathcal{P}) \uparrow G}{\mathrm{Ind}}\ V'_1 \otimes \mathbb{C}_{\lambda_0 + \rho_{\mathcal{P},\Theta}} \otimes 1_{N_\Theta(\mathcal{P})}\ .$$

3.3 <u>Lemme 3</u> :

Avec les notations ci-dessus, soit $\mathcal{P}'_1$ un ensemble de racines positives du système de racines de $\underline{a}^\Theta$ dans $\underline{m}_\Theta$ choisi comme en 2.2 (iii). Alors, si $\lambda \in e(\mathcal{P}'_1, V'_1)$, (où $V'_1 = i_{\lambda_0}(V_1)$) , on a $\lambda + \lambda_0 \in e(\mathcal{P}', V)$.

<u>Démonstration</u> :

Pour $F \in V$, on déduit du développement de 2.2 (iii) de $Q_{\lambda_0,\mathcal{P},\Theta}$, un développement de $i_{\lambda_0}(F)$ du type 2.1 (i). L'unicité de celui-ci permet de conclure.

4. RESULTATS PRINCIPAUX.

4.1 Le résultat suivant a été annoncé il y a plusieurs années par Oshima (cf. [O]).

Théorème 1 :

Soit V un sous-module de Harish Chandra de $C^{\infty}(G/H)$. Alors pour tout $\mathfrak{r} \in \mathfrak{F}$ et tout $\lambda_0 \in e_{\ell}(\mathfrak{r}, V)$, il existe un sous-module irréductible de dimension finie du $M_{\emptyset}$ - module $C^{\infty}(M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H)$, σ, et un morphisme non nul de $(\underline{g}, K)$ - modules de V dans $\mathrm{Ind}_{P_{\emptyset}(\mathcal{P})\uparrow G}\, \sigma \otimes e^{\lambda_0} \otimes 1_{N_{\emptyset}(\mathcal{P})}$. En particulier, si V est irréductible, ce morphisme est injectif.

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la construction de 3.2 avec $\Theta = \emptyset$ pour obtenir un morphisme non nul de modules de Harish Chandra pour $M_{\emptyset} A_{\emptyset}$, i_{λ_0}, de $V/\underline{n}_{\emptyset}(\mathcal{P}) V = V_1$ dans $C^{\infty}(M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H) \otimes \mathbb{C}_{\lambda_0 + \rho_{\mathcal{P}}}$. Or $M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H$ est compact. Donc tout sous-module de Harish Chandra pour $M_{\emptyset}$ de $C^{\infty}(M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H)$ est unitarisable, car $C^{\infty}(M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H)$ est contenu dans $L^2(M_{\emptyset}/M_{\emptyset} \cap H)$. On en déduit que $i_{\lambda_0}(V_1)$ est semi-simple et l'on peut choisir pour σ un facteur direct non nul de $i_{\lambda_0}(V_1)$. Montrons que σ est de dimension finie. Pour cela rappelons (cf. [O.S.], § 8) que $\underline{m}_{\emptyset} = \underline{m}_1 \oplus \underline{m}_2$ (produit d'algèbres de Lie) avec $\underline{m}_1 \subset \underline{k}$ et $\underline{m}_2 \subset h$. Il en résulte facilement que tout sous-module de Harish Chandra pour la composante neutre $M_{\emptyset}^0$ de $M_{\emptyset}$ de $C^{\infty}(M_{\emptyset}^0/M_{\emptyset}^0 \cap H)$ est de dimension finie. Comme, en outre $M_{\emptyset} = F M_{\emptyset}^0$

avec F sous groupe fini de K, cela implique la même assertion pour tout sous-module de Harish Chandra de $C^\infty(M_\emptyset / M_\emptyset \cap H)$ pour $M_\emptyset$ et donc σ est de dimension finie. On achève la démonstration du théorème 1 en utilisant la réciprocité de Frobenius (cf. [H.S.] 4.11).

4.2 On dit qu'un sous-module de Harish Chandra, V, de $C^\infty(G/H)$ est H - tempéré si et seulement si pour tout $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}$ et $\lambda \in e(\mathcal{P}, V)$ on a $\mathrm{Re}\,\lambda(X) \leq 0$ pour tout $X \in \underline{a}_\emptyset^-(\mathcal{P})$. Rappelons que V est contenu dans $L^2(G/H)$ dès que les inégalités ci-dessus sont strictes pour tout X non central dans la cloture de $\underline{a}_\emptyset^-(\mathcal{P})$ (cf. [v.d.B.], th. 9.4). Le théorème suivant a été également annoncé par Oshima.

<u>Théorème 2</u> :

Soit V un sous-module de Harish Chandra H - tempéré de $C^\infty(G/H)$. Alors il existe un sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset(\mathcal{P})$ pour un $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}$, de la forme $P_\Theta(\mathcal{P}) = M_\Theta A_\Theta N_\Theta(\mathcal{P})$, une série discrète, δ, pour $M_\Theta / M_\Theta \cap H$ (i.e. un sous-module de Harish Chandra irréductible de $C^\infty(M_\Theta / M_\Theta \cap H)$ contenu dans $L^2(M_\Theta / M_\Theta \cap H)$), $\nu_0 \in i\,\underline{a}_\Theta^*$, et un morphisme non nul de $(\underline{g}, K)$ - modules de V dans $\mathrm{Ind}_{P_\Theta(\mathcal{P}) \uparrow G}\ \delta \otimes e^{\nu_0} \otimes 1_{N_\Theta(\mathcal{P})}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}$ et $\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ l'ensemble des racines simples de $\mathcal{P}$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \underline{a}_\emptyset^*$ définies par $(\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}$ et $\beta_j(\underline{c}) = 0$ où $(.,.)$ est la forme duale de $B_{|\underline{a}_\emptyset \times \underline{a}_\emptyset}$ et $\underline{c}$ est l'intersection du centre de $\underline{g}$ avec $\underline{a}_\emptyset$. On se fixe alors $P \in \mathcal{F}$ et $\lambda_0 \in e(P,V)$ tel que l'ensemble des β_i orthogonaux à $\mathrm{Re}\,\lambda_0$ soit de cardinal maximal. On note alors Θ l'ensemble des $\alpha_i \in \Sigma_P$ tels que $(\mathrm{Re}\,\lambda_0, \beta_i) \neq 0$. On note $\nu_0 = \lambda_{0|\underline{a}_\Theta}$. On va voir que ν_0 est un élément de $e_\ell(P,\Theta,V)$. Soit $\nu \in e(P,\Theta,V)$ avec $\nu \underset{P,\Theta}{\leq} \nu_0$.

On va voir qu'alors $\nu = \nu_0$. Pour cela on choisit $\lambda \in e(P,V)$ tel que $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \nu$ (cf. 2.4). L'hypothèse $\nu \underset{P,\Theta}{\leq} \nu_0$ se traduit par

$\lambda - \lambda_0 = \sum_{i=1}^{\ell} x_i\,\alpha_i$ avec $x_i \in -\mathbb{N}$ si $\alpha_i \notin \Theta$. L'hypothèse que V est tempérée implique que pout tout i , $(\mathrm{Re}\,\lambda, \beta_i) \geq 0$.
Calculons alors $(\mathrm{Re}\,\lambda,\beta_i)$ pour $\beta_i \notin \Theta$. On a $(\mathrm{Re}\,\lambda_0,\beta_i) = 0$.
D'où

$$(\mathrm{Re}\,\lambda,\beta_i) = (\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_0), \beta_i) = x_i \in -\mathbb{N}\ .$$

On en déduit $(\mathrm{Re}\,\lambda,\beta_i) = 0$ si $\beta_i \notin \Theta$.
Or $\nu - \nu_0 = \mathrm{Re}\,(\nu - \nu_0) = \mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_0)_{|\underline{a}_\Theta}$. D'où

$$\nu - \nu_0 = \sum_{\alpha_i \notin \Theta} (\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_0), \beta_i)\,\alpha_i\ ,$$

et $\nu = \nu_0$ d'après ce qui précède. Ce qui achève de prouver que $\nu_0 \in e_\ell(P,\Theta,V)$. Alors on peut construire un morphisme non nul i_{ν_0} de $V/\underline{n}_\Theta(P)V$ dans $C^\infty(M_\Theta / M_\Theta \cap H) \otimes \mathbb{C}_{\nu_0 + \rho_{P,\Theta}}$ (cf. 3.2) .
Il reste à voir que l'image de i_{ν_0} est dans L^2 et ν_0 imaginaire pur. D'abord, comme V est tempérée, on a $\mathrm{Re}\,\lambda_0$ nulle sur $\underline{c}$.
Alors $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = \sum_{i=1}^{\ell} y_i\,\alpha_i$ et $\mathrm{Re}\,\nu_0 = \sum_{\alpha_i \notin \Theta} y_i\,\alpha_{i|\underline{a}_\Theta}$.

Or $y_i = (\mathrm{Re}\,\lambda_0 , \beta_i)$ est nul si $\alpha_i \in \Theta$. Donc ν_0 est imaginaire pur. Reprenons maintenant les notations du lemme 3. Soit $\lambda \in e\,(\mathcal{P}'_1 , i_{\nu_0}(V))$. Il nous faut montrer que, pour tout $X \in \underline{a}^{\Theta}$ vérifiant $\alpha\,(X) \leq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{P}'_1$ et X non central dans $\underline{m}_{\Theta}$, on a $\mathrm{Re}\,\lambda\,(X) \leq 0$. Pour cela on remarque que d'après le lemme 3, $\lambda + \nu_0 \in e\,(\mathcal{P}', V)$ et comme V est tempéré $\mathrm{Re}\,(\lambda + \nu_0)_{|\underline{c}} = 0$.

Notons $\Sigma_{\mathcal{P}'} = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_\ell\}$, $\Theta' = \Sigma_{\mathcal{P}'} \cap \mathcal{P}'_1$ etc... Il nous reste à prouver que pour $\beta'_i \in \Theta'$ on a $(\mathrm{Re}\,\lambda , \beta'_i) > 0$. Comme V est H - tempéré et $\lambda + \nu_0 \in e\,(\mathcal{P}', V)$ on a, pour tout i , $(\mathrm{Re}\,(\lambda + \nu_0), \beta'_i) \geq 0$. Par ailleurs on a vu que $\mathrm{Re}\,\nu_0 = 0$. D'où, pour tout i , $(\mathrm{Re}\,\lambda , \beta'_i) = (\mathrm{Re}\,(\lambda + \nu_0), \beta'_i) \geq 0$. En outre, si $\beta'_i \notin \Theta'$, on a $(\mathrm{Re}\,\lambda , \beta'_i) = 0$ car les $\beta'_i \notin \Theta'$ sont orthogonaux à $(\underline{a}^{\Theta})^*$. Si on avait $(\mathrm{Re}\,\lambda , \beta'_i) = 0$ pour un $\beta'_i \in \Theta'$, cela contredirait la propriété de λ_0 (car $\mathrm{Card}\,\Theta' = \mathrm{Card}\,\Theta$). D'où $(\mathrm{Re}\,\lambda , \beta'_i) > 0$ pour tout $\beta'_i \in \Theta'$. Donc $i_{\lambda_0}(V)$ est dans $L^2\,(G/H)$. Alors on prend pour δ un facteur direct de $i_{\lambda_0}(V)$ (qui est unitarisable) et on applique la réciprocité de Frobenius pour achever la démonstration du théorème 2.

4.3

<u>Théorème 3</u> : Soit V un sous-module de Harish Chandra de $C^{\infty}(G/H)$. Alors il existe un sous-groupe parabolique de G contenant $P_{\emptyset}(\mathcal{P})$ pour un $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$, de la forme $P_{\Theta}(\mathcal{P}) = M_{\Theta} A_{\Theta} N_{\Theta}(\mathcal{P})$, τ un sous-module $M_{\Theta} \cap H$ - tempéré de $C^{\infty}(M_{\Theta} / M_{\Theta} \cap H)$, $\nu_0 \in (\underline{a}^*_{\Theta})_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Re} < \nu_0 , \alpha > < 0$ pour tout α racine de $\underline{a}_{\Theta}$ dans $\underline{n}_{\Theta}(\mathcal{P})$ et un morphisme non nul de $(\underline{g}, K)$ - modules de V dans

$$\mathrm{Ind}_{P_{\Theta}(\mathcal{P}) \uparrow G} (\tau \otimes e^{\nu} \otimes 1_{N_{\Theta}(\mathcal{P})}) .$$

Démonstration :

Soit $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}$. Notons $C = \{\lambda \in \underline{a}^*_\emptyset \mid (\lambda|\alpha) < 0 \ , \ \forall \alpha \in \mathcal{P}\}$.

Pour $\lambda \in \underline{a}^*_\emptyset$, on note $\lambda_\mathcal{P}$ sa projection sur le cône convexe fermé $\overline{C}$. Supposons que l'on ait $\lambda \underset{\mathcal{P}}{\leq} \lambda'$. On va voir qu'alors $\|\lambda_\mathcal{P}\| \geq \|\lambda'_\mathcal{P}\|$ avec égalité seulement si $\lambda_\mathcal{P} = \lambda'_\mathcal{P}$. En effet, d'après les propriétés de la projection sur un convexe fermé, on a $\lambda - \lambda_\mathcal{P} \in C^0 = \{\lambda \in \underline{a}^*_\emptyset \mid \forall \mu \in C \ , \ (\lambda|\mu) \leq 0\}$. Clairement C^0 s'identifie au cône des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'éléments de $\mathcal{P}$. En outre, $\lambda - \lambda_\mathcal{P}$ et $\lambda_\mathcal{P}$ sont orthogonaux. Alors :

$$\|\lambda_\mathcal{P}\|^2 = \|\lambda\|^2 - \|\lambda - \lambda_\mathcal{P}\|^2 \quad .$$

Par ailleurs, les propriétés de la projection sur $\overline{C}$ impliquent :

$$\|\lambda - \lambda_\mathcal{P}\| \leq \|\lambda - \lambda'_\mathcal{P}\| \quad ,$$

puisque $\lambda'_\mathcal{P} \in \overline{C}$. D'où :

$$\|\lambda_\mathcal{P}\|^2 \geq \|\lambda\|^2 - \|\lambda - \lambda'_\mathcal{P}\|^2 \qquad (*)$$

Or :

$$\|\lambda\|^2 - \|\lambda - \lambda'_\mathcal{P}\|^2 = \|\lambda'_\mathcal{P}\|^2 + 2\,(\lambda - \lambda'_\mathcal{P} \mid \lambda'_\mathcal{P}) \quad .$$

Par ailleurs on a :

$$(\lambda' - \lambda'_\mathcal{P} \mid \lambda'_\mathcal{P}) = 0 \quad \text{i.e.} \quad (\lambda' \mid \lambda'_\mathcal{P}) = (\lambda'_\mathcal{P} \mid \lambda'_\mathcal{P}) \quad .$$

D'où :

$$\|\lambda\|^2 - \|\lambda - \lambda'_\mathcal{P}\|^2 = \|\lambda'_\mathcal{P}\|^2 + 2\,(\lambda - \lambda' \mid \lambda'_\mathcal{P}) \quad .$$

Mais $\lambda \underset{\mathcal{P}}{\leq} \lambda'$ et $\lambda'_\mathcal{P} \in \overline{C}$ impliquent que :

$$(\lambda - \lambda' \mid \lambda'_\mathcal{P}) \geq 0 \quad .$$

Donc :

$$\|\lambda\|^2 - \|\lambda - \lambda'_\mathcal{P}\|^2 \geq \|\lambda'_\mathcal{P}\|^2 \quad .$$

Ceci, joint à (*), donne :

$$\|\lambda_{\mathcal{P}}\|^2 \geq \|\lambda'_{\mathcal{P}}\|^2 \quad .$$

Lorsque $\|\lambda_{\mathcal{P}}\| = \|\lambda'_{\mathcal{P}}\|$ on voit que l'on a nécessairement $\|\lambda - \lambda'_{\mathcal{P}}\| = \|\lambda - \lambda_{\mathcal{P}}\|$, d'où $\lambda_{\mathcal{P}} = \lambda'_{\mathcal{P}}$. Ceci achève de prouver notre assertion. Ceci montre que la fonction sur $e(\mathcal{P}, V)$ définie par $\lambda \to \|\mathrm{Re}\ \lambda_{\mathcal{P}}\|$ atteint son maximum en un point de l'ensemble fini $e_\ell(\mathcal{P}, V)$.

On choisit alors $\mathcal{P} \in \mathfrak{F}$ et $\lambda^0 \in e(\mathcal{P}, V)$ tel que $\|\mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}}\|$ soit maximum (on maximise parmi tous les $\mathcal{P}$ et λ possibles).

On note Θ l'ensemble des racines simples de $\mathcal{P}$ telles que $(\mathrm{Re}\ \lambda^0 \mid \alpha) = 0$. On notera $\nu^0 = \lambda^0_{|\underline{a}_\Theta} = \lambda^0_{\mathcal{P}}$. Alors on a bien $(\mathrm{Re}\ \nu^0 \mid \alpha) < 0$ pour tout α racine de $\underline{a}_\Theta$ dans $\underline{n}_\Theta(\mathcal{P})$. On va voir également que ν^0 est un élément de $e_\ell(\mathcal{P}, \Theta, V)$. Pour cela, soit $\lambda \in e(\mathcal{P}, V)$ tel que $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} \underset{\mathcal{P},\Theta}{\leq} \nu^0$. Alors on a $\mathrm{Re}\ \lambda_{|\underline{a}_\Theta} \underset{\mathcal{P},\Theta}{\leq} \mathrm{Re}\ \nu^0$. Alors, comme on a $\mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}} \in \underline{a}^*_\Theta$, on a

$$(\mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}} \mid \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}}) = (\mathrm{Re}\ \lambda_{|\underline{a}_\Theta} - \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}} \mid \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}}) \quad .$$

Par ailleurs on a $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} - \lambda^0_{\mathcal{P}} = \sum_{\alpha \in \Sigma_{\mathcal{P}} - \Theta} m_\alpha\, \alpha_{|\underline{a}_\Theta}$ avec $m_\alpha \in -\mathbb{N}$.

Alors, comme $\mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}} = \nu^0 \in \underline{a}^*_\Theta \cap \overline{C}$, on a finalement

$$(\mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}} \mid \mathrm{Re}\ \lambda^0_{\mathcal{P}}) = \sum_{\alpha \in \Sigma_{\mathcal{P}} - \Theta} m_\alpha (\alpha \mid \nu^0) \geq 0 \qquad (**)$$

et l'égalité n'est valable que si les m_α sont tous nuls i.e. $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \lambda^0_{\mathcal{P}} = \nu_0$. De façon analogue à ce qui précède on voit que (* *) implique $\|\lambda_{\mathcal{P}}\| \geq \|\lambda^0_{\mathcal{P}}\|$ avec inégalité stricte sauf si (* *) est une égalité. D'après l'hypothèse sur λ^0 , on voit que ceci implique que (* *) est une égalité et donc $\lambda_{|\underline{a}_\Theta} = \lambda^0_{\mathcal{P}} = \nu_0$.

Au bout du compte on vient de prouver que $\nu^0 \in e_\ell\ (\mathcal{P},\Theta,V)$. On construit alors (cf. 3.2) un morphisme non nul de modules de Harish Chandra pour $M_\Theta\ A_\Theta$, i_{ν_0}, de $V/\underline{n}_\Theta\ (\mathcal{P})\ V$ dans $C^\infty\ (M_\Theta \mid M_\Theta \cap H) \otimes \mathbb{C}_{\nu_0}$. Alors, grâce à la réciprocité de Frobenius, il suffit, pour achever la démonstration du théorème 3, de prouver que $i_{\nu_0}(V)$ est $M_\Theta \cap H$ - tempéré. On emploie les notations du lemme 3.

Soit $\mu \in e\ (\mathcal{P}'_1\ ,\ i_{\nu_0}(V))$. Alors on a, d'après ce lemme, $\lambda = \mu + \nu_0 \in e\ (\mathcal{P}', V)$. Or $(\mathrm{Re}\ \nu_0 \mid \alpha) = 0$ si $\alpha \in \mathcal{P}'_1$ car $\mathrm{Re}\ \nu_0 \in \underline{a}^*_\Theta$ et $\alpha \in (\underline{a}^\Theta)^*$. D'autre part, si $\alpha \in \mathcal{P}'$ et $\alpha_{|\underline{a}_\Theta} \neq 0$, on a $\alpha \in \mathcal{P}$ par définition de $\mathcal{P}'$ et on a alors $(\mathrm{Re}\ \nu_0, \alpha) < 0$. D'où $(\mathrm{Re}\ \nu_0)_{\mathcal{P}'} = \mathrm{Re}\ \nu_0$. Alors l'égalité $(\mathrm{Re}\ \lambda - \mathrm{Re}\ \nu_0 \mid \mathrm{Re}\ \nu_0) = 0$ implique que $\|\mathrm{Re}\ \lambda_{\mathcal{P}'}\| \geq \|\mathrm{Re}\ \nu_0\|$ avec égalité si et seulement si $\lambda_{\mathcal{P}'} = \mathrm{Re}\ \nu_0$. Par définition de ν_0 on doit avoir égalité, donc $\lambda_{\mathcal{P}'} = \mathrm{Re}\ \nu_0$. Alors des propriétés de la projection il résulte que $\mu = \lambda - \lambda_{\mathcal{P}'}$ est de la forme $\sum_{\alpha \in \mathcal{P}'} x_\alpha\, \alpha$ avec $x_\alpha \geq 0$ pour tout α .

Mais μ est nul sur $\underline{a}_\Theta$. Cela implique que $x_\alpha = 0$ dès que $\alpha \in \mathcal{P}'$ et $\alpha_{|\underline{a}_\Theta} \neq 0$. D'où $\mu = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}'_1} x_\alpha\, \alpha$ et l'on a bien $\mu\ (X) \leq 0$ pour tout X vérifiant $\alpha\ (X) \leq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{P}'_1$. Ceci montre que $i_{\nu_0}(V)$ est tempéré et achève de prouver le théorème.

4.4 En combinant les théorèmes 2 et 3 et utilisant l'induction par étage on a :

<u>Corollaire du théorème 3</u> :

Soit V un sous-module de Harish Chandra de $C^\infty\ (G/H)$. Alors il existe un sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset\ (\mathcal{P})$ pour un $\mathcal{P} \in \mathfrak{J}$, de la forme $P_\Theta(\mathcal{P}) = M_\Theta A_\Theta N_\Theta(\mathcal{P})$, une série discrète, δ , pour $M_\Theta / M_\Theta \cap H$, un élément ν de $(\underline{a}_\Theta)^*_{\mathbb{C}}$ dont la partie réelle est dans la cloture de la chambre de Weyl négative $\underline{a}^-_\Theta(\mathcal{P})$ et un morphisme non nul de $(\underline{g}, K)$ - modules de V dans $\operatorname{Ind}_{P_\Theta(\mathcal{P}) \uparrow G} (\delta \otimes e^\nu \otimes 1_{N_\Theta(\mathcal{P})})$.

Bibliographie

[v.d.B.] E. van den Ban, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces (preprint 1984).

[v.d.B.D.] E. van den Ban et P. Delorme (en préparation).

[B.W.] A. Borel et N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Annals of Math. Studies, 94, (1980), Princeton University Press, Princeton.

[Carm.] J. Carmona, Sur la classification des modules admissibles irréductibles, dans Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Proceedings, Marseille-Luminy 1982, 11-34, L.N. in Mathematics 1020, Springer Verlag 1983.

[Ca.M.] W. Casselman et D. Milicic, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations. Duke Math. J., 49, 1982, 106-146.

[H.C.] Harish Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups I, The theory of the constant term, Journ. of Funct. Anal., 19, 1975, 104-204.

.../...

[H.S.] H. Hecht et W. Schmid, Characters, asymptotics and $\underline{n}$ - homology of Harish Chandra modules, Acta Mathematica, 151, 1983, 49-151.

[O.] T. Oshima, Fourier analysis on semisimple symmetric spaces, dans Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Proceedings, Marseille-Luminy, 1980, 357-369, L.N. in Mathematics 880, Springer Verlag 1981.

[O.S.] T. Oshima et J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair, dans Group representations and systems of differential equations, 433-497, Advanced in Pure Mathematics, 4, 1984.

(*) Note ajoutée en cours d'épreuve

W. Casselman vient de me communiquer des notes manuscrites rédigées par lui en 1975 sur les équations différentielles satisfaites par les coefficients matriciels des représentations admissibles des groupes réductifs réels. Il est facile d'en extraire une démonstration du fait que $i_{\lambda_o}(F)$ est C^∞. Pour conclure que $i_{\lambda_o}(F)$ est analytique il suffit alors de remarquer qu'elle est annulée par un idéal de codimension finie du centre de $U(\underline{m}_\Theta)$ et d'utiliser un argument standard.

Cette démonstration n'utilise pas les appendices et est donc plus élémentaire. La partie "méthode de descente" de l'appendice A est toutefois commune aux deux preuves.

Je remercie vivement W. Casselman de m'avoir communiqué son manuscrit.

<u>Appendice</u>

par Erik van den BAN et Patrick DELORME.

Cet appendice est divisé en deux parties. La première partie établit un résultat d'extensions de fonctions analytiques de $\underline{a}$ à $\underline{p}$ utilisé dans l'article. Ce résultat contient en particulier le théorème de restriction de Chevalley pour les fonctions analytiques. Notre démonstration originale reposait sur des résultats de Kostant Rallis analysant la structure de $S(\underline{p})^K$ - module de $S(\underline{p})$ ainsi que le théorème de restriction de Chevalley pour les fonctions analytiques. Au lieu de cela nous utilisons le résultat de la deuxième partie (lemme B.1). Nous remercions T. Oshima pour nous avoir fourni une démonstration d'un résultat de même nature. Sa démonstration, qui utilise une propriété classique des polynomes de Tchebishef, pourrait être adaptée pour obtenir ce lemme.

Ce résultat apparaît comme une conséquence immédiate d'un résultat de J. Korevaar et J. Wiegerink (cf. [K.W.], main lemma). Nous le réutiliserons ultérieurement.

A.1. Les notations sont celles de 1.1 et 1.2 . On note $\underline{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\underline{p}$, M (resp. M') le centralisateur (resp. normalisateur) de $\underline{a}$ dans K , $W = M'/M$ le groupe de Weyl correspondant. Soit μ une représentation unitaire de K dans un espace de dimension finie E .

<u>Proposition A.1</u> Soit $\psi : S(\underline{p}) \to E$ une fonction μ - sphérique (ici K agit sur $S(\underline{p})$ par représentation adjointe). Soit $\Phi : \underline{a} \to E$ une fonction analytique sur E . On suppose que :

$$\forall D \in S(\underline{a}) \quad , \quad (L_D \Phi)(0) = \psi(D) \quad .$$

Alors il existe une unique fonction μ - sphérique $\Psi : p \to E$ telle que $\Psi_{|\underline{a}} = \Phi$. De plus, Ψ est analytique et pour tout $D \in S(\underline{p})$ on a $(L_D \Psi)(0) = \psi(D)$ (Ici $\underline{p}$ est regardé comme un groupe commutatif et L désigne la différentielle de sa représentation régulière gauche).

<u>Première partie de la démonstration</u> :

L'unicité de Ψ , si elle existe, résulte du fait que $\underline{p} = \mathrm{Ad}\, K \ \mathrm{cl}\ \underline{a}^-$, où $\mathrm{cl}\ \underline{a}^-$ est la fermeture d'une chambre de Weyl $\underline{a}^-$ du système de racines $\Delta(\underline{g}, \underline{a})$ de $\underline{a}$ dans $\underline{g}$.

A.2. On rappelle que $\underline{c}$ est le centre de $\underline{g}$. On remarque que $\underline{c} \cap \underline{p} \subset \underline{a}$. Pour poursuivre la démonstration de la proposition A.1 nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme A.1</u> :

Soit $X_0 \in \underline{c} \cap \underline{p}$ tel qu'il existe une fonction μ - sphérique linéaire $\psi_{X_0} : S(\underline{p}) \to E$ telle que :

$$\forall\ D \in S(\underline{a}) \quad , \quad \psi_{X_0}(D) = (L_D\ \Phi)(X_0) \quad .$$

Alors il existe une fonction analytique, à valeurs dans E , Ψ_{X_0} , définie sur un voisinage V_{X_0} de X_0 dans $\underline{p}$, qui prolonge $\Phi_{|V_{X_0} \cap \underline{a}}$ et vérifiant $(L_D \Psi_{X_0})(X_0) = \psi_{X_0}(D)$ pour tout D dans $S(\underline{p})$.

En outre, si la série de Taylor de Φ en X_0 converge sur la boule $B_{\underline{a}}(X_0, \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$, la série de Taylor de Ψ_{X_0} en X_0 converge sur la boule $B_{\underline{p}}(X_0, \varepsilon/B)$ où B est une constante (dépendant seulement de $n = \dim \underline{p}$). Enfin ψ_{X_0} est μ - sphérique sur $B_{\underline{p}}(X_0, \varepsilon/B)$.

Notation. Si F est un espace normé, nous avons employé la notation, pour $x \in F$ et $\varepsilon > 0$, $B_F(x, \varepsilon) = \{y \in F \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$.

Démonstration :

On se fixe une base orthonormée $H_1, \ldots, H_n$ de $\underline{p}$. Alors, pour $\omega \in S^{n-1}$ (sphère unité de $\mathbb{R}^n$) et $\omega . H = \omega_1 H_1 + \ldots + \omega_n H_n \in \underline{a}$, on a :

$$\Phi(X_0 + t(\omega . H)) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} \psi_{X_0}((\omega . H)^j) t^j ,$$

la somme étant absolument convergente pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\eta \in]0, \varepsilon[$. Alors, grâce aux inégalités de Cauchy, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$(1) \quad \forall \omega \in S^{n-1} , \omega . H \in \underline{a} \Rightarrow \|\psi_{X_0}((\omega . H)^j)\| \leq c \left(\frac{1}{\eta}\right)^j j! \quad (j \in \mathbb{N}) .$$

Alors, si ω est un élément quelconque de S^{n-1} , il existe un $k \in K$ tel que $(\mathrm{Ad}\, k)(\omega . H) \in \underline{a}$. De plus, $\mathrm{Ad}\, k$ étant une transformation orthogonale, on a $(\mathrm{Ad}\, k)(\omega . H) = \omega' . H$ pour un $\omega' \in S^{n-1}$. Comme ψ_{X_0} est μ - sphérique, on a $\psi_{X_0}(\omega . H)^j) = \mu(k)^{-1} \psi_{X_0}((\omega' . H)^j)$. Grâce au fait que μ est unitaire on voit que (1) implique :

$$(2) \quad \forall \omega \in S^{n-1} , \psi_{X_0}((\omega . H)^j) \leq c\, \eta^{-j} j! , j \in \mathbb{N} .$$

Alors, si B est la constante du lemme B.1, on en déduit :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^n , \|\psi_{X_0}(H_1^{\ell_1} \ldots H_n^{\ell_n})\| \leq c \left(\frac{B}{\eta}\right)^{|\ell|} \ell ! ,$$

où $|\ell| = \ell_1 + \ldots + \ell_n$, $\ell ! = \ell_1 ! \ldots \ell_n !$

Il en résulte que la série entière :

$$(3) \qquad \sum_{\ell \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\ell\,!}\ \psi_{X_0}(H_1^{\ell_1} \dots H_n^{\ell_n})\ t_1^{\ell_1} \dots t_n^{\ell_n} \qquad ,$$

converge absolument pour $|t_j| < \frac{\eta}{B}$, $1 \leq j \leq n$. Par conséquent, il existe une fonction analytique $\Psi_{X_0} : B_{\underline{p}}(X_0 , \eta/B) \to E$ avec $\Psi_{X_0}(X_0 + t.H)$ égale à (3) pour t assez petit dans $\mathbb{R}^n$. Puisque η a été choisi quelconque dans $]0, \varepsilon[$, Ψ_{X_0} s'étend en une fonction analytique sur $B_{\underline{p}}(X_0 , \varepsilon/B)$. Ayant la même série de Taylor en X_0 , $\Psi_{X_0}|B_{\underline{a}}(X_0 , \varepsilon/B)$ doit coïncider avec $\Phi|B_{\underline{a}}(X_0 , \varepsilon/B)$. Finalement, chaque terme de la série de Taylor de Ψ_{X_0} en X_0 est μ - sphérique (car Ad K fixe X_0), donc Ψ_{X_0} est μ - sphérique et ceci achève de prouver le lemme A.1.

A.3. <u>Lemme A.2</u> :

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments X_0 de $\underline{c} \cap \underline{p}$ tel qu'il existe une application linéaire $\psi_{X_0} : S(\underline{p}) \to E$ vérifiant

a) ψ_{X_0} est μ - sphérique .

b) $\psi_{X_0}(D) = (L_D\, \Phi)(X_0)$, $\forall\, D \in S(\underline{a}.)$.

Alors $\mathcal{A}$ est égal à $\underline{c} \cap \underline{p}$.

<u>Démonstration</u> :

Par hypothèse $\mathcal{A}$ contient **0** . D'après le lemme A.1, $\mathcal{A}$ est ouvert. En effet, soit $X_0 \in \mathcal{A}$ et soit $\varepsilon > 0$, $\Psi_{X_0} : B_{\underline{p}}(X_0 , \varepsilon/B) \to E$, comme dans le lemme A.1 . Alors, pour $Y_0 \in B_{\underline{p}}(X_0, \epsilon/B) \cap \underline{c}$, on définit, pour $D \in S(\underline{p})$, $\psi_{Y_0}(D) = (L_D \Psi_{X_0})(Y_0)$. Comme Ψ_{X_0} est μ - sphérique et que Ad K centralise Y_0 , (a) est vérifié. De plus, comme Ψ_{X_0} coïncide avec Φ sur $B_{\underline{a}}(X_0, \epsilon/B)$, (b) est vrai. Donc $B_{\underline{a}}(X_0, \epsilon/B) \cap \underline{c} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est ouvert.

Montrons que $\mathcal{A}$ est fermé. Pour cela il suffit de voir que l'intersection de $\mathcal{A}$ avec la fermeture $\mathrm{cl}\, B_{\underline{a}}(0,R)$, de $B_{\underline{a}}(0,R)$, est fermée pour tout $R > 0$. Puisque Φ est analytique dans un voisinage de l'ensemble compact $\mathrm{cl}\,(B_{\underline{a}}(0,R))$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $X \in \mathrm{cl}\,(B_{\underline{a}}(0,R))$, la série de Taylor de Φ en X converge sur $B_{\underline{a}}(X, \epsilon)$. Soit Y adhérent à $\mathcal{A} \cap \mathrm{cl}\, B_{\underline{a}}(0,R)$. On peut trouver $X \in \mathcal{A} \cap \mathrm{cl}\,(B_{\underline{a}}(0,R))$ tel que $\|X - Y\| < \epsilon/B$. Mais d'après la première partie de la démonstration $B_{\underline{a}}(X, \epsilon/B) \cap \underline{c}$ est contenu dans $\mathcal{A}$. Finalement, $\mathcal{A}$ est fermé dans $\underline{c}$. De plus, il est ouvert et non vide d'après la première partie de la démonstration, donc égal à $\underline{c} \cap \underline{p}$.

A.4 <u>Lemme A.3</u> :

Il existe une fonction μ - sphérique $\Psi : \underline{p} \to E$ qui prolonge Φ . Cette fonction coïncide avec Ψ_{X_0} (cf. lemme A.1) au voisinage de tout $X_0 \in \underline{c} \cap \underline{p}$. Elle est donc analytique au voisinage de tout point X_0 de $\underline{c} \cap \underline{p}$.

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme A.1 il existe une fonction Ψ_0 analytique définie sur un voisinage Ad K - invariant de 0 , U, μ - sphérique et telle que $\Psi_0|_{\underline{a} \cap U} = \Phi|_{\underline{a} \cap U}$. Soit $Y \in \underline{p}$. Alors il existe $k \in K$, $X \in \underline{a}$, tel que $Y = (\mathrm{Ad}\, k)\, X$. Si $k' \in K$, $X' \in \underline{a}$ vérifient $Y = (\mathrm{Ad}\, k')\, X'$, on a $\mu(k)\, \Psi(X) = \mu(k')\, \Psi(X')$. Pour le voir on considère la fonction analytique $f : \mathbb{R} \to E$ définie par $f(t) = \mu(k)\, \Psi(t X) - \mu(k')\, \Psi(t X')$. Si t est suffisamment petit on a $t X$, $t X' \in U$ et $f(t) = \Psi_0(t\, (\mathrm{Ad}\, k)\, X) - \Psi_0(t\, (\mathrm{Ad}\, k')\, X') = 0$. Par prolongement analytique on en déduit que f est identiquement nulle. On peut donc définir une fonction $\Psi : \underline{p} \to E$ par $\Psi((\mathrm{Ad}\, k)\, X) = \mu(k)\, \Phi(X)$ pour $k \in K$ et $X \in \underline{a}$. Cette fonction est clairement μ - sphérique et coïncide avec Φ sur $\underline{a}$. Cela implique immédiatement que, pour tout $X_0 \in \underline{c}$, Ψ coïncide avec Ψ_{X_0} sur un voisinage Ad K invariant de X_0 dans $\underline{p}$. Ceci achève de prouver le lemme.

A.5. <u>Fin de la démonstration de la proposition A.1.</u>

On procède par récurrence sur la dimension de G . Si G est de dimension 1, G est commutatif et $\underline{c} \cap \underline{p} = \underline{a}$. Donc Ψ est analytique grâce au lemme A.3. Donc la proposition A.1 est vraie lorsque $\dim G = 1$. On la suppose démontrée pour tous les groupes de dimension strictement plus petite que celle de G . Il reste à prouver que Ψ est analytique en tout point de $\underline{p}$. Comme Ψ est μ - sphérique, il suffit de le voir en tout X_0 de $\underline{a}$. Si $X_0 \in \underline{c}$ cela résulte du lemme A.3. Si $X_0 \notin \underline{c}$, le centralisateur G_{X_0} (resp. $\underline{g}_{X_0}$) de X_0 dans G (resp. $\underline{g}$) est de dimension strictement inférieure à celle de G . Alors on applique l'hypothèse de récurrence à G_{X_0} , qui est clairement dans la classe d'Harish Chandra, pour voir que $\Psi_1 = \Psi_{|\underline{p}_{X_0}}$ est analytique sur $\underline{p}_{X_0} = \underline{p} \cap \underline{g}_{X_0}$. Soit $\underline{s}$ un supplémentaire de $\underline{k}_{X_0} = \underline{k} \cap \underline{g}_{X_0}$ dans $\underline{k}$. Alors l'application f de $\underline{s} \times \underline{p}_{X_0}$ dans $\underline{p}$ définie par :

$\forall X \in \underline{s}$, $\forall Y \in \underline{p}_{X_0}$, $f(X, Y) = (\mathrm{Ad}\,(\exp X))\, Y$, est un difféomorphisme analytique local au voisinage de $(0, X_0)$. Pour le voir, il suffit de vérifier que $\underline{p} = \underline{p}_{X_0} \oplus [\underline{s}, X_0]$ puisque la différentielle de f en $(0, X_0)$ est donnée par $(X, Y) \in \underline{s} \times \underline{p}_{X_0} \to [X, X_0] + Y$. Or, d'après [War], prop. 1.3.5.4, on a $\underline{g} = \underline{g}_{X_0} \oplus [\underline{g}, X_0]$. En écrivant $\underline{g}_{X_0} = \underline{k}_{X_0} \oplus \underline{p}_{X_0}$, $\underline{g} = \underline{k}_{X_0} \oplus \underline{p} \oplus \underline{s}$ et en utilisant $[\underline{k}, \underline{p}] \subset \underline{p}$, $[\underline{p}, \underline{p}] \subset \underline{k}$, on a facilement l'égalité voulue. Alors, soit V un voisinage de X_0 dans $\underline{p}$ sur lequel f^{-1} est défini et analytique. Notons $j : V \to \underline{s}$ (resp. $h : V \to \underline{p}_{X_0}$) la composée de f^{-1} avec la projection de $\underline{s} \times \underline{p}_{X_0}$ sur $\underline{s}$ (resp. $\underline{p}_{X_0}$) . Alors, pour tout X dans V , on a :

$$\begin{aligned} \Psi(X) &= \Psi[\mathrm{Ad}(\exp(j(X)))(h(X))] \\ &= \mu(\exp(j(X)))\, \Psi_1(h(X)) . \end{aligned}$$

D'où il résulte que Ψ est analytique au voisinage de X_0 . Ceci achève de prouver que Ψ est analytique sur $\underline{p}$. Le fait que, pour $D \in S(\underline{p})$, $(L_D \Psi)(0) = \psi(D)$ est une conséquence du lemme A.1 et du fait que Ψ coïncide avec Ψ_0 au voisinage de 0 (lemme A.3). Ceci achève de prouver la proposition A.1.

$\underline{B}$.

Soit $D_1, \ldots, D_n$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Si $\omega \in \mathbb{R}^n$ on pose $\omega . D = \omega_1 D_1 + \ldots + \omega_n D_n$. On utilisera les notations usuelles pour les multiindices.

Lemme B.1.

Soit Ω un ouvert non vide de la sphère unité S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $B > 0$ telle que

(i) Si ψ est une application linéaire de l'algèbre symétrique (complexe) $S(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans un espace normé de dimension finie E, alors :

$$(*)\quad \frac{1}{\ell\,!}\,\|\psi\,(D_1^{\ell_1}\ldots D_n^{\ell_n})\| \leq \sup_{\omega\,\in\,\Omega} \|\psi\,((\omega\,.\,D)^{|\ell|})\|\,\frac{B^{|\ell|}}{|\ell|\,!}\ .$$

(ii) Si $p\,(t) = \sum_{\ell\,\in\,\mathbb{N}^n,\ |\ell|\,=\,m} a_\ell\, t^\ell$ est un polynome homogène de degré m à n variables à valeurs dans E,

$$\frac{1}{\ell\,!}\,\|a_\ell\| \leq \sup_{t\,\in\,\Omega} |p\,(t)|\,\frac{1}{|\ell|\,!}\,B^{|\ell|}\ .$$

Démonstration :

Il suffit de prouver (i). Grâce à [K.W.], lemme principal, on peut trouver des fonctions intégrables g_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}^n$, sur Ω, telles que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^n$:

$$(**)\qquad \frac{1}{\ell\,!}\,D_1^{\ell_1}\ldots D_n^{\ell_n} = \frac{1}{|\ell|\,!}\int_\Omega g_\ell\,(\omega)\,(\omega\,.\,D)^{|\ell|}\,d\sigma\ .$$

Ici $d\sigma$ est la mesure euclidienne sur S^{n-1}. De plus on a :

$$(***)\qquad \forall\,\ell \in \mathbb{N}^n\,,\ \int_\Omega |g_\ell\,(\omega)|\,d\sigma \leq B^{|\ell|}\ .$$

Comme ψ se restreint à une application linéaire continue de $S(\mathbb{R}^n)_m$ dans E pour tout $m \in \mathbb{N}$, (**) implique

$$\frac{1}{\ell\,!}\,\psi\,(D_1^{\ell_1}\ldots D_n^{\ell_n}) = \frac{1}{|\ell|\,!}\int_\Omega g_\ell\,(\omega)\,\psi\,((\omega\,.\,D)^{|\ell|})\,d\sigma\ .$$

D'après (***) cela implique (*).

Bibliographie

[K.W.] J. Korevaar et J. Wiegerinck, A representation of mixed derivatives with an application to the edge-of-the-wedge theorem. Indagationes Math. 47 (1985), 77-86.

(*) Département de Mathématique-Informatique
Faculté des Sciences de Luminy
70, route Léon-Lachamp
13288 MARSEILLE CEDEX 9 - France

(**) Rijksuniversiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Budapest laan 6
Postbus 80.010
3508 TA UTRECHT - Nederlands