Invent. math. 105, 305–346 (1991)

Inventiones mathematicae

Coefficients généralisés de séries principales sphériques et distributions sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ ⋆

P. Delorme

Département de Mathématique-Informatique, Faculté des Sciences de Luminy, 163, avenue de Luminy, 13288-Marseille Cedex 9, Unité de Recherche Associée au C.N.R.S. n° 225

Oblatum 13-XII-1990

0 Introduction

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ et σ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{h}$. On note aussi σ l'involution correspondante de G et H le sous-groupe de G formé des points fixes de σ. On suppose que *H admet un sous-groupe de Cartan compact T.* Soit θ une involution de Cartan de G commutant à σ, K le groupe des points fixes de θ. On peut choisir T inclus dans K. Si $\mathfrak{t}$ est l'algèbre de Lie de T, on note $\mathfrak{a}=i\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$, $A=\exp\mathfrak{a}$. Alors TA est un sous-groupe de Cartan de G. Soit $P=TAN$ un sous-groupe de Borel de G (qui est $\sigma\theta$-stable). Pour $\lambda\in\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$, on introduit la série principale sphérique C^∞ de G, (π_λ, I_λ). Par restriction des fonctions à K, I_λ est isomorphe à $I=C^\infty(K/T)$. On notera $\tilde{\pi}_\lambda$ la représentation de G sur I déduite de π_λ par transport de structure. Notons ρ la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans l'algèbre de Lie de N (regardée comme réelle). Pour $\operatorname{Re}(\lambda-\rho)$ strictement dominant, la fonction ξ_λ sur G définie par:

$$\xi_\lambda(g)=0 \quad \text{si } g\notin HP$$
$$\xi_\lambda(htan)=a^{\lambda-\rho}, \quad \forall h\in H, t\in T, a\in A, n\in N$$

est une fonction continue sur G (cf. [1, 13] et § 3.2), et permet de définir sur I_λ une forme linéaire continue, notée encore ξ_λ, par:

$$\forall f\in I_\lambda, \quad \langle \xi_\lambda, f\rangle = \int_K \xi_\lambda(k)\, f(k)\, dk.$$

Par transport sur I, la famille de formes linéaires $\lambda\to\tilde{\xi}_\lambda$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}'(K/T)$ (cf. [1, 13]). Par ailleurs ξ_λ est invariante par H, G agissant sur I'_λ, dual topologique de I_λ, par la représentation contragrédienté de π_λ, π'_λ. Lorsque ξ_λ et $\xi_{-\lambda}$ sont définies, il n'est pas

⋆ À ma mère

difficile de voir que, pour $\varphi \in C_c^\infty(G/H)$, $\pi'_\lambda(\varphi)\ \xi_\lambda$ s'identifie à un élément de $I_{-\lambda}$ et l'expression

$$\langle \pi'_\lambda(\varphi)\,\xi_\lambda, \xi_{-\lambda}\rangle = \Theta_\lambda(\varphi)$$

a un sens. On définit ainsi une distribution sur G/H, Θ_λ, qui est invariante à gauche par H et propre sous l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H, qui dépend méromorphiquement de λ.

L'objet de cet article est d'établir certaines propriétés de Θ_λ.

On sait d'après P. Harinck ([10]) que Θ_λ est une fonction localement intégrable sur G/H. De plus, notant A^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de A, Θ_λ est une fonction analytique sur l'ouvert $HA^{\mathrm{reg}}H$ qui vérifie (au moins pour λ dans un ouvert de $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$):

$$(*) \qquad \forall a \in A^{\mathrm{reg}}, \qquad \Theta_\lambda(aH) = \frac{\sum_{x\in W} d(x,\lambda)\, a^{-x\lambda}}{\Delta_{\mathscr{A}}(a)}$$

où W est le groupe de Weyl de (G, A), $\Delta_{\mathscr{A}}(a)$ est une fonction indépendante de λ (voir définition au § 7.2), et les $d(x, \lambda)$ sont des complexes dépendant méromorphiquement de λ.

Le problème résolu dans cet article est la détermination des $d(x, \lambda)$. Notons $W_H = \{w \in W \mid w$ a un représentant dans $H\}$. Alors on montre en particulier que $d(x, \lambda) = 0$ si $x \notin W_H$.

En outre, on montre que:

$$\forall w \notin W_H, \qquad \forall a \in A^{\mathrm{reg}}, \qquad \Theta_\lambda(waH) = 0.$$

Ces résultats font l'objet du Théorème 3 (§ 7.1) et permettent de comparer Θ_λ aux distributions construites par P. Harinck dans [10].

L'idée pour établir ces propriétés est d'étudier $\Theta_\lambda(waa_tH)$ lorsque $t \to +\infty$, où $a_t = \exp tX_0$ et X_0 est un élément régulier de $\mathfrak{a}$.

Mais Θ_λ étant présentée comme distribution, il faut passer par les fonctions tests. On se limitera dans la suite de cette introduction à $w = 1$.

On construit d'abord (§ 4.1) des fonctions C_c^∞ sur G/H portées par HAH. Pour cela on note C une chambre de Weyl dans $\mathfrak{a}$ pour W(pas nécessairement égale à la chambre C^+ correspondant à N). On pose $\mathscr{C} = \exp C \subset A$. On note $\Omega(C) = H\mathscr{C}H$ qui est un ouvert dans G/H. Si $\psi \in C_c^\infty(H/T)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathscr{C})$ $(\subset C_c^\infty(\mathfrak{a}))$ on définit $\Phi = \Phi(\psi, \varphi) \in C_c^\infty(G/H)$ par:

$$\Phi(gH) = 0 \quad \text{si } gH \notin \Omega(C)$$

$$\Phi(haH) = \psi(h)\,\varphi(a) \qquad \forall h \in H, \qquad \forall a \in \mathscr{C}.$$

On prend $X_0 \in -C$ et on définit $\varphi_t \in C_c^\infty(\mathscr{C})$ par:

$$\varphi_t(a) = 0 \quad \text{si } aa_t \notin \mathscr{C}$$

$$\varphi_t(aa_t) = \varphi(aa_t) \quad \text{si } aa_t \in \mathscr{C}.$$

Lorsque $x \in W$ et $C = -xC^+$, on étudie de deux façons différentes:

$$\lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \Theta_\lambda(\Phi(\psi, \varphi_t))$$

(pour des valeurs convenables de λ).

La première méthode consiste à partir de (*) et à utiliser la formule intégrale (établie à la Proposition 3, § 2.7):

$$\forall f \in C_c(\Omega(C)) \, (\subset C_c(G/H)),$$
$$\int_{\Omega(C)} f(gH) \, d\dot{g} = C_G \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} f(haH) \, D(a) \, da \, d\dot{h},$$

où C_G est une constante dépendant des normalisations des mesures et D une fonction explicite sur A.

On trouve facilement (Lemme 18, § 7):

$$\lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \Theta_\lambda(\Phi(\psi, \varphi_t)) = \varepsilon(x) \, d(x, \lambda) \Big(\int_{H/T} \psi(hT) \, d\dot{h} \Big) \Big(\int_{\mathscr{C}} \varphi(a) \, a^{-x(\lambda+\rho)} da \Big)$$

où $\varepsilon(x) = \pm 1$.

La deuxième méthode d'étude de cette limite consiste à écrire la définition de Θ_λ et à étudier d'abord $\lim\limits_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \pi'_\lambda(\Phi(\psi, \varphi_t)) \, \xi_\lambda$, qui est un élément de $I_{-\lambda}$ (identifié à un sous-espace de I'_λ).

On démontre (Théorème 1, § 4.3) que cette limite dans $I_{-\lambda}$ existe et est égale à:

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \notin W_H \\ C_G \, u_{\lambda,x} & \text{si } x \in W_H \end{array}$$

où

$$u_{\lambda,x} = \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} \psi(hT) \, \varphi(a) \, a^{-2x\rho} \, \pi'_\lambda(hwa) \, \eta_{\lambda,x} \, d\dot{h} \, da$$

et

$$\eta_{\lambda,x} = A'(w_0, \lambda) \, \delta_{xw_0}^{w_0\lambda}.$$

Ici $A(w_0, \lambda)$ est l'intégrale d'entrelacement de I_λ vers $I_{w_0\lambda}$ (qui converge avec nos restrictions sur λ), $A'(w_0, \lambda)$ est son transposé et $\delta_{xw_0}^{w_0\lambda}$ est l'élément de $I'_{w_0\lambda}$ défini par:

$$\forall f \in I_{w_0\lambda}, \quad \langle \delta_{xw_0}^{w_0\lambda}, f \rangle = f(xw_0)$$

(la formule pour $\eta_{\lambda,x}$ étant établie au Lemme 11, § 5).

Précisons que ce résultat est obtenu par un argument de convergence dominée, les majorations nécessaires étant obtenues au § 4.

On a alors:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \Theta_\lambda(\Phi(\psi, \varphi_t)) &= 0 \qquad \text{si } x \notin W_H \\ &= C_G \langle u_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda} \rangle \qquad \text{si } x \in W_H. \end{aligned}$$

On utilise alors les propriétés des intégrales d'entrelacement (entrelacement, propriétés relatives à la transposition) et on fait passer l'intégrale d'entrelacement à droite (en transposant) pour obtenir:

$$\forall x \in W_H, \qquad \langle u_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda}\rangle = \langle v_{\lambda,x}, A'(w_0, -w_0\lambda)\,\xi_{-\lambda}\rangle$$

où

$$v_{\lambda,x} = \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} \psi(hT)\,\varphi(a)\,a^{-x(\lambda+\rho)}\,\pi'_{w_0\lambda}(h)\,\delta^{w_0\lambda}_{xw_0}\,d\dot{h}\,da.$$

On calcule alors l'effet des intégrales d'entrelacement sur $\xi_{-\lambda}$ (Théorème 2, § 5) en se réduisant aux groupes de rang 1 (SL(2, $\mathbb{C}$)), pour lesquels les calculs sont faits explicitement (§ 6).

On voit alors que le support de $v_{\lambda,x}$ est contenu dans un ouvert sur lequel $A'(w_0, -w_0\lambda)\,\xi_{-\lambda}$ est une fonction C^∞. Le calcul s'achève par l'emploi d'une formule intégrale. La comparaison des résultats obtenus par les 2 méthodes donne le théorème cherché.

Situons notre travail par rapport à ceux d'autres auteurs.

Dans le cas SL(2, $\mathbb{C}$)/SL(2, $\mathbb{R}$) le résultat principal (Théorème 3) est dû explicitement à P. Harinck ([20, Th. 3.4]) et repose sur les résultats de Faraut ([8]). Le cas GL(n, $\mathbb{C}$)/$U(p, q)$ a été également traité par N. Bopp et P. Harinck (travail en cours). Ce résultat joue un rôle important dans la dérivation de la formule de Plancherel pour ces espaces symétriques, en permettant d'identifier, dans les formules d'inversion du type de celles obtenues par S. Sano ([21]), des distributions sphériques à des coefficients généralisés (cf. [20, § 4]). Notre méthode diffère de celles de ces auteurs.

Remerciements. Je remercie vivement Pascale Harinck pour d'utiles conversations dans lesquelles elle m'a expliqué ses résultats sur SL(2, $\mathbb{C}$). Je remercie également Jacques Carmona pour m'avoir patiemment écouté et fait bénéficier de ses critiques éclairées pendant l'élaboration de ce travail.

1 Notations-Conventions

1.1

Si X est un ensemble, on notera $|X|$ son cardinal.

Si E est un espace vectoriel réel, on notera $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié.

Si E est un espace vectoriel complexe et F un sous-espace vectoriel réel de E avec $F \cap iF = \{0\}$ on identifiera parfois $F_{\mathbb{C}}$ à $F + iF \subset E$.

Si E est un espace vectoriel localement convexe séparé, on notera E' son dual topologique. Le crochet de dualité sera noté $\langle\ ,\ \rangle$ et parfois $\langle\ ,\ \rangle_{E,E'}$. Si A est un opérateur continu de E dans F (avec E, F *e.l.c.s*), on notera A' le transposé de A qui envoie F' dans E'.

Si l'on a une représentation π d'un groupe G dans E, *e.l.c.s*, par des opérateurs continus, on notera π' la représentation contragrédiente définie par $\pi'(g) = (\pi(g^{-1}))'$.

Si E est un espace de Hilbert (réel ou complexe) on notera $(\ ,\ )$ le produit scalaire (linéaire en la lère variable).

1.2

Si L est un groupe de Lie, on notera $\mathfrak{l}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{l})$ l'algèbre envelop-pante de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$. L'action régulière gauche (resp. droite) de $D \in U(\mathfrak{l})$ (resp. $g \in G$) sur f, fonction C^∞ sur L, sera notée $L_D f$ (resp. $R_D f$, resp. $L_g f$, $R_g f$).

1.3

Pour les généralités qui suivent nous renvoyons à [3, § 2], [4, § 1.3] et [17].

Si X est une variété, on notera $\mathscr{D}(X) = C_c^\infty(X)$, $\mathscr{E}(X) = C^\infty(X)$ munis de leur topologie usuelle et $\mathscr{D}'(X)$ (resp. $\mathscr{E}'(X)$) l'espace des distributions (resp. distributions à support compact) sur X. Si X est un groupe de Lie (resp. un espace homogène d'un groupe de Lie) muni d'une mesure de Haar (resp. invariante) à gauche, on identifie $\mathscr{E}(X)$ (resp. $\mathscr{D}(X)$) à un sous-espace de $\mathscr{D}'(X)$ (resp. $\mathscr{E}'(X)$). Si G est un groupe de Lie (unimodulaire pour simplifier) muni d'une mesure de Haar dg, pour φ, fonction sur G, on note $\check{\varphi}$ la fonction sur G définie par $\check{\varphi}(g) = \varphi(g^{-1})$. On étend cette opération aux distributions (par transposition). Si (π, I) est une représentation C^∞ de G sur un espace localement convexe séparé complet, il existe une représentation de l'algèbre de convolution $\mathscr{E}'(G)$ dans I, notée π, telle que:

$$(1) \qquad \forall \tau \in \mathscr{E}'(G), \quad \forall f \in I, \quad \forall T \in I', \\ \langle \pi(\tau) f, T \rangle_{I,I'} = \langle \tau, c_{f,T} \rangle_{\mathscr{E}',\mathscr{E}}$$

où $c_{f,T}$ est le coefficient de π défini par

$$c_{f,T}(g) = \langle \pi(g) f, T \rangle.$$

Il existe aussi, sous les mêmes hypothèses, une représentation de $\mathscr{E}'(G)$ sur I', notée π' telle que:

$$(2) \qquad \forall \tau \in \mathscr{E}'(G), \quad f \in I, \quad T \in I' \\ \langle f, \pi'(\tau) T \rangle = \langle \tau, \check{c}_{f,T} \rangle.$$

Alors (1) et (2) impliquent:

$$(3) \qquad \forall \tau \in \mathscr{E}'(G), \quad (\pi(\tau))' = \pi'(\check{\tau})$$

2 Quelques faits sur la structure de G/H et une formule intégrale

2.1

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On note σ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, ainsi que l'involution de G qu'on en déduit. On note H l'ensemble des points fixes de σ dans G. On suppose dans tout cet article que H *admet un sous-groupe de Cartan compact.*

Soit $\mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\sigma(X)=-X\}$. On a $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}=i\mathfrak{h}$. On se fixe une involution de Cartan, θ, de G qui commute à σ. On note K le sous-groupe des points fixes de θ et $\mathfrak{p}=i\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\theta(X)=-X\}$.

On se fixe un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ (regardée comme réelle), $\mathscr{B}$, défini par:

$$\forall X,\ Y\in\mathfrak{g},\qquad \mathscr{B}(X,Y)=-\mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(\mathrm{ad}\,X\ \mathrm{ad}(\theta(Y))).$$

On note T un sous-groupe de Cartan compact de H contenu dans K. On note $\mathfrak{a}=i\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$ et A le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. Si P est un sous-groupe parabolique minimal de G contenant TA on notera N_P (ou N) son radical unipotent. On note W le quotient du normalisateur dans K de $\mathfrak{a}$, $N_K(\mathfrak{a})$ par son centralisateur dans K (qui est égal à T). C'est aussi le groupe de Weyl de (K, T). On note W_H le quotient du normalisateur dans $K\cap H$ de $\mathfrak{a}$ par T qui est aussi le groupe de Weyl de $(K\cap H, T)$. On a $W_H\subset W$. Si $w\in W$ on notera de la même façon un représentant de w dans $N_K(\mathfrak{a})$. Noter que, comme $T\subset H$, on a $w\in W_H$ si et seulement si tout représentant de w est dans H.

Remarque 1 Le fait de ne pas distinguer entre éléments de W et représentants ne conduira pas dans cet article à des problèmes fâcheux. En effet, à chaque fois qu'une construction fera intervenir un représentant de $w\in W$, on verra que celle-ci ne dépend pas du choix de celui-ci. Cela permettra un certain allègement des notations.

2.2

On se fixe un parabolique minimal de G, P, contenant TA. On note Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et Δ^+ (ou Δ_P^+) l'ensemble des racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{n}$. On notera $\rho_{\mathbb{C}}$ (ou $\rho_{\mathbb{C},P}$) la demi-somme des éléments de Δ^+. On notera δ_i, $i=1,\dots,\ell$ les poids fondamentaux de Δ (relativement à Δ^+) et pour chaque i, on note (π_i, V_i) la représentation irréductible holomorphe de G de plus haut poids δ_i, que l'on munit d'un produit scalaire invariant par K. On notera e_{δ_i} un vecteur de plus haut poids de π_i et de norme 1, et $e_i^1=e_{\delta_i}, e_i^2,\dots,e_{\delta_i}^{n_i}$ une base orthonormée de V_i formée de vecteurs-poids sous $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ (e_i^j étant de poids μ_j). Dans $V_i\otimes V_i'$ on considère le vecteur $v_H^i=\sum_{j=1}^{n_i} e_i^j\otimes(e_i^j)'$ où $((e_i^j)')$ est la base duale de (e_i^j). On munit V_i' du produit scalaire déduit naturellement de celui sur V_i. Notez que v_H^i correspond à l'identité dans l'identification de $V_i\otimes V_i'$ avec $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$ et ne dépend pas du choix de la base orthonormée choisie. On définit alors une fonction ε_i sur G par:

$$\forall g\in G,\qquad \varepsilon_i(g)=((\pi_i(g)\otimes\pi_i'(\sigma(g)))\,(e_{\delta_i}\otimes e_{\delta_i}'),\ v_H^i).$$

On a aussi

$$\forall g\in G,\qquad \varepsilon_i(g)=\langle\pi_i(g)\,e_{\delta_i},\ \pi_i'(\sigma(g))\,e_{\delta_i}'\rangle.$$

La fonction ε_i est analytique sur G et vérifie

$$\forall h\in H, g\in G, t\in T, a\in A, n\in N,\qquad \varepsilon_i(hgtan)=a^{2\delta_i}\varepsilon_i(g).$$

Ici on a noté $a \to a^{2\delta_i}$ le quasi-caractère de A de différentielle $2\delta_{i|\mathfrak{a}}$. Plus généralement, si λ est une forme linéaire sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ ou $\mathfrak{a}$, on note $x \to x^{\lambda}$ le quasicaractère de TA ou A de différentielle λ. Notons que la demi-somme des poids de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$ (regardé comme réel), ρ (ou ρ_P) est égal à $2\rho_{\mathbb{C}|\mathfrak{a}}$.

2.3

Lemme 1 *Si w est un représentant d'un élément de W, $\sigma(w^{-1})\, w$ est un élément de T indépendant du représentant choisi, et noté t_w. On a $t_w^2=1$ et $\sigma(w^{-1})\, w = w^{-1}\sigma(w) = t_w$. De plus $t_w = 1$ si et seulement si $w \in W_H$.*

Démonstration. Si $t \in T$, wtw^{-1} est dans T et donc fixé par σ. D'où $wtw^{-1} = \sigma(w)\, t\sigma(w)^{-1}$. Donc $\sigma(w)^{-1} w$ centralise T et c'est un élément, t_w, de T. D'autre part, si $t \in T$, $\sigma(wt)^{-1}wt = t^{-1}\sigma(w)^{-1}wt = t^{-1}t_w t = t_w$. Donc t_w est indépendant du représentant choisi. On a $\sigma(t_w) = t_w$ puisque $t_w \in T$.

Alors:

$$t_w^2 = t_w\, \sigma(t_w) = \sigma(w)^{-1} w(\sigma(\sigma(w)^{-1} w)) \\ = \sigma(w)^{-1} w w^{-1} \sigma(w) = 1.$$

D'où:

$$t_w = t_w^{-1} \quad \text{et} \quad \sigma(w)^{-1} w = w^{-1}\sigma(w) = t_w.$$

Maintenant:

$$t_w = 1 \Leftrightarrow \sigma(w)^{-1} w = 1 \\ \Leftrightarrow w = \sigma(w).$$

Donc:

$$t_w = 1 \Leftrightarrow w \in W_H. \quad \square$$

2.4

On rappelle que les doubles classes ouvertes de G modulo (H, P) sont exactement les ensembles $HwTAN = HwAN$ où $w \in W$ (notez que wT ne dépend que de $w \in W$) (cf. [1, Prop. B.1]).

Etudions les fonctions ε_i sur ces doubles classes.

On a, avec les notations évidentes:

$$\varepsilon_i(hwtan) = a^{2\delta_i}\, \varepsilon_i(w).$$

Or:

$$\varepsilon_i(w) = \langle \pi_i(w)\, e_{\delta_i}, \pi_i'(\sigma(w))\, e_{\delta_i}' \rangle \\ = \langle \pi_i(\sigma(w)^{-1} w)\, e_{\delta_i}, e_{\delta_i}' \rangle.$$

D'où $\varepsilon_i(w) = t_w^{\delta_i}$.

Comme $t_w^2 = 1$, on a $t_w^{\delta_i} = \pm 1$. Comme G est simplement connexe, les caractères $t \to t^{\delta_i}$ engendrent le groupe des caractères de T. Donc $t_w^{\delta_i} = 1$ pour tout i équivaut à $t_w = 1$, i.e. $w \in W_H$.

Proposition 1 (*i*) *Les fonctions ε_i sont réelles et de signe constant sur chaque double classe ouverte de G modulo (H, P).*

(ii) $G - \bigcup_{w \in W} HwAN = \left\{ g \in G \mid \prod_{i=1}^{\ell} \varepsilon_i(g) = 0 \right\}.$

(iii) $HAN = \{ g \in G \mid \varepsilon_i(g) > 0, \ \forall i = 1, \ldots, \ell \}.$

Démonstration. On a vu (i). Pour (ii), voir la démonstration du Théorème 2.5 de [13]. Les fonctions considérées par Olafson ne sont pas exactement les mêmes que les nôtres ou du moins sont présentées de façon différente. Pour (iii), on voit que, si $g \in HAN$, les $\varepsilon_i(g)$ sont strictement positifs. Réciproquement, si $\varepsilon_i(g) > 0$ pour tout i, de (ii) on déduit que $g \in HwAN$ pour un $w \in W$. D'après ce que l'on a vu, $\varepsilon_i(w) > 0$ pour tout i implique $w \in W_H$ et $HwAN = HAN$. □

2.5

On note que $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{q}$ (cf. [10, Def. 2.2]). On note $\mathscr{A}$ le sous-ensemble de Cartan de $G|H$ correspondant (cf. [10, Def. 2.2]), i.e.:

$$\mathscr{A} = \{ gH \in G/H \mid g\sigma(g)^{-1} \text{ centralise } \mathfrak{a} \}.$$

Proposition 2 *(i)* $\mathscr{A} = \bigcup_{w \in W} AwH = \bigcup_{w \in W} wAH.$

(ii) On a $AwH \cap Aw'H \neq \emptyset$ si et seulement si $wW_H = w'W_H$ auquel cas $AwH = Aw'H$.

Démonstration. On sait d'après [14, § 3], que $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{m} Ak_i H$ pour des $k_i \in K$.

Soit $k \in K$ tel que $k\sigma(k)^{-1}$ centralise $\mathfrak{a}$ (donc T). Alors:

$$(\mathrm{Ad}\, k)\, \mathrm{Ad}(\sigma(k)^{-1})(T) = T$$
$$\mathrm{Ad}(\sigma(k))^{-1}(T) = \mathrm{Ad}(k^{-1})(T).$$

Notons $T_1 = \mathrm{Ad}(k^{-1})\ T$. C'est un sous-groupe de Cartan de K. Montrons que T_1 est inclus dans H. En effet, si $t_1 \in T_1$, on a $t_1 = k^{-1} t k$ pour un $t \in T$. Alors

$$t_1\, \sigma(t_1)^{-1} = k^{-1} t k\, \sigma(k)^{-1} t^{-1} \sigma(k).$$

Et comme $k\sigma(k)^{-1}$ centralise T:

$$t_1\, \sigma(t_1)^{-1} = k^{-1} t t^{-1} k \sigma(k)^{-1} \sigma(k) = 1.$$

Donc $t_1 \in H$ et T_1 est un sous-groupe de Cartan de $K \cap H$. Il existe $h \in H \cap K$ tel que:

$$\mathrm{Ad}\, h(T_1) = T, \qquad \text{soit encore}$$
$$\mathrm{Ad}(hk^{-1})\ T = T.$$

Donc hk^{-1} normalise T ainsi que kh^{-1}. Alors $kH = wH$ pour un $w \in W$. D'où:

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{w \in W} AwH.$$

Réciproquement, si $g=awh$ avec $a\in A$, $h\in H$ et $w\in N_K(\mathfrak{a})=N_K(T)$, on a:

$$g\sigma(g)^{-1}=aw\sigma(w)^{-1}a^{-1}.$$

Or $\sigma(w)^{-1}w=t_w$, i.e. $w=\sigma(w)\,t_w$. Donc $w\sigma(w)^{-1}=\sigma(w)\,t_w\,\sigma(w)^{-1}=\sigma(wt_w w^{-1})$. Comme w normalise T et que σ fixe T, on a: $w\sigma(w)^{-1}=wt_w w^{-1}\in T$. Comme A et T commutent, on a:

$$g\sigma(g)^{-1}=wt_w w^{-1}\in T,$$

et $g\sigma(g)^{-1}$ centralise T. Ceci achève de prouver (i).

Prouvons (ii). Soient w, $w'\in N_K(\mathfrak{a})$. Comme w, w' normalisent A, on a:

$$AwH\cap Aw'H\neq\emptyset\Leftrightarrow w^{-1}w'\in AH.$$

Or $H=\exp(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h})\,(K\cap H)$ puisque $\mathfrak{h}=(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h})$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{h}$. Alors:

$$\begin{aligned}AwH\cap Aw'H\neq\emptyset\Leftrightarrow\exists a_0\in A,\quad X\in\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h},\\ k\in K\cap H,\quad w^{-1}w'=a_0(\exp X)\,k.\end{aligned}$$

Comme $w^{-1}w'\in K$, en appliquant θ aux deux membres de cette dernière égalité, on obtient:

$$a_0(\exp X)\,k=a_0^{-1}(\exp -X)\,k,$$

soit encore

$$a_0^2=\exp(-2X).$$

Or $A\cap H$ est réduit à l'élément neutre et exp est injective sur $\mathfrak{p}$. D'où $a_0=1$ et $X=0$. Finalement

$$AwH=Aw'H\Leftrightarrow w^{-1}w'\in K\cap H.\quad\square$$

2.6 Choix des mesures de Haar

Le produit scalaire euclidien $\mathscr{B}$ sur $\mathfrak{g}$ introduit en 2.1 permet de sélectionner sur les sous-groupes de Lie de G (et sur G lui-même) une mesure de Haar à gauche qu'on appellera mesure standard (cf. [11, § 7]).

Si $L\subset G$ est compact, la mesure ainsi sélectionnée ne sera pas en général de masse totale 1. On notera $\mathrm{vol}(L)$ cette masse. On appellera mesure normalisée la mesure de Haar sur L de masse totale 1. A l'exception des sous-groupes K et T de G pour lesquels on utilisera les mesures normalisées (notées dk, dt), on utilisera les mesures à gauche standard (sauf mention expresse du contraire) (notée $d\ell$ pour un sous-groupe L). Si $Q\subset L$ sont des sous-groupes de Lie de G et qu'il existe une mesure invariante à gauche sur L/Q, on notera $d\dot{\ell}$ celle qui vérifie:

$$\forall f\in C_c(L),\ \int_L f(\ell)\,d\ell=\int_{L/Q}\Big(\int_Q f(\ell q)\,dq\Big)\,d\dot{\ell}.$$

2.7 Une formule intégrale

Avec ces choix, on a la proposition suivante:

Proposition 3 *Soit $w\in W$. Soit C une chambre de Weyl dans $\mathfrak{a}$ relativement à Δ (pas nécessairement celle correspondant à $\Delta^+=\Delta_{\mathfrak{p}}^+$). On note $\mathscr{C}=\exp C$. Alors:*

(i) l'application F_w: $H/T \times \mathscr{C} \to G/H$ *définie par* $F_w(hT, a) = hwaH$ *est un difféomorphisme de* $H/T \times \mathscr{C}$ *sur son image notée* $\Omega_w(C)$.

(ii) Si φ *est continue sur* G/H *à support compact dans* $\Omega_w(C)$, *on a*:

$$\int_{G/H} \varphi(gH)\, d\dot{g} = C_G \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} \varphi(hwaH)\, D_w(a)\, da\, d\dot{h}$$

où:

$$\begin{aligned} D_w(a) &= \prod_{\alpha\in\Delta^+} |a^{-\alpha} - a^{\alpha} t_w^{\alpha}|^2 \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta^+} |a^{\alpha} - a^{-\alpha} t_w^{-\alpha}|^2 \\ &= \prod_{\alpha\in\Delta} |a^{-\alpha} - a^{\alpha} t_w^{\alpha}| \end{aligned}$$

et $C_G = (\frac{1}{2})^{|\Delta|} (\operatorname{vol} T)$.

Démonstration. Prouvons l'injectivité de F_w.

Supposons $hwaH = h'wa'H$ avec $h, h' \in H$ et $a, a' \in \mathscr{C}$. Si $xH = yH$, on a $x\sigma(x^{-1}) = y\sigma(y^{-1})$. Ici cela donne: $hwa^2\sigma(w^{-1})\ h^{-1} = h'w(a')^2\sigma(w^{-1})\ (h')^{-1}$. Mais $\sigma(w)^{-1}w = t_w$. D'où:

$$hwa^2 t_w w^{-1} h^{-1} = h'w(a')^2 t_w w^{-1} (h')^{-1}.$$

Donc $a^2 t_w$ et $a'^2 t_w$ sont conjugués sous G. Or ce sont des éléments réguliers du sous-groupe de Cartan TA de G. Donc leurs composantes déployées sont conjuguées par un élément de W. Mais a^2 et a'^2 sont des éléments de $\mathscr{C}$. Donc $a^2 = a'^2$, ce qui implique $a = a'$. Alors $h'^{-1}h$ centralise l'élément régulier de TA, $wa^2 t_w w^{-1}$. Donc $h'^{-1}h$ centralise TA. C'est donc un élément de TA et même de T puisque $TA \cap H = T$. D'où $hT = h'T$ et l'injectivité de F_w est prouvée. Etudions maintenant la régularité de F_w. Pour cela, si $h \in H$, $a \in \mathscr{C}$, on identifie l'espace tangent à G/H en $hwaH$ à $\mathfrak{q}$ en associant à $X \in \mathfrak{q}$ le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe dans G/H, $t \to (hwa \exp tX)\, H$. De façon similaire, l'espace tangent en (hT, a) à $H/T \times \mathscr{C}$ s'identifie à $\mathfrak{t}^{\perp} \times \mathfrak{a}$ où $\mathfrak{t}^{\perp}$ désigne l'orthogonal dans $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{t}$ (pour $\mathscr{B}$). Pour chaque $\alpha \in \Delta^+$, on choisit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ avec $\|X_\alpha\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et l'on pose

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= (\operatorname{Ad} w)(X_\alpha) + \sigma((\operatorname{Ad} w)\, X_\alpha) \\ Z_\alpha &= i(\operatorname{Ad} w)(X_\alpha) + \sigma(i(\operatorname{Ad} w)(X_\alpha)) \end{aligned}$$

Alors $(Y_\alpha)_{\alpha\in\Delta^+}$, $(Z_\alpha)_{\alpha\in\Delta^+}$ est une base orthonormée de $\mathfrak{t}^{\perp}$. Comme $\sigma(w) = wt_w$ (cf. Lemme 1), on a (en notant wX_α au lieu de $(\operatorname{Ad} w)(X_\alpha)$, etc. ...):

$$\begin{aligned} Y_\alpha &= wX_\alpha + t_w^{\alpha}\, w\sigma(X_\alpha) \\ Z_\alpha &= i(wX_\alpha - t_w^{\alpha}\, w\sigma(X_\alpha)). \end{aligned}$$

Des égalités pour $X \in \mathfrak{t}^{\perp}$:

$$\begin{aligned} h(\exp X)\, wa &= hwa(a^{-1}w^{-1} \exp X wa) \\ &= hwa \exp(\operatorname{Ad}(a^{-1}w^{-1})\, X) \end{aligned}$$

on déduit, en désignant par $P_{\mathfrak{q}}$ la projection orthogonale de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{q}$,

$$(dF_w)_{(hT,a)}(X,0)=P_{\mathfrak{q}}(\mathrm{Ad}(a^{-1}w^{-1})X).$$

De même on voit que:

$$\forall Y\in\mathfrak{a},\qquad (dF_w)_{(hT,a)}(0,Y)=Y.$$

Calculons $(dF_w)_{(hT,a)}(Y_\alpha,0)=Y'_\alpha$.
On a:

$$\begin{aligned}Y'_\alpha &= P_{\mathfrak{q}}(a^{-\alpha}X_\alpha+t_w^\alpha a^\alpha\sigma(X_\alpha))\\ &=\tfrac{1}{2}(a^{-\alpha}X_\alpha+t_w^\alpha a^\alpha\sigma(X_\alpha)-\sigma(a^{-\alpha}X_\alpha+t_w^\alpha a^\alpha\sigma(X_\alpha)))\\ &=\tfrac{1}{2}(a^{-\alpha}X_\alpha+t_w^\alpha a^\alpha\sigma(X_\alpha)-a^{-\alpha}\sigma(X_\alpha)-t_w^\alpha a^\alpha X_\alpha))\\ &=\tfrac{1}{2}(a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha)(X_\alpha-\sigma(X_\alpha)).\end{aligned}$$

Soit

$$Y'_\alpha=\tfrac{1}{2}(a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha)\,U_\alpha\quad\text{où}\quad U_\alpha=X_\alpha-\sigma(X_\alpha).$$

De même on calcule $Z'_\alpha=(dF_w)_{(hT,a)}(Z_\alpha,0)$ et l'on a:

$$Z'_\alpha=\tfrac{1}{2}(a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha)\,V_\alpha\quad\text{où}\quad V_\alpha=i(X_\alpha+\sigma(X_\alpha)).$$

Si $H_1,\ldots,H_\ell$ est une base orthonormée de $\mathfrak{a}$, on voit que la famille des H_i, U_α, V_α forme une base orthonormée de $\mathfrak{q}$. La régularité de F_w en résulte. Par ailleurs, la mesure sur G/H, (resp. H/T, A) est donnée par une forme différentielle ω (resp. ω_1, ω_2) sur G/H, (resp. H/T, A) qui vaut 1 (resp. $(\mathrm{vol}\,T)^{-1}$, 1) sur une base orthonormée de $T_{hwaH}(G/H)$ identifiée à $\mathfrak{q}$ comme ci-dessus (resp. $T_{hT}(H/T)$ identifie à $\mathfrak{t}^\perp$ comme ci-dessus, resp. $T_a(A)$ identifiée à $\mathfrak{a}$).

Expliquons le facteur $(\mathrm{vol}\,T)^{-1}$. Il vient de l'utilisation de la mesure normalisée sur T pour la normalisation de la mesure sur H/T. Le calcul de la différentielle de F_w en (hT,a) montre que l'image réciproque de ω, forme sur $\Omega_w(C)$, par F_w, $F_w^*\,\omega$ vérifie l'égalité:

$$F_w^*\,\omega=\mathrm{vol}\,T\prod_{\alpha\in\Delta^+}\left|\frac{a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha}{2}\right|^2\omega_1\wedge\omega_2.$$

D'où la formule intégrale. On obtient les autres expressions de D_w en remarquant que:

$$|a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha|=|t_w^{-\alpha}|\,|a^{-\alpha}-t_w^\alpha a^\alpha|$$

puisque $t_w^\alpha=\pm 1$. Donc

$|a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha|=|a^\alpha-a^{-\alpha}t_w^{-\alpha}|$. □

3 Série principale et vecteurs distributions H-sphériques

3.1

Soit $\lambda\in\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$. On considère $(\pi_\lambda^P, I_\lambda^P)$ la représentation de la série principale sphérique de G induite C^∞ du caractère de P défini par $tan\to a^\lambda$. Plus précisément $I_\lambda=\{f$:

$G \to \mathbb{C} | f$ est C^∞ et $f(x\,t\,a\,n) = a^{-\lambda-\rho} f(x)$, $\forall x \in G$, $t \in T$, $a \in A$, $n \in N_P\}$ et G agit par représentation régulière gauche.

On omettra souvent les indices P lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre. On notera $I = C^\infty(K/T)$ muni de sa topologie usuelle. Si $f \in I_\lambda$ on notera $\tilde{f}$ sa restriction à K qui est invariante à droite par T. On regardera $\tilde{f}$ comme élément de I. Alors $f \to \tilde{f}$ définit une bijection de I_λ sur I et on munit I_λ de la topologie de I transportée par cet isomorphisme. Si $f \in I$ on notera f_λ l'élément de I_λ tel que $\tilde{f}_\lambda = f$.

On notera $\tilde{\pi}_\lambda$ la représentation de G sur I définie par transport de structure de π_λ par l'isomorphisme $f \to \tilde{f}$.

Grâce à la mesure invariante sur K/T, le dual $I' = \mathscr{D}'(K/T)$ contient $I = C^\infty(K/T)$ et même $C(K/T)$. De même le dual I'_λ de I_λ contient $I_{-\lambda}$ et même $C_{-\lambda} = \{f: G \to \mathbb{C} | f$ continue, $f(g\,t\,a\,n) = a^{\lambda-\rho} f(g)\}$ sur lequel agit G par représentation régulière gauche.

De plus π'_λ laisse stable $I_{-\lambda}$ et $C_{-\lambda}$ et coïncide sur $I_{-\lambda}$ avec π_λ et sur $C_{-\lambda}$ avec l'action régulière gauche. De même $\tilde{\pi}'_\lambda$ coïncide sur I avec $\tilde{\pi}_{-\lambda}$.

Le transposé de l'opérateur $I_\lambda \to I$ (resp. $I \to I_\lambda$) défini par $f \to \tilde{f}$ (resp. $f \to f_\lambda$) sera noté $T \in I' \to T_{-\lambda} \in I'_\lambda$ (resp. $T \in I'_\lambda \to \tilde{T} \in I'$), notations qui sont compatibles avec les identifications et notations antérieures.

On a la propriété de régularisation suivante: Si $\varphi \in C_c^\infty(G)$ et $T \in I'_\lambda$ on a:

$$\pi'_\lambda(\varphi)\, T \in I_{-\lambda}.$$

Remarque 2 On sait que π_λ est à croissance modérée au sens de [5], comme espace des vecteurs C^∞ d'une représentation Banachique. Alors si l'on note $(I_\lambda)_{(K)}$ le $(\mathfrak{g}, K)$-module des vecteurs K-finis de I_λ, tout opérateur d'entrelacement de $(\mathfrak{g}, K)$-module entre $(I_\lambda)_{(K)}$ et $(I_{\lambda'})_{(K)}$ se laisse prolonger en un opérateur d'entrelacement continu de G-modules entre I_λ et $I_{\lambda'}$. En particulier lorsque le prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacement est défini, il définit un opérateur continu entre I_λ et $I_{w\lambda}$ et on peut considérer son transposé (voi plus loin).

3.2

On écrit $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ dans la base de $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ formée des restrictions $\tilde{\delta}_i$ des δ_i à $\mathfrak{a}$:

$$\lambda = 2 \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \tilde{\delta}_i.$$

On a
$$\rho_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{\ell} \delta_i \quad \text{et} \quad \rho = 2 \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{\delta}_i.$$

On suppose $\lambda - \rho$ strictement dominant i.e. $\mathrm{Re}(\lambda_i - 1) > 0$ pour tout i. On introduit alors des fonctions $\xi_\lambda^{w,P}$, $w \in W$ définies par

$$\xi_\lambda^{w,P}(g) = \prod_{i=1}^{\ell} |\varepsilon_i(g)|^{\lambda_i - 1} \quad \text{si } g \in HwP$$
$$= 0 \quad \text{si } g \notin HwP.$$

Alors il résulte de la Proposition 1 que les fonctions $\xi_\lambda^{w,P}$ sont continues sur G et d'après les propriétés des ε_i on a:

$$\xi_\lambda^{w,P} \in C_{-\lambda} \subset I'_\lambda.$$

C'est un élément H-invariant de I'_λ sous π'_λ qui est propre sous l'action de $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, centralisateur dans $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{h}$ (cf. [13, Th. 5-1]). Sa restriction à K (ou K/T) est une distribution $\tilde{\xi}_\lambda^{w,P}$. La fonction $\lambda \to \tilde{\xi}_\lambda^{w,P}$ définie pour $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ avec $\lambda - \rho$ strictement Δ^+-dominant et à valeurs dans $\mathscr{D}'(K/T) = I'$ s'étend en une fonction méromorphe cf. [1] ou [13]. Ici on peut même utiliser [2] pour voir que les singularités de $\tilde{\xi}_\lambda^{w,P}$ sont situées sur une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ (de complémentaire connexe).

On notera encore de la même façon les prolongements méromorphes des $\tilde{\xi}_\lambda^{w,P}$ et $\xi_\lambda^{w,P}$ désignera (lorsque $\tilde{\xi}_\lambda^{w,P}$ est défini) l'élément de I'_λ tel que

$$(\xi_\lambda^{w,P})^\sim = \tilde{\xi}_\lambda^{w,P}.$$

Lorsque $\xi_\lambda^{w,P}$ et $\xi_{-\lambda}^{w,P}$ sont définis, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G/H)$ on a $\pi'_\lambda(\varphi)\, \xi_\lambda^{w,P} \in I_{-\lambda}$ et l'expression

$$\langle \pi'_\lambda(\varphi)\, \xi_\lambda^{w,P}, \xi_{-\lambda}^{w,P} \rangle_{I_{-\lambda}, I'_{-\lambda}}$$

a un sens et permet de définir une distribution $\Theta_\lambda^{w,P}$ que nous proposons d'étudier. On notera ξ_λ ou ξ_λ^P pour $\xi_\lambda^{1,P}$ et Θ_λ ou Θ_λ^P pour $\Theta_\lambda^{1,P}$.

4 Etude du comportement asymptotique des distributions Θ_λ

4.1 Définition de fonctions sur G/H à support dans $\Omega_w(C)$

On se donne une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ relativement à Δ. On reprend les notations de la Proposition 3. On se donne $\psi \in C_c^\infty(H/T)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathscr{C})$. On définit une fonction $\Phi = \Phi^w(\psi, \varphi)$ sur G/H par:

$$\Phi(gH) = 0 \quad \text{si } gH \notin \Omega_w(C)$$
$$\Phi(hwaH) = \psi(h)\,\varphi(a) \quad \text{si } h \in H, \quad a \in A.$$

On se fixe maintenant $X_0 \in -C$ et on note $a_t = \exp tX_0$, $t > 0$. On définit pour $t > 0$, $\varphi_t \in C_c^\infty(\mathscr{C})$ par:

$$\varphi_t(a) = 0 \quad \text{si } a \in \mathscr{C} \quad \text{et} \quad aa_t \notin \mathscr{C}$$
$$\varphi_t(a) = \varphi(aa_t) \quad \text{si } a \in \mathscr{C} \quad \text{et} \quad aa_t \in \mathscr{C}.$$

On pose: $\Phi_t^w = \Phi^w(\psi, \varphi_t)$.

4.2

Soit $x \in W$ et $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Notons $e_{x\delta_i}$ un vecteur dans l'espace de π_i de poids $x\delta_i$ sous $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ et de norme 1, et $e'_{x\delta_i}$ un vecteur dans l'espace de π'_i de poids $-x\delta_i$

tel que $\langle e_{x\delta_i}, e'_{x\delta_i}\rangle = 1$. Alors $e_{x\delta_i} \otimes e'_{x\delta_i}$ est indépendant du choix de $e_{x\delta_i}$. On définit une fonction C^∞ sur G par:

$$\eta_{i,x}(g) = ((\pi_i(g) \otimes \pi'_i(\sigma(g)))(e_{\delta_i} \otimes e'_{\delta_i}), e_{x\delta_i} \otimes e'_{x\delta_i}).$$

Lemme 2 *(i)* $\forall g \in G, a \in A, n \in N, t, t' \in T, \eta_{i,x}(t' g t a n) = a^{2\delta_i} \eta_{i,x}(g)$
(ii) $\forall k \in K, \eta_{i,x}(k) = t_x^{\delta_i} |(\pi_i(k) e_{\delta_i}, e_{x\delta_i})|^2$
(ii) $\forall g \in G, \eta_{i,x}(g) = t_x^{\delta_i} |(\pi_i(g) e_{\delta_i}, e_{x\delta_i})|^2$.

Démonstration. (i) résulte immédiatement de la définition. Identifions l'espace V'_i de π'_i avec l'espace de π_i par l'application antilinéaire $e \to e'$ de V_i dans V'_i définie par $e'(v) = (v, e)$. La notation $(e^j_i)'$ est cohérente avec cette définition. Dans cette correspondance on a:

$$\forall k \in K, \forall e, f \in V_i, (e', f') = \overline{(e, f)} \quad \text{et} \quad \pi'_i(k) e' = (\pi_i(k) e)'.$$

Donc: $(\pi'_i(k) e', f') = \overline{(\pi_i(k) e, f)}$.

Par ailleurs, comme σ agit trivialement sur T on voit que π'_i et $\pi'_i \circ \sigma$ définissent des représentations équivalentes (et irréductibles) de K. Il existe donc un unique opérateur unitaire $T: V'_i \to V'_i$ tel que T entrelace π'_i et $\pi'_i \circ \sigma$ restreintes à K et tel que:

$$Te'_{\delta_i} = e'_{\delta_i}.$$

Supposons (ce qui est possible) que $e_{x\delta_i} = \pi_i(x) e_{\delta_i}$.

Alors $e'_{x\delta_i} = \pi'_i(x) e'_{\delta_i}$ et:

$$\begin{aligned} Te'_{x\delta_i} &= T\pi'_i(x) e'_{\delta_i} \\ &= \pi'_i(\sigma(x)) Te'_{\delta_i} \\ &= \pi'_i(x t_x) e'_{\delta_i}, \end{aligned}$$

puisque $\sigma(x) = x t_x$ (cf. Lemme 1) et $Te'_{\delta_i} = e'_{\delta_i}$.

D'où

$$\begin{aligned} Te'_{x\delta_i} &= t_x^{-\delta_i} \pi'_i(x) e'_{\delta_i} \\ &= t_x^{\delta_i} (\pi_i(x) e_{\delta_i})', \qquad \text{car } t_x^2 = 1, \\ &= t_x^{\delta_i} e'_{x\delta_i}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (\pi'_i(\sigma(k)) e'_{\delta_i}, e'_{x\delta_i}) &= ((\pi'_i(\sigma(k))(Te'_{\delta_i}), e'_{x\delta_i}) \\ &= (T\pi'_i(k) e'_{\delta_i}, e'_{x\delta_i}) \\ &= (\pi'_i(k) e'_{\delta_i}, T^{-1} e'_{x\delta_i}) \\ &= (\pi'_i(k) e'_{\delta_i}, t_x^{-\delta_i} e'_{x\delta_i}) \\ &= t_x^{\delta_i} (\pi'_i(k) e'_{\delta_i}, e'_{x\delta_i}) \\ &= t_x^{\delta_i} \overline{(\pi_i(k) e_{\delta_i}, e_{x\delta_i})}. \end{aligned}$$

D'où $\eta_{i,x}(k) = t_x^{\delta_i} |(\pi_i(k) e_{\delta_i}, e_{x\delta_i})|^2$ ce qui prouve (ii). Alors (iii) résulte de (i), (ii) et de la décomposition d'Iwasawa de G. □

Donc si $x \in W_H$, $\eta_{i,x}$ est positive ou nulle sur G et si $\lambda - \rho$ est strictement Δ^+-dominant on peut définir

$$\eta_{\lambda,x} = \prod_{i=1}^{\ell} \eta_{i,x}^{\lambda_i - 1}$$

qui est continue sur G et élément de $C_{-\lambda} \subset I'_\lambda$.

4.3

Théorème 1 *On se fixe w, $x \in W$. On suppose que $C = -x(C^+)$ où C^+ est la chambre de Weyl définie par Δ_P^+. Donc $X_0 \in x(C^+)$. Soient $\psi \in C_c^\infty(H/T)$, $\varphi \in C_c^\infty(\mathscr{C})$. On suppose toujours que $\lambda - \rho$ est strictement Δ^+-dominant.*

(i) si $x \notin W_H$ on a:

$$\lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \pi'_\lambda(\Phi_t^w(\psi, \varphi)) \xi_\lambda = 0.$$

(ii) Si $x \in W_H$, l'élement de I'_λ, $u_{\lambda,x}^w$ défini par

$$u_{\lambda,x}^w = \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} \psi(hT) \varphi(a) a^{-2x\rho} \pi'_\lambda(hwa) \eta_{\lambda,x} \, d\dot{h} \, da$$

est en fait dans $I_{-\lambda}$ et

$$\lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \pi'_\lambda(\Phi_t^w(\psi, \varphi)) \xi_\lambda = C_G \, u_{\lambda,x}^w.$$

Dans (i) et (ii) les convergences ont lieu dans $I_{-\lambda}$.

4.4

Remarquons qu'il suffit pour démontrer le théorème de s'intéresser aux restrictions à K des éléments de $C_{-\lambda}$ considérés, d'après la définition de la topologie sur $I_{-\lambda}$. Nous utiliserons, entre autres, le lemme suivant:

Lemme 3 *Soit $(f_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ une famille d'éléments de $C^\infty(K)$ telle que*

(i) $\forall D \in U(\mathfrak{k})$, $L_D f_t$ admet une limite simple lorsque t tend vers $+\infty$.

(ii) $\forall D \in U(\mathfrak{k})$, $\exists C_D > 0$, $\forall k \in K$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|L_D f_t(k)| \leqq C_D$.

Alors f_t converge uniformément vers $f \in C^\infty(K)$ et pour tout $D \in U(\mathfrak{k})$, $(L_D f_t)$ converge uniformément vers $L_D f$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après [15, Lemme 5.1], il existe $D_1, \ldots, D_n \in U(\mathfrak{k})$ et $C > 0$ tels que

$$\forall f \in C^\infty(K), \quad |f(e)| \leqq C \sum_{i=1}^{n} \int_K |(L_{D_i} f)(k)| \, dk$$

et en appliquant cette inégalité aux fonctions $R_y f$, $y \in K$ et l'invariance de la mesure dk, on a

$$\forall f \in C^\infty(K), \quad \forall g \in K, \quad |f(g)| \leqq C \sum_{i=1}^{n} \int_K |L_{D_i} f(k)| \, dk.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue et nos hypothèses impliquent que les fonctions $L_{D_i} f_t$ convergent dans $L^1(K)$ lorsque t tend vers $+\infty$. L'inégalité ci-dessus implique la convergence uniforme de (f_t). On procède de même pour les dérivées des f_t. □

4.5

On va poser $f_t = (a_t^{-x(\lambda+\rho)} \pi'_\lambda(\Phi_t^w) \xi_\lambda)^\sim \in I$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, on va étudier $L_D f_t$ pour $D \in U(\mathfrak{k})$. Posons

$$F_t = \pi'_\lambda(\Phi_t^w) \xi_\lambda \in I_{-\lambda}.$$

Alors

$$\begin{aligned} L_D F_t &= \pi_{-\lambda}(D) F_t \\ &= \pi'_\lambda(D) \pi'_\lambda(\Phi_t^w) \xi_\lambda \\ &= \pi'_\lambda(L_D \Phi_t^w) \xi_\lambda. \end{aligned}$$

Pour cette raison on s'intéresse à $L_D \Phi_t^w(\psi, \varphi)$. On introduit $\mathscr{R}_x$ l'algèbre à élément unité des fonctions sur A^{reg} (ensemble des éléments réguliers de A), engendrée par les fonctions $\dfrac{1}{1-ua^{2\alpha}}$, a^α où $\alpha \in x(\Delta^+)$ et $u \in \mathbb{C}$ avec $|u|=1$.

Proposition 4 *Soit $D \in U(\mathfrak{g})$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$U_1, \ldots, U_p \in U(\mathfrak{h}), \qquad Y_1, \ldots, Y_p \in U(\mathfrak{a}),$$
$$\psi_1, \ldots, \psi_p \in C^\infty(H/T), \qquad \varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathscr{R}_x$$

tels que:

$$\forall \psi \in C_c^\infty(H/T), \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathscr{C}),$$
$$L_D \Phi^w(\psi, \varphi) = \sum_{i=1}^{p} \Phi^w(\psi_i(L_{U_i} \psi), \quad \varphi_i(L_{Y_i} \varphi)).$$

Pour démontrer cette proposition nous allons établir plusieurs lemmes.

Lemme 4 *Si $Y \in U(\mathfrak{a})$ et $\varphi_1 \in \mathscr{R}_x$, alors $L_Y \varphi_1 \in \mathscr{R}_x$.*

Démonstration. Si $Y \in \mathfrak{a}$, $\alpha \in \Delta^+$, $L_Y(a^\alpha) = -\alpha(Y) a^\alpha \in \mathscr{R}_x$

$$L_Y\left(\frac{1}{1-ua^{2\alpha}}\right) = (L_Y a^{2\alpha}) \frac{u}{(1-ua^{2\alpha})^2} \in \mathscr{R}_x.$$

Une récurrence sur le degré de $Y \in U(\mathfrak{a})$ donne le résultat voulu. □

Lemme 5 *Si* $X \in \mathfrak{g}$, *il existe* $V_1, \ldots, V_r \in \mathfrak{h}_w = \mathrm{Ad}\, w^{-1}(\mathfrak{h})$, $Y \in \mathfrak{a}$, $Z_1, \ldots, Z_s \in \mathfrak{h}$ *et* $\tau_1, \ldots, \tau_r, v_1, \ldots, v_s \in \mathscr{R}_x$ *tels que*:

$$\forall a \in A^{\mathrm{reg}}, \qquad X = \sum_{i=1}^{r} \tau_i(a)\, V_i + Y + \sum_{j=1}^{s} v_j(a)(\mathrm{Ad}\, a)(Z_i).$$

Démonstration. Il suffit de prouver le lemme pour des éléments d'une base de $\mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{h}_w$ ou $X \in \mathfrak{a}$ le lemme est évident. Notons $\mathfrak{n}_x = \mathrm{Ad}\, x(\mathfrak{n})$. Alors comme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

on a aussi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_w \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_x$$

(en changeant de forme réelle et de parabolique minimal).

Il reste donc à prouver le lemme pour $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ avec $\alpha \in x(\Delta^+)$. On note $\sigma' = \mathrm{Ad}\, w^{-1} \circ \sigma \circ \mathrm{Ad}\, w$. C'est une involution antilinéaire de $\mathfrak{g}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{h}_w$. Il est clair que $\sigma\sigma'(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$. Comme $\sigma\sigma'$ est $\mathbb{C}$-*linéaire*, $\sigma\sigma'$ agit sur $\mathfrak{g}^\alpha$ par un scalaire u_α. Mais, σ, σ' sont des transformations orthogonales de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathscr{B}$) donc

$$u_\alpha = \pm 1$$

et si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ on a:

$$\sigma'(X) = u_\alpha\, \sigma(X).$$

Posons

$$Z = X + \sigma(X) \in \mathfrak{h}$$

et

$$V = X + \sigma'(X) \in \mathfrak{h}_w.$$

Alors $\sigma(X)$ et $\sigma'(X) = u_\alpha\, \sigma(X)$ sont de poids $-\alpha$ sous $\mathfrak{a}$ et l'on a:

$$(\mathrm{Ad}\, a)(Z) = a^\alpha X + a^{-\alpha} \sigma(X).$$

Or

$$V = X + u_\alpha\, \sigma(X).$$

D'où

$$X = -\frac{u_\alpha\, a^{-\alpha}}{a^\alpha - u_\alpha\, a^{-\alpha}}\, V + \left(\frac{1}{a^\alpha - u_\alpha\, a^{-\alpha}}\right)(\mathrm{Ad}\, a)(Z)$$

i.e.

$$X = \frac{V}{(1 - u_\alpha\, a^{2\alpha})} - \frac{u_\alpha\, a^\alpha}{(1 - u_\alpha\, a^{2\alpha})}(\mathrm{Ad}\, a)(Z)$$

et X a la forme voulue. □

Démonstration de la Proposition 4. Un argument de récurrence sur le degré D et le Lemme 3, montre qu'il suffit de démontrer la proposition pour $D \in \mathfrak{g}$. Soit donc $X \in \mathfrak{g}$. D'abord $L_X\, \Phi^w(\psi, \varphi)$ est clairement nulle en dehors de $\Omega_w(C)$. Maintenant, en utilisant une base (X_ℓ) de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}(hw)^{-1} X = \sum_{\ell=1}^{\dim \mathfrak{g}} v_\ell(h)\, X_\ell$ où les v_ℓ sont des éléments de $C^\infty(H)$. En appliquant le lemme précédent aux X_l on en déduit l'existence de $V_i \in \mathfrak{h}_w$, $Y_j \in \mathfrak{a}$, $Z_k \in \mathfrak{h}$, ω_i, ω'_j, $\omega''_k \in C^\infty(H)$, φ_i, φ'_j, $\varphi''_k \in \mathscr{R}_x$ tels que: $\forall a \in A^{\mathrm{reg}}$, $\forall h \in H$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ad}(hw)^{-1} X = \sum_{i=1}^{r} \omega_i(h)\,\varphi_i(a)\,V_i \\ + \sum_{j=1}^{s} \omega'_j(h)\,\varphi'_j(a)\,Y_j \\ + \sum_{k=1}^{t} \omega''_k(h)\,\varphi''_k(a)\,(\operatorname{Ad} a)\,(Z_k).\end{aligned}$$

En tenant compte de $\exp(-tX)\,hwa = hw(\exp - t\operatorname{Ad}(hw)^{-1} X)\,a$ il vient facilement, pour $h \in H$ et $a \in \mathscr{C}$

$$(*) \qquad \begin{aligned}(L_X\,\Phi^w(\psi, \varphi))(hwaH) = -\sum_{i=1}^{r} \omega_i(h)\,\varphi_i(a)\,(R_{U_i}\,\psi)(h)\,\varphi(a) \\ + \sum_{j=1}^{s} \omega'_j(h)\,\varphi'_j(a)\,(L_{Y_j}\,\varphi)(a)\end{aligned}$$

où $U_i = (\operatorname{Ad} w)\,(V_i)$.

En effet, si $V \in \mathfrak{h}_w$, $U = (\operatorname{Ad} w)\,(V) \in \mathfrak{h}$ et si $a \in \mathscr{C}$ on a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\Phi^w(\psi, \varphi)\,(hw\,(\exp tV)\,aH)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}\,\Phi^w(\psi, \varphi)\,(h(\exp tU)\,waH)_{|t=0} \\ &= (R_U\,\psi)\,(h)\,\varphi(a).\end{aligned}$$

De même, si $Y \in \mathfrak{a}$,

$$\frac{d}{dt}\,\Phi^w(\psi, \varphi)\,(hw(\exp tY)\,aH)_{|t=0} = \psi(h)\,(-L_Y\,\varphi)\,(a)$$

et si $Z \in \mathfrak{h}$

$$\frac{d}{dt}\,\Phi^w(\psi, \varphi)\,(hw(\exp(t\,(\operatorname{Ad} a)\,(Z))\,aH)_{|t=0} = 0.$$

Mais pour $U \in \mathfrak{h}$, en utilisant une base (T_k) de $\mathfrak{h}$, il existe des fonctions $\theta_k \in C^\infty(H)$ telles que

$$(R_U\,\psi)\,(h) = \sum_{k=1}^{\dim \mathfrak{h}} \theta_k(h)\,(L_{T_k}\,\psi)\,(h).$$

En introduisant ces formules pour les $R_{U_i}\,\psi$ dans (*) on arrive à une expression de $L_X\,\Phi(\psi, \varphi)$ qui est du type de celui de la proposition, à ceci près que les fonctions ψ_i sont dans $C^\infty(H)$ et non dans $C^\infty(H/T)$ i.e.

$$(**) \qquad L_X\,\Phi^w(\psi, \varphi)\,(hwaH) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(h)\,(L_{U_i}\,\psi)\,(h)\,\varphi_i\,(a)\,(L_{Y_i}\,\varphi)\,(a)$$

où $U_i \in U(\mathfrak{h})$, $Y_i \in U(\mathfrak{a})$, $\varphi_i \in \mathscr{R}_x$, $\varphi_i \in C^\infty(H)$.

Mais $\Phi^w(\psi, \varphi)\,(htwaH) = \Phi^w(\psi, \varphi)\,(hwaH)$ pour $t \in T$, et $\psi(ht) = \psi(h)$. On intègre alors les deux membres de l'égalité (**) sur $t \in T$ (en ayant remplacé h par ht) et on obtient l'expression voulue. □

4.6

On revient à l'étude de $L_D f_t$, $D \in U(\mathfrak{k})$ (c.f. début de 4.5). D'après la Proposition 4, calculant $L_D\, \Phi^w(\psi, \varphi)$, et la formule intégrale de la Proposition 3, on a:

$$(L_D f_t)(k) = C_G\, a_t^{-x(\lambda+\rho)} \sum_{i=1}^{p} \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} \psi_i(hT)\,(L_{D_i}\psi)(hT) \cdot \varphi_i(a)\,(L_{Y_i}\varphi_t(a))\, D_w(a)\,(\pi'_\lambda(hwa)\,\xi_\lambda)(k)\, da\, d\dot{h}$$

où $D_i \in U(\mathfrak{h})$, $Y_i \in U(\mathfrak{a})$, $\psi_i \in C^\infty(H/T)$, $\varphi_i \in \mathscr{R}_x$.

Mais $L_{Y_i}\varphi_t = (L_{Y_i}\varphi)_t$. Or il est clair que si $\varphi \in C_c^\infty(\mathscr{C})$ et $v \in C(\mathscr{C})$ on a pour tout $t>0$

$$\int_{\mathscr{C}} \varphi_t(a)\, v(a)\, da = \int_{\mathscr{C}} \varphi(a)\, v(aa_{-t})\, da$$

(notez que $a \in \mathscr{C}$ et $t>0$ impliquent $aa_{-t} \in \mathscr{C}$). D'où

$$(L_D f_t)(k) = C_G\, a_t^{-x(\lambda+\rho)} \sum_{i=1}^{p} \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} (\psi_i\, L_{D_i}\psi)(hT)\, \varphi_i(aa_{-t})\,(L_{Y_i}\varphi)(a) \cdot D_w(aa_{-t})\,(\pi'_\lambda(hwa)\,\pi'_\lambda(a_{-t})\,\xi_\lambda)(k)\, da\, d\dot{h}$$

formule que l'on préfère réécrire sous la forme

$$(L_D f_t)(k) = C_G \sum_{i=1}^{p} \int_{H/T} \int_{\mathscr{C}} (\psi_i\, L_{D_i}\psi)(hT)\, \varphi_i(aa_{-t})\,(L_{Y_i}\varphi)(a) \cdot a_t^{-2x\rho}\, D_w(aa_{-t})\,(\pi'_\lambda(hwa)\, a_t^{-x(\lambda-\rho)}\,\pi'_\lambda(a_{-t})\,\xi_\lambda)(k)\, da\, d\dot{h}.$$

On considère $(L_D f_t)$ (k) comme somme d'intégrales sur $H/T \times \mathscr{C}$ dépendant du paramètre t auxquelles on va appliquer le théorème de convergence dominée pour voir que les hypothèses du Lemme 3 sont vérifiees.

Lemme 5 *On conserve les hypothèses du Théorème 1.*

(i) $\exists C_1 > 0$, $\forall k \in K$, $\forall t > 0$, $|a_t^{-x(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(a_{-t})\,\xi_\lambda)(k)| \leqq C_1$

(ii) $\forall k \in K$, $\lim_{t \to +\infty} a_t^{-x(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(a_{-t})\,\xi_\lambda)(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin W_H \\ \eta_{\lambda,x}(k) & \text{si } x \in W_H. \end{cases}$

Démonstration. On étudie d'abord $\varepsilon_i(a_t k)$:

$$\varepsilon_i(a_t k) = ((\pi_i(a_t k) \otimes \pi'_i(\sigma(a_t k)))\,(e_{\delta_i} \otimes e'_{\delta_i}),\ \sum_{j=0}^{n_i} e_i^j \otimes (e_i^j)').$$

En utilisant le fait que $\theta(a_{-t}) = a_t$, $\sigma(a_t) = a_{-t}$, que e_i^j (resp. $(e_i^j)'$) est de poids μ_j (resp. $-\mu_j$) sous $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ et l'invariance des produits scalaires sous K, on en déduit

$$\varepsilon_i(a_t k) = \sum_{j=0}^{n_i} a_t^{2\mu_j}(\pi_i(k)\, e_{\delta_i}, e_i^j)\,(\pi'_i(\sigma(k))\, e'_{\delta_i}, (e_i^j)').$$

Comme $a_t = \exp tX_0$ avec $X_0 \in x(C^+)$, on a, pour tout j et tout $t>0$: $a_t^{2\mu_j} \leqq a_t^{2x\delta_i}$, puisque π_i est de plus haut poids δ_i.

D'où l'on déduit, en utilisant l'unitarité de π_i et π'_i comme représentations de K:

(4) $$\forall t>0, \quad \forall k\in K, \quad |a_t^{-2x\delta_i}\,\varepsilon_i(a_t k)|\leqq n_i.$$

D'autre part on a:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2x\delta_i}\, a_t^{2\mu_j}=0 \qquad \text{sauf si } \mu_j=x\delta_i$$

(ce qui n'arrive que pour un indice j).

Alors:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2x\delta_i}\,\varepsilon_i(a_t k)=(\pi_i(k)\,e_{\delta_i}, e_{x\delta_i})\times(\pi'_i(\sigma(k))\,e'_{\delta_i}, e'_{x\delta_i})$$

i.e.

(5) $$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2x\delta_i}\,\varepsilon_i(a_t k)=\eta_{i,x}(k)$$

(d'après la définition de $\eta_{i,x}$, c.f. 4.2).

Or

$$(\pi'_\lambda(a_{-t})\,\xi_\lambda)(k)=\xi_\lambda(a_t k) \qquad (\text{car } \xi_\lambda\in C_{-\lambda})$$

et

(6) $$\xi_\lambda=\prod_{i=1}^{\ell}\operatorname{Sup}(\varepsilon_i, 0)^{\lambda_i-1}$$

d'après la définition de ξ_λ et la Proposition 1 (iii).

Alors (4) implique la majoration du lemme en prenant $C_1=\prod_{i=1}^{\ell}(n_i)^{\operatorname{Re}\lambda_i-1}$.

D'autre part (5) implique que pour tout i:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2x\delta_i}\operatorname{Sup}(\varepsilon_i(a_t k), 0)=\operatorname{Sup}(\eta_{i,x}(k), 0)$$

et (6) donne alors:

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda-\rho)}\,\xi_\lambda(a_t k)=\prod_{i=1}^{\ell}(\operatorname{Sup}(\eta_{i,x}(k), 0))^{\lambda_i-1}.$$

Or, si $x\notin W_H$, l'une des fonctions $\eta_{i,x}$ est toujours négative ou nulle d'après le Lemme 2 (iii) et l'on a bien la limite voulue. Si $x\in W_H$, cette fois, toujours d'après le Lemme 2 (iii), toutes les fonctions $\eta_{i,x}$ sont positives et la limite est bien égale à $\eta_{\lambda,x}(k)$. □

Lemme 6 *Soit U un compact de G. Il existe une constante $C_U>0$ (dépendant de λ) telle que*:

$$\forall f\in C_{-\lambda}, \qquad \sup_{(u,k)\in U\times K}|f(uk)|\leqq C_U\sup_{k\in K}|f(k)|.$$

Démonstration. En effet UK est un compact de G, donc contenu dans un sous-ensemble de G de la forme KU_1U_2 avec U_2 compact de A et U_2 compact de

N. Utilisant la propriété $f(kan)=a^{\lambda-\rho}f(k)$, on voit que l'on peut prendre $C_U = \sup_{a\in U_1} |a^{\lambda-\rho}|$ qui est fini puisque U_1 est compact. □

Appliquons les deux lemmes précédents en prenant:

$$U=\{hwa \mid hT\in \operatorname{Supp}\psi, a\in \operatorname{Supp}\varphi\}$$

et posant $C_{\varphi,\psi}=C_U\, C_1$ on a

Lemme 7 *(i)* $\exists C_{\varphi,\psi}$, $\forall k\in K$, $t>0$, $h\in\operatorname{Supp}\psi$, $a\in\operatorname{Supp}\varphi$

$$|a_t^{-x(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(hwaa_{-t})\,\xi_\lambda)(k)|\leqq C_{\varphi,\psi}$$

(ii) $\forall k\in K$, $t>0$, $h\in\operatorname{Supp}\psi$, $a\in\operatorname{Supp}\varphi$

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda-\rho)}(\pi'_\lambda(hwaa_{-t})\,\xi_\lambda)(k)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin W_H\\ (\pi'_\lambda(hwa)\,\eta_{\lambda,x})(k) & \text{si } x\in W_H\end{cases}.$$

Il reste pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée à contrôler $D_w(aa_{-t})$ et $\varphi_i(aa_{-t})$ pour $t>0$ et $a\in$ Supp φ.

A cette fin on va établir:

Lemme 8 *(i) Soit $v\in\mathscr{R}_x$. La famille de fonctions $a\to v(aa_{-t})$ converge simplement (sur $\mathscr{C}$) quand $t\to+\infty$. De plus, il existe $C_{v,\varphi}$ telle que*

$$\forall a\in\operatorname{Supp}\varphi,\qquad \forall t>0,\qquad |v(a_{-t}a)|\leqq C_{v,\varphi}$$

(ii) $\forall a\in\mathscr{C}(=\exp(-x(C^+)))$,

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-2x\rho}\, D_w(aa_{-t})=a^{-2x\rho}$$

et $\exists C_{w,\varphi}$, $\forall a\in\operatorname{Supp}\varphi$, $|a_t^{-2x\rho}\, D_w(aa_{-t})|\leqq C_{w,\varphi}$.

Démonstration. Soit $\alpha\in x\Delta^+$. Alors $(aa_{-t})^\alpha=a^\alpha(\exp-t\alpha(X_0))$. Mais $X_0\in x(C^+)$. D'où $\alpha(X_0)>0$ et $\lim_{t\to+\infty}(aa_{-t})^\alpha=0$. De plus

$$\exists C_{1,\varphi},\quad C_{2,\varphi}\in\,]0,1[,\quad \forall a\in\operatorname{Supp}\varphi,$$
$$C_{1,\varphi}\leqq(aa_{-t})^\alpha\leqq C_{2,\varphi}.$$

En effet $a_{-t}^\alpha\leqq 1$ et si $a\in\mathscr{C}=\exp(-x\Delta^+)$ on a $a^\alpha<1$. Par compacité de Supp φ on en déduit l'existence de $C_{1,\varphi}$ et $C_{2,\varphi}$. Ceci implique facilement (i) pour les générateurs de $\mathscr{R}_x$, a^α et $\dfrac{1}{1-ua^{2\alpha}}$, $\alpha\in x\Delta^+$, $|u|=1$, et donc pour tous les éléments de $\mathscr{R}_x$.

Prouvons (ii). D'après la Proposition 3 on a:

$$D_w(a)=\prod_{\alpha\in\Delta}|a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha|$$
$$=\prod_{\alpha\in x\Delta^+}|a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha|^2$$

car $|a^{-\alpha}-a^\alpha t_w^\alpha|=|a^\alpha-a^{-\alpha}t_w^{-\alpha}|$(car $t_w^\alpha=\pm1=t_w^{-\alpha}$).

Donc

$$D_w(a) = \prod_{\alpha \in x\Delta^+} a^{-2\alpha} |1 - a^{2\alpha} t_w^\alpha|^2$$

et

$$D_w(a a_{-t}) = a_{-t}^{-2x\rho} a^{-2x\rho} \prod_{\alpha \in x\Delta^+} |1 - (a a_{-t})^{2\alpha} t_w^\alpha|^2.$$

D'où

$$\lim_{t \to +\infty} a_t^{-2x\rho} D_w(a a_{-t}) = a^{-2x\rho}$$

(car $\lim\limits_{t \to +\infty} (a a_{-t})^{2\alpha} = 0$).

Par ailleurs la majoration de $(a a_{-t})^\alpha$, pour $t > 0$, $\alpha \in x\Delta^+$ et $a \in \operatorname{Supp} \varphi$, donnée ci-dessus permet de majorer $a_t^{-2x\rho} D_w(a a_{-t})$ comme désiré. □

4.7 Fin de la démonstration du Théorème 1

Le Lemme 7 et le Lemme 8 permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée à l'expression de $(L_D f_t)(k)$ (cf. début de 4.6) et d'appliquer le Lemme 3. Le Théorème 1 en résulte.

5 Intégrales d'entrelacement

5.1

Dans ce paragraphe nous aurons à considérer d'autres paraboliques minimaux de G que le parabolique de départ, P. Lorsque nous en aurons besoin nous utiliserons P en indice (supérieur ou inférieur) pour indiquer la dépendance en P de nos constructions. Nous l'omettrons lorsque seul P interviendra. On note $V_P = \theta(N_P)$. Si $w \in W$ on normalise la mesure de Haar sur $V_P \cap w^{-1} N_P w$ comme dans [12], ce qui est un choix différent des mesures standard (et des choix de [6]). Ces mesures seront encore notées dv.

Pour $w \in W$ on note $D_P(w) = \{\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re}(\lambda, \alpha) > 0,\ \forall \alpha \in S_P(w)\}$ où $S_P(w) = \Delta_P^+ \cap -w^{-1}(\Delta_P^+)$.

On définit alors pour $\lambda \in D_P(w)$ l'intégrale d'entrelacement $A_P(w, \lambda)$: $I_\lambda^P \to I_{w\lambda}^P$ par la formule suivante (cf. [12, Formules 1.7, 1.9]):

$$\forall f \in I_\lambda, \quad \forall x \in G, (A_P(w, \lambda) f)(x) = \int_{V_P \cap w^{-1} N_P w} f(x w v)\, dv$$

où l'intégrale converge absolument.

Remarque 3 On peut considérer le transposé $A'_P(w, \lambda)$ de $A_P(w, \lambda)$. Mais les intégrales d'entrelacement vérifient des propriétés de dualité et l'on a d'après [12, Prop. 7.8 (ii)] et la continuité des A_P:

$$A'_P(w, \lambda)_{|I^P_{-w\lambda}} = A_P(w^{-1}, -w\lambda).$$

D'autre part, comme on est dans le cas sphérique, $A_P(w, \lambda)$ ne dépend pas du choix du représentant de w utilisé.

Pour $w \in W$ on définit un opérateur, $R(w)$, de $C(G/T)$ dans lui-même par:

$$R(w) f(g) = f(g w).$$

Il est clair que $R(w)$ envoie I_λ^P dans $I_{w\lambda}^{wPw^{-1}}$ et entrelace π_λ^P et $\pi_{w\lambda}^{wPw^{-1}}$. Encore une fois $R(w)$ ne dépend pas du choix du représentant de w.

Le lemme suivant est aisé à établir et laissé au lecteur.

Lemme 9 *Soit $w \in W$, $\alpha \in \Delta$ et $s_\alpha \in W$ la symétrie correspondante. On notera $\beta = w\alpha$. Alors $s_\beta = w s_\alpha w^{-1}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$. Si $s_\alpha \lambda \in D_P(s_\alpha)$ on a $s_\beta w\lambda = w s_\alpha \lambda \in D_{wPw^{-1}}(s_\beta)$ et le diagramme suivant est commutatif*:

$$\begin{array}{ccc} I^P_{s_\alpha \lambda} & \xrightarrow{A_P(s_\alpha, s_\alpha \lambda)} & I^P_\lambda \\ {\scriptstyle R(w)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R(w)} \\ I^{wPw^{-1}}_{ws_\alpha \lambda} & \xrightarrow{A_{wPw^{-1}}(s_\beta, ws_\alpha \lambda)} & I^{wPw^{-1}}_{w\lambda} \end{array}$$

Lemme 10 *Soit $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ avec* $\mathrm{Re}(\lambda - \rho_P)$ *strictement Δ_P^+-dominant. Alors, pour $w \in W$, on a*:

$$R(w)' \xi_{w\lambda}^{1, wPw^{-1}} = \xi_\lambda^{w, P}$$

où $R(w)'$ est le transposé de l'opérateur $R(w)$: $I_\lambda^P \to I_{w\lambda}^{wPw^{-1}}$.

Démonstration. Il est clair que $R(w)'$ agit sur $C_{-w\lambda}^{wPw^{-1}} \subset (I_{w\lambda}^{wPw^{-1}})$ par $R(w^{-1})$, car pour tout $f, g \in C(K/T)$,

$$\int_{K/T} f(kw) g(k) \, d\dot{k} = \int_{K/T} f(k) g(kw^{-1}) \, d\dot{k}.$$

L'égalité à prouver se réduit alors à

$$\forall g \in G, \quad \xi_{w\lambda}^{1, wPw^{-1}}(g w^{-1}) = \xi_\lambda^{w, P}(g).$$

Or, si $g \notin HwP$, $\xi_\lambda^{w,P}(g) = 0$ et $g w^{-1} \notin HwPw^{-1}$ implique $\xi_\lambda^{1, wPw^{-1}}(g w^{-1}) = 0$. Donc:

$$\forall g \notin HwP, \quad \xi_\lambda^{w,P}(g) = \xi_{w\lambda}^{wPw^{-1}}(g w^{-1}) = 0.$$

Maintenant, si $g \in HwP$, on a $g = hwan$ avec $h \in H$, $a \in A$, $n \in N_P$. Donc:

$$\xi_\lambda^{w,P}(g) = a^{\lambda - \rho_P}$$

et

$$\xi_{w\lambda}^{1, wPw^{-1}}(g w^{-1}) = \xi_{w\lambda}^{1, wPw^{-1}}(h w^{-1} w a w^{-1} w n w^{-1}).$$

Mais $w n w^{-1} \in N_{wPw^{-1}}$, $w a w^{-1} \in A$. D'où:

$$\xi_{w\lambda}^{1, wPw^{-1}}(g w^{-1}) = (w a w^{-1})^{w\lambda - \rho_{wPw^{-1}}}.$$

Mais $\rho_{wPw^{-1}} = w \rho_P$. D'où l'égalité voulue. $\square$

5.2

Rappelons (cf. § 3.1) que l'on a un isomorphisme $T \to \tilde{T}$ (resp. $T \to T_{-\lambda}$) de $(I_\lambda^P)'$ sur $I' = \mathscr{D}'(K/T)$ (resp. de I' sur $(I_\lambda^P)'$).

Si $w \in W$ on note $\delta_w \in \mathscr{D}'(K/T)$ la distribution de Dirac en $wT \in K/T$. On notera δ_w^λ au lieu de $(\delta_w)_{-\lambda}$ (ou $\delta_w^{\lambda, P}$ si on veut faire apparaître la dépendance en P). Alors on a:

Lemme 11 *Soit* $x \in W_H$. *Soit* w_0 *l'élément de* W *tel que* $w_0(\Delta_P^+) = -\Delta_P^+$ *(on a* $w_0^2 = 1$*). Si* $\operatorname{Re}(\lambda - \rho_P)$ *est strictement* Δ_P^+*-dominant, on a*:

$$A'_P(w_0, \lambda)\, \delta_{x w_0}^{w_0 \lambda, P} = \eta_{\lambda, x}^P.$$

Démonstration. On omet les indices P. On a $\lambda \in D(w_0)$ et $A(w_0, \lambda)$: $I_\lambda \to I_{w_0 \lambda}$ est bien défini. Donc $A'(w_0, \lambda)$ envoie $I'_{w_0 \lambda}$ sur I'_λ et comme $\eta_{\lambda, x} \in C_{-\lambda} \subset I'_\lambda$, l'égalité du lemme a un sens. Pour la prouver il suffit de comparer, pour $f \in I_\lambda$, $\langle A'(w_0, \lambda)\, \delta_{x w_0}^{w_0 \lambda}, f \rangle_{I'_\lambda, I_\lambda}$ et $\langle \eta_{\lambda, x}, f \rangle_{I'_\lambda, I_\lambda}$. Mais

$$\begin{aligned} \langle A'(w_0, \lambda)\, \delta_{x w_0}^{w_0 \lambda}, f \rangle &= \langle \delta_{x w_0}^{w_0 \lambda}, A(w_0, \lambda) f \rangle \\ &= (A(w_0, \lambda) f)(x w_0) \\ &= \int_{\theta(N)} f(x w_0 w_0 v)\, dv \\ &= \int_{\theta(N)} f(x v)\, dv. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \langle \eta_{\lambda, x}, f \rangle &= \int_K \eta_{\lambda, x}(k) f(k)\, dk \\ &= \int_K \eta_{\lambda, x}(x k) f(x k)\, dk. \end{aligned}$$

Mais avec notre normalisation des mesures de Haar sur K et $\theta(N)$, on a pour tout $F \in C_{-2\rho}$

$$\int_K F(k)\, dk = \int_{\theta(N)} F(v)\, dv$$

(cf. [18, 8.4.7]; la normalisation de dv dans [18] coïncide avec la nôtre).

Or $\eta_{\lambda, x}(x.) f(x.) \in C_{-2\rho}$. D'où

$$\langle \eta_{\lambda, x}, f \rangle = \int_{\theta(N)} \eta_{\lambda, x}(x v) f(x v)\, dv.$$

Mais $\eta_{\lambda, x} = \prod_{i=1}^{\ell} \eta_{i, x}^{\lambda_i - 1}$ et comme $x \in W_H$,

$$\eta_{i, x}(g) = |(\pi_i(g)\, e_{\delta_i}, e_{x \delta_i})|^2 \qquad \text{(cf. Lemme 2).}$$

Prenant $e_{x \delta_i} = \pi_i(x)\, e_{\delta_i}$ on a donc

$$\begin{aligned} \eta_{i, x}(x v) &= |(\pi_i(v)\, e_{\delta_i}, e_{\delta_i})|^2 \\ &= |(e_{\delta_i}, \pi_i(\theta(v^{-1}))\, e_{\delta_i}|^2 \end{aligned}$$

et comme $\theta(v^{-1})\in N$, on a

$$\eta_{i,x}(xv)=1.$$

D'où l'on déduit:

$$\langle\eta_{\lambda,x},f\rangle=\int_{\theta(N)} f(xv)\,dv=\langle A'(w_0,\lambda)\,\delta_{xw_0}^{w_0\lambda},f\rangle. \quad \square$$

D'après le lemme précédent on a, avec les notations et hypothèses du Théorème 1:

$$u_{\lambda,x}^{w}=A'(w_0,\lambda)\,v_{\lambda,x}^{w}$$

avec

$$v_{\lambda,x}^{w}=\int_{H/T}\int_{\mathscr{C}}\psi(hT)\,\varphi(a)\,a^{-2x\rho}\,\pi'_{w_0\lambda}(hwa)\,\delta_{xw_0}^{w_0\lambda}\,da\,d\dot{h}$$

(on a utilisé la propriété d'entrelacement de $A'(w_0,\lambda)$).

Lemme 12 *On a $v_{\lambda,x}^{w}\in I_{-w_0\lambda}(\subset I'_{w_0\lambda})$ et*

$$v_{\lambda,x}^{w}(g)=0 \qquad si\ \ g\notin Hwxw_0AN,$$

$$v_{\lambda,x}^{w}(hwxw_0)=\frac{1}{c_0}\Big(\int_{\mathscr{C}}\varphi(a)\,a^{-x(\lambda+\rho)}\,da\Big)\,\psi(h),$$

où c_0 est une constante que nous préciserons dans la démonstration.

Démonstration. Par dualité, on obtient facilement:

$$\pi'_{w_0\lambda}(wa)\,\delta_{xw_0}^{w_0\lambda}=a^{-x\lambda+x\rho}\,\delta_{wxw_0}^{w_0\lambda}.$$

En effet, si $f\in I_{w_0\lambda}$,

$$\begin{aligned}\langle\pi'_{w_0\lambda}(wa)\,\delta_{xw_0}^{w_0\lambda},f\rangle&=\langle\delta_{xw_0}^{w_0\lambda},\pi_{w_0\lambda}((wa)^{-1})f\rangle\\&=f(waxw_0)\\&=f(wxw_0(xw_0)^{-1}\,axw_0)\\&=f(wxw_0)\,((xw_0)^{-1}\,axw_0)^{-w_0\lambda-\rho}.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}((xw_0)^{-1}\,axw_0)^{-w_0\lambda-\rho}&=a^{-xw_0(w_0\lambda+\rho)}\\&=a^{-x\lambda+x\rho}.\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue. On a alors

$$v_{\lambda,x}^{w}=\int_{H/T}\int_{\mathscr{C}}\psi(hT)\,\varphi(a)\,a^{-x(\lambda+\rho)}\,\pi'_{w_0\lambda}(h)\,\delta_{wxw_0}^{w_0\lambda}\,da\,d\dot{h}.$$

Donc, si $f\in I_{w_0\lambda}$, en utilisant (2) (§ 1), on a:

$$\langle v_{\lambda,x}^{w},f\rangle=\Big(\int_{\mathscr{C}}\varphi(a)\,a^{-x(\lambda+\rho)}\,da\Big)\int_{H/T}\psi(hT)\,f(hwxw_0)\,d\dot{h}.$$

On introduit alors une fonction sur G:

$$\Phi(g)=0 \qquad \text{si}\ \ g\notin Hwxw_0AN$$

et

$$\Phi(hwxw_0\,an)=a^{w_0\lambda-\rho}\psi(hT), \quad \forall h\in H, \quad a\in A, \quad n\in N.$$

Il est facile de voir que Φ est bien définie, C^∞ sur G (en utilisant le fait simple à prouver que $(h,a,n)\to hwxw_0\,an$ est un difféomorphisme de $H\times A\times N$ sur un ouvert de G) et qu'en outre $\Phi\in I_{-w_0\lambda}$. Calculons alors

$$\langle\Phi,f\rangle=\int_{K/T}\Phi(kT)f(kT)\,d\dot{k}.$$

Mais, d'après [13, Lemme 1.3]:

$$\int_{K/T}\Phi(k)f(k)\,d\dot{k}=c_0\sum_{y\in W_H\backslash W}\int_{H/T}\Phi(k(hy))f(k(hy))\,a(hy)^{-2\rho}\,d\dot{h}.$$

Ici, pour $g\in G$, $k(g)\in K$, $a(g)\in A$, $n(g)\in N$ sont définis par l'égalité $g=k(g)\,a(g)\,n(g)$ (décomposition d'Iwasawa) et c_0 est la constante de l'énoncé.

Or $\Phi(hy)=\Phi(k(hy))\;a(hy)^{w_0\lambda-\rho}$ est nul si $y\notin W_H\,wxw_0$ et égal à $\psi(h)$ si $y=wxw_0$. Par ailleurs

$$f(hy)=f(k(hy))\,a(hy)^{-w_0\lambda-\rho}.$$

D'où

$$\langle\Phi,f\rangle=c_0\int_{H/T}\psi(h)f(hwxw_0)\,d\dot{h}.$$

Finalement

$$\forall f\in I_{w_0\lambda}, \qquad \langle v^w_{\lambda,x},f\rangle=\frac{1}{c_0}\int_{\mathscr{C}}\varphi(a)\,a^{-x(\lambda+\rho)})\,da\,\langle\Phi,f\rangle.$$

D'où l'égalité voulue. $\square$

5.3

On note, pour $\alpha\in\Delta$, H_α la coracine de $\alpha_{|\mathfrak{a}}$ (i.e. $H_\alpha\in\mathfrak{a}$). Pour $\lambda\in\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$, on pose $\lambda_\alpha=\lambda(H_\alpha)$. Pour $w\in W$, rappelons qu'on a posé $S_P(w)=\{\beta\in\Delta_P^+\mid w\beta\in\Delta_P^+\}$. On note $T(w)=S(w^{-1})$, i.e. $T(w)=\{\beta\in\Delta^+\mid w^{-1}\beta\in\Delta^+\}$.

Pour $\alpha\in\Delta$, on note $G(\alpha)$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\alpha)$ engendrée par $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. On dit que α est compacte si $G(\alpha)\cap H$ est compact et non compacte sinon. On note Δ_c (resp. Δ_n) l'ensemble des racines non compactes. On note

$$\varepsilon(\alpha)=-1 \quad \text{si } \alpha \text{ est compacte}$$
$$\varepsilon(\alpha)=1 \quad \text{si } \alpha \text{ est non compacte.}$$

Théorème 2 *Soient w, $y\in W$. On a l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda\in\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}'(K/T)$:*

$$(A'(w,w^{-1}\lambda)\,\xi^y_\lambda)^\sim=\left(\prod_{\alpha\in T(w)}\varepsilon(y\alpha)\left(\frac{2}{\lambda_\alpha}\right)\right)(\xi^{yw}_{w^{-1}\lambda})^\sim$$

où $^\sim$ désigne l'isomorphisme $I'_\lambda\to I'=\mathscr{D}'(K/T)$.

Démonstration du Théorème 2. On procède par récurrence sur la longueur de w, $\ell(w)$, relativement à $\Delta^+ = \Delta_P^+$. Si $w=1$ il n'y a rien à démontrer. On suppose le théorème démontré pour tous les éléments de longueur inférieure ou égale à $p \geqq 0$. Soit alors $w \in W$ avec $\ell(w)=p$ et α une racine simple de Δ^+ telle que $\ell(w s_\alpha) = \ell(w)+1$.

On se place en un point λ où toutes les fonctions méromorphes (en nombre fini) qui interviendront sont définies. C'est certainement le cas pour λ dans un ouvert de $\{\mu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Re}(\mu-\rho)$ est strictement Δ^+-dominant$\}$. Alors:

$$A(w s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda) = A(w, w^{-1}\lambda)\, A(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)$$

d'après les propriétés des intégrales d'entrelacement (cf. [12] ou [6]) et en transposant on en déduit:

$$A'(w s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_\lambda^y = A'(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, A'(w, w^{-1}\lambda)\, \xi_\lambda^y.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à w montre que

$$A'(w s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_\lambda^y = \left(\prod_{\beta \in T(w)} \varepsilon(y\beta)\left(\frac{2}{\lambda_\beta}\right)\right) A'(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_{w^{-1}\lambda}^{yw}.$$

Mais $T(w s_\alpha) = S(w^{-1} s_\alpha)$ et d'après [6, p. 51], on a $S(s_\alpha\, w^{-1}) = S(w^{-1}) \cup w S(s_\alpha)$ (union disjointe). Or α est simple, donc $S(s_\alpha) = \{\alpha\}$. D'où $T(w s_\alpha) = T(w) \cup \{w\alpha\}$ (union disjointe).

Il reste donc à prouver que:

$$A'(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_{w^{-1}\lambda}^{yw} = \varepsilon(y w \alpha)\left(\frac{2}{\lambda_{w\alpha}}\right) \xi_{(w s_\alpha)^{-1}\lambda}^{y w s_\alpha}.$$

Comme tous les objets sont définis cela résultera de l'égalité de fonction méromorphe en λ:

$$(7)\qquad (A'(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_{w^{-1}\lambda}^{yw})^\sim = \varepsilon(y w \alpha)\left(\frac{2}{\lambda_{w\alpha}}\right) (\xi_{(w s_\alpha)^{-1}\lambda}^{y w s_\alpha})^\sim.$$

Pour cela, on va établir:

Lemme 13 On a l'égalité de fonctions méromorphes en λ

$$(A'(s_\alpha, s_\alpha \lambda)\, \xi_\lambda^1)^\sim = \varepsilon(\alpha)\left(\frac{2}{\lambda_\alpha}\right) (\xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha})^\sim$$

($\varepsilon(\alpha) = -1$ si α est compacte, 1 sinon).

Démonstration du Lemme 13 D'après [1, Lemme 7.4], ce lemme se réduit au même résultat pour $G(\alpha)$, qui dans ce cas sera démontré plus loin (§ 6).

Suite de la démonstration du Théorème 2 Grâce à ce lemme on peut calculer $A'(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi_{w^{-1}\lambda}^{yw}$. En effet par prolongement méromorphe des identités on déduit du Lemme 10:

$$\xi_{w^{-1}\lambda}^{yw, P} = R(yw)'\, \xi_{y\lambda}^{1, ywPw^{-1}y^{-1}}.$$

D'où:

$$A'_P(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi^{yw}_{w^{-1}\lambda} = A'_P(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, R(yw)'\, \xi^{1, ywPw^{-1}y^{-1}}_{y\lambda}.$$

On pose alors $w' = yw$ et $\beta' = w'\alpha$ qui est simple pour $\Delta^+_{P'}$ où $P' = w'Pw'^{-1}$, $\lambda' = w^{-1}\lambda$. D'après le Lemme 9 on obtient par transposition:

$$A'_P(s_\alpha, s_\alpha \lambda')\, R(w')' = R(w')'\, A'_{P'}(s_{\beta'}, s_{\beta'} w'\lambda').$$

D'où

$$A'_P(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi^{yw, P}_{w^{-1}\lambda} = R(w')'\, A'_{P'}(s_{\beta'}, s_{\beta'} w'\lambda')\, \xi^{1, P'}_{y\lambda}.$$

On applique le lemme précédent à P' et β' et l'on obtient:

$$A'_P(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi^{yw, P}_{w^{-1}\lambda} = \varepsilon(\beta') \left(\frac{2}{(y\lambda)_{\beta'}}\right) R(w')'\, \xi^{s_{\beta'}, P'}_{s_{\beta'} y\lambda} \tag{8}$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon(\beta') &= -1 \quad \text{si } G(\beta') \cap H \text{ est compact} \\ &= +1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Mais $\beta' = yw\alpha$. Donc $(y\lambda)_{\beta'} = (y\lambda)_{yw\alpha} = \lambda_{w\alpha}$ et $\varepsilon(\beta') = \varepsilon(yw\alpha)$. Enfin, le Lemme 10 montre que (par prolongement méromorphe):

$$R(w')'\, \xi^{s_{\beta'}, P'}_{s_{\beta'} y\lambda} = R(w')'\, R(s_{\beta'})'\, \xi^{1, s_{\beta'} P' s_{\beta'}}_{y\lambda}.$$

Or $R(s_{\beta'}) \circ R(w') = R(s_{\beta'} w')$ et par transposition on a

$$R(w')'\, \xi^{s_{\beta'}, P'}_{s_{\beta'} y\lambda} = R(s_{\beta'} w')'\, \xi^{1, s_{\beta'} P' s_{\beta'}}_{y\lambda}.$$

On applique à nouveau le Lemme 10, en tenant compte du fait que $s_{\beta'} P' s_{\beta'} = s_{\beta'} w' P (s_{\beta'} w')^{-1}$:

$$R(w')'\, \xi^{s_{\beta'}, P'}_{s_{\beta'} y\lambda} = \xi^{s_{\beta'} w', P}_{(s_{\beta'} w')^{-1} y\lambda}.$$

Mais $s_{\beta'} w' = w' s_\alpha w'^{-1} w' = yws_\alpha$ et $(s_{\beta'} w')^{-1} y\lambda = s_\alpha w^{-1}\lambda = (ws_\alpha)^{-1}\lambda$.

Finalement, en tenant compte de ces relations et l'égalité précédente, et en remplaçant dans (8) $R(w')'\, \xi^{s_{\beta'}, P'}_{s_{\beta'} y\lambda}$ par sa valeur ainsi obtenue, on a:

$$A'_P(s_\alpha, s_\alpha w^{-1}\lambda)\, \xi^{yw, P}_{w^{-1}\lambda} = \varepsilon(yw\alpha) \left(\frac{2}{\lambda_{w\alpha}}\right) \xi^{yws_\alpha, P}_{(ws_\alpha)^{-1}\lambda}$$

égalité valable sur un ouvert de $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ (où toutes les fonctions méromorphes rencontrées sont définies). L'égalité (7) en résulte, ainsi que le théorème. □

6 Démonstration du Lemme 13 en rang 1

6.1 Cas où H est compact

Alors $G \simeq SL(2, \mathbb{C})$, $H = K \simeq SU(2)$, ξ_λ^1 est un vecteur invariant par K, et on sait comment il se transforme par les intégrales d'entrelacement. En fait $\xi_\lambda^1 \in I_{-\lambda}$. Alors, d'après la Remarque 3 on a:

$$A'(s_\alpha, s_\alpha \lambda)\, \xi_\lambda^1 = A(s_\alpha, -\lambda)\, \xi_\lambda^1$$

et d'après [6, Prop. 3.7], on a:

$$A(s_\alpha, -\lambda)\, \xi_\lambda^1 = -\frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_{s_\alpha \lambda}^1$$

(le 2 provient d'une normalisation différente des mesures de Haar). Mais $W_H = W$ dans ce cas et $\xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha} = \xi_{s_\alpha \lambda}^1$. Finalement

$$A'(s_\alpha, s_\alpha \lambda)\, \xi_\lambda^1 = -\frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha} = \varepsilon(\alpha)\, \frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha}$$

et le Lemme 13 est démontré dans le cas où G est de rang 1 et H compact.

6.2 Cas où H est non compact. Préliminaires

Dans ce cas G peut s'identifier à $SL(2, \mathbb{C})$ et H à $SL(2, \mathbb{R})$, K à $SU(2)$. Mais les calculs nous ont semblé un peu malaisés dans ce contexte. Nous préfèrerons identifier G/H à $SO_e(3,1)/SO_e(2,1)$. L'homomorphisme naturel de $SL(2, \mathbb{C})$ dans $SO_e(3,1)$ n'est pas un isomorphisme, mais tous les calculs se passent modulo le centre de $SL(2, \mathbb{C})$. Dans la suite nous ferons donc comme si $G = SO_e(3,1)$ et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in SO_e(2,1) \right\}. \qquad \text{Alors}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in SO(3) \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a \in SO(2) \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} cht & 0 & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & 0 & cht \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) & -x_2 & -x_3 & \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \\ x_2 & 1 & 0 & -x_2 \\ x_3 & 0 & 1 & -x_3 \\ -\frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) & -x_2 & -x_3 & 1 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2) \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \right\}$$

En posant

$$X_0=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

et $a_t=\exp tX_0$ on a $(a_t)^\alpha=e^t$, $\rho=\alpha$. Le poids fondamental δ_1 vérifie $\delta_{1_{|\mathfrak{a}}}=\frac{1}{2}\alpha$. Si $\lambda=2s\delta_1\in\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$ avec $s\in\mathbb{C}$, on a:

$$\lambda_\alpha=2s, \qquad (a_t)^\lambda=e^{st}$$
$$I_\lambda=\{\varphi\colon G\to\mathbb{C}\,|\,\varphi(gma_tn)=e^{-(s+1)t}\varphi(g), \forall g\in G, m\in T, n\in N, t\in\mathbb{R}\}$$

On choisit pour représentant de s_α:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

On a $W_H=\{e\}$. Identifions la fonction ε_1. C'est un coefficient d'une représentation de G, (π, H_π), de dimension 4, (à savoir $\pi_1\otimes(\pi'_1\circ\sigma)$), $g\mapsto(\pi(g)\,e, v)$ où v est un vecteur invariant par H et e un vecteur invariant par N et de poids $2\delta_{1_{|\mathfrak{a}}}=\alpha_{|\mathfrak{a}}$ sous A. De plus $\varepsilon_1(1)=1$. Ces propriétés de π montrent que π est la représentation naturelle de $SO_e(3,1)$ dans $\mathbb{R}^4$ (ou plutôt sa complexifiée) munie du produit scalaire naturel. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors e_1 est invariant sous H et e_1-e_4 est invariant par N et de poids α sous A. On a donc $\varepsilon_1(g)=(g(e_1-e_4), e_1)$. Alors, si $\mathrm{Re}(\lambda-\rho)$ est strictement Δ^+-dominant (i.e. $\mathrm{Re}(s-1)>0$), on a

$$\xi^1_\lambda(g)=(\mathrm{Sup}(\varepsilon_1(g), 0))^{s-1}$$

et

$$\xi^{s_\alpha}_\lambda(g)=\xi^1_\lambda(s_\alpha g).$$

On va étudier $(\xi^1_\lambda)^\sim$ et $(\xi^{s_\alpha}_\lambda)^\sim$ qui sont des distributions sur K/T que l'on identifie naturellement à S^2 dans $\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}e_2\oplus\mathbb{R}e_3$ (la classe de T correspondant à e_1). D'autre part $G/P\approx K/T$. Avec ces identifications, H a 2 orbites ouvertes dans $S^2(\approx G/P)$,

$$O^\pm=\{(x_1, x_2, x_3)\in S^2\,|\,\pm x_1>0\}.$$

Alors $\varepsilon_1(k)=(k(e_1-e_4), e_1)=(ke_1, e_1)$. D'où

$$\tilde{\varepsilon}_1(x_1, x_2, x_3)=x_1$$

et

$$(\xi^1_\lambda)^\sim=(\mathrm{Sup}(x_1, 0))^{s-1} \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(s-1)>0.$$

De même on voit que $\eta=\eta_{1,1}$ et $\eta_\lambda=\eta_{\lambda,1}$ vérifient

$$\eta(g)=\tfrac{1}{2}(g(e_1-e_4), e_1-e_4)$$

et

$$\eta_\lambda(g)=\frac{1}{2^{s-1}}(g(e_1-e_4), e_1-e_4)^{s-1} \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(s-1)>0.$$

Alors $\eta_\lambda(k)=\frac{1}{2^{s-1}}((ke_1, e_1)+1)^{s-1}$ et $\eta_\lambda^{\sim}(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{2^{s-1}}(x_1+1)^{s-1}$ (toujours pour $\operatorname{Re}(s-1)>0$).

Avec les notations du Théorème 1 on notera:

$$u_{\lambda,1}^1=u_\lambda^+, \qquad u_{\lambda,1}^{s_\alpha}=u_\lambda^-\,(1\in W_H).$$

On va calculer de deux façons $\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda}^1\rangle_{I_{-\lambda}, I'_{-\lambda}}$ pour λ tel que $\operatorname{Re}(s-1)>0$ et où toutes les fonctions méromorphes qui interviendront (en nombre fini) sont définies, ce qui arrivera donc sur un ouvert de $a'_{\mathbb{C}}$.

6.3 *Premier calcul de* $\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda}^1\rangle_{I_{-\lambda}, I'_{-\lambda}}$

Avec les notations du Lemme 12, on pose

$$v_{\lambda,1}^1=v_\lambda^+ \quad \text{et} \quad v_{\lambda,1}^{s_\alpha}=v_\lambda^-.$$

On sait (cf. Lemme 12 et ce qui le précède) que $u_\lambda^\pm=A'(w_0,\lambda)\,v_\lambda^\pm$ et ici $w_0=s_\alpha$. Mais, d'après le Lemme 12, $v_\lambda^\pm\in I_{-w_0\lambda}=I_\lambda$.

Alors la Remarque 3 permet de conclure que $u_\lambda^\pm=A(s_\alpha,\lambda)\,v_\lambda^\pm$. Donc, en posant $\xi_{-\lambda}^1=\xi_{-\lambda}$, on a:

$$\begin{aligned}\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda}\rangle &= \langle A(s_\alpha,\lambda)\,v_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda}\rangle\\ &= \langle v_\lambda^\pm, A'(s_\alpha,\lambda)\,\xi_{-\lambda}\rangle.\end{aligned}$$

Mais, d'après [1, Proposition 6.1], on a:

$$A'(s_\alpha,\lambda)\,\xi_{-\lambda}=B^+(\lambda)\,\xi_\lambda+B^-(\lambda)\,\xi_\lambda^{s_\alpha}$$

où B^+ et B^- sont méromorphes en λ. Donc

$$\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda}\rangle=B^+(\lambda)\,\langle v_\lambda^\pm, \xi_\lambda\rangle+B^-(\lambda)\,\langle v_\lambda^\pm, \xi_\lambda^{s_\alpha}\rangle.$$

Mais nous avons déterminé $v_\lambda^\pm$ au Lemme 12. En particulier v_λ^+ est à support contenu dans Hw_0P et v_λ^- est à support dans HP. De plus, comme ici $x=1$, on a $C=-C^+$ et $\mathscr{C}=\exp(-C^+)$ que l'on notera $\mathscr{C}^-$. Alors

$$v_\lambda^-(h)=v_\lambda^+(hw_0)=\frac{1}{c_0}\,\psi(h)\int_{\mathscr{C}^-} a^{-\lambda-\rho}\varphi(a)\,da.$$

On utilise à nouvea la formule intégrale de [13, Lemme 1.3] pour calculer:

$$\langle v_\lambda^\pm, \xi_\lambda^\pm \rangle = \int_{K/T} v_\lambda^\pm(k)\, \xi_\lambda^\pm(k)\, dk,$$

où l'on a noté $\xi_\lambda^+ = \xi_\lambda^1$ et $\xi_\lambda^- = \xi_\lambda^{s_\alpha}$. Alors, pour des raisons de support, on a:

$$\langle v_\lambda^+, \xi_\lambda^+ \rangle = 0, \qquad \langle v_\lambda^-, \xi_\lambda^- \rangle = 0$$

et (la constante c_0 disparaît):

$$\langle v_\lambda^+, \xi_\lambda^- \rangle = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} a^{-\lambda-\rho} \varphi(a)\, da\Big) \times \Big(\int_{H/T} \psi(h)\, \xi_\lambda^-(hs_\alpha)\, d\dot{h}\Big)$$

$$\langle v_\lambda^+, \xi_\lambda^- \rangle = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} a^{-\lambda-\rho} \varphi(a)\, da\Big) \times \int_{H/T} \psi(h)\, d\dot{h}$$

et

$$\langle v_\lambda^-, \xi_\lambda^+ \rangle = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} a^{-\lambda-\rho} \varphi(a)\, da\Big) \times \int_{H/T} \psi(h)\, d\dot{h}.$$

D'où

Lemme 14 $\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda} \rangle = B^\mp(\lambda)\, \big(\int_{\mathscr{C}^-} a^{-\lambda-\rho} \varphi(a)\, da\big)\, \big(\int_{H/T} \varphi(h)\, d\dot{h}\big)$ *(pour des valeurs convenables de λ).*

6.4 Deuxième calcul de $\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda} \rangle$

On notera:

$$O = O^+ \cup O^- \, (\subset S^2)$$
$$E = \{x \in S^2 \mid |x_1| < 1\}$$

et pour $\varepsilon > 0$

$$O_\varepsilon = \{x \in S^2 \mid |x_1| > \varepsilon\}$$
$$E_\varepsilon = \{x \in S^2 \mid |x_1| < \varepsilon\}.$$

Enfin on note

$$\mathscr{U} = \{\tau \in \mathscr{D}'(S^2) \mid \tau_{|E} \text{ est } C^\infty\}$$
$$\mathscr{V} = \{\xi \in \mathscr{D}'(S^2) \mid \xi_{|O} \text{ est } C^\infty\}.$$

Définissons une forme bilinéaire entre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$. Soit (φ_1, φ_2) une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement ouvert de S^2 par $E_{3/4}$ et $O_{1/4}$, i.e.: $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(S^2)$, Supp $\varphi_1 \subset E_{3/4}$, Supp $\varphi_2 \subset O_{1/4}$ et $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$. En particulier $\varphi_2 \equiv 1$ sur $O_{3/4}$ (puisque $\varphi_1 \equiv 0$ sur $O_{3/4}$). Alors si $\tau \in \mathscr{U}$ et $\xi \in \mathscr{V}$, $\varphi_1 \tau$ est C^∞ sur S^2 et $\langle \varphi_1 \tau, \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}$ est défini. De même $\varphi_2 \xi$ est C^∞ sur S^2 et $\langle \tau, \varphi_2 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}$ est défini. On définit alors:

$$\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \varphi_1 \tau, \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'} + \langle \tau, \varphi_2 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}.$$

Si $\tau \in \mathscr{D}(S^2) \subset \mathscr{U}$, il est clair que

$$(9) \qquad \langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau, \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}.$$

Lemme 15 *Soit* $\tau \in \mathscr{U}$ *avec* $\operatorname{Supp} \tau \subset O_{(3/4)+\varepsilon}(\varepsilon > 0)$ *et soit* $\varphi_3 \in \mathscr{D}(S^2)$ *avec* $\varphi_3 \equiv 1$ *sur* $O_{(3/4)+\varepsilon}$ *et* $\operatorname{Supp} \varphi_3 \subset O_{3/4}$. *Alors, pour tout* $\xi \in \mathscr{V}$, $\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau, \varphi_3 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}$ *(qui est bien défini puisque* $\varphi_3 \xi \in \mathscr{D}(S^2)$*).*

Démonstration. On a par définition:

$$\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \varphi_1 \tau, \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'} + \langle \tau, \varphi_2 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}.$$

Mais $\operatorname{Supp} \varphi_1 \subset E_{3/4}$ et $\operatorname{Supp} \tau \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$. Comme $E_{3/4} \cap O_{(3/4)+\varepsilon} = \emptyset$, on a $\varphi_1 \tau = 0$ et:

$$\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau, \varphi_2 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}.$$

Mais $\varphi_3 \equiv 1$ sur $O_{(3/4)+\varepsilon}$ et $\operatorname{Supp} \tau \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$. Donc $\varphi_3 \tau = \tau$ et

$$\begin{aligned} \langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle &= \langle \varphi_3 \tau, \varphi_2 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} \\ &= \langle \tau, \varphi_2 \varphi_3 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}. \end{aligned}$$

Mais $\varphi_2 \equiv 1$ sur $O_{3/4}$ et $\operatorname{Supp} \varphi_3 \subset O_{3/4}$. Donc $\varphi_2 \varphi_3 = \varphi_3$ et l'on a bien

$$\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau, \varphi_3 \xi \rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}}. \quad \square$$

Soit $\psi \in C_c^\infty(H)$, que l'on regarde comme distribution à support compact sur G (à l'aide de la mesure de Haar standard sur H). On considère les actions de G, $\tilde{\pi}'_\lambda$ et $\tilde{\pi}'_{-\lambda}$ sur $I' = \mathscr{D}'(S^2)$ (transportées des actions de G sur I'_λ et $I'_{-\lambda}$ par les isomorphismes $\tilde{}$).

Lemme 16 *Soit* $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$. *Soient* $\tau \in \mathscr{U}$ *et* $\psi \in C_c^\infty(H)$, *tels que* $\tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau \in \mathscr{U}$. *Soit* $\xi \in \mathscr{V}$ *que l'on suppose* H*-invariant par* $\tilde{\pi}'_{-\lambda}$. *Alors*

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau, \xi \rangle\!\rangle = \int_H \psi(h)\, dh \langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle$$

pour ψ *à support assez petit* (i.e. *tel que* $\operatorname{Supp} \psi .\, O_{7/8} \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$ *pour un* $\varepsilon > 0$).

Démonstration. On écrit $\tau = \tau_1 + \tau_2$ avec $\tau_1 \in \mathscr{D}(S^2)$ et $\tau_2 \in \mathscr{D}'(S^2)$ avec $\operatorname{Supp} \tau_2 \subset O_{7/8}$. Alors

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau, \xi \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau_1, \xi \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau_2, \xi \rangle\!\rangle.$$

Mais $\tau_1 \in \mathscr{D}(S^2)$, et

$$\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)_{|\mathscr{D}(S^2)} = \tilde{\pi}_{-\lambda}(\psi).$$

De plus: $\tilde{\pi}_{-\lambda}(\psi) \tau_1 \in \mathscr{D}(S^2)$. Donc, d'après (9):

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau_1, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tilde{\pi}_{-\lambda}(\psi) \tau_1, \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'}.$$

Mais: $(\pi_{-\lambda}(\psi))' = \pi'_{-\lambda}(\check{\psi})$ d'après (3) (cf. § 1.3) et par transport par $\tilde{}$ on en déduit:

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi) \tau_1, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau_1, \tilde{\pi}'_{-\lambda}(\check{\psi}) \xi \rangle_{\mathscr{D}, \mathscr{D}'},$$

et en utilisant l'invariance par H de ξ on a finalement:

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_1, \xi \rangle\!\rangle = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big) \langle \tau_1, \xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'} = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big) \langle\!\langle \tau_1, \xi \rangle\!\rangle. \tag{10}$$

Etudions maintenant $\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \xi \rangle\!\rangle$. La condition de support sur ψ et τ_2 montre que l'on a $\operatorname{Supp} \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2 \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$ et l'on a d'après le Lemme 15:

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}.$$

Soit $\tau_n \in \mathscr{D}(S^2)$, une suite convergeant faiblement vers τ_2, avec de plus $\operatorname{Supp} \tau_n \subset O_{7/8}$ (on se ramène, pour exhiber τ_n, à un problème sur $\mathbb{R}^2$ et on utilise la convolution, cf. [16]). Alors on a encore $\operatorname{Supp}(\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n) \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$. D'autre part, d'après (3), § 1.3, on a

$$\forall f \in \mathscr{D}(S^2), \qquad \langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, f \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle \tau_n, \tilde{\pi}_\lambda(\check{\psi})\,f \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}.$$

D'où $\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n$ converge faiblement dans $\mathscr{D}'$ vers $\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2$. Donc

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \xi \rangle\!\rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}. \tag{11}$$

Comme $\operatorname{Supp}(\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n) \subset O_{(3/4)+\varepsilon}$, le Lemme 15 implique:

$$\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \xi \rangle\!\rangle$$

et comme $\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n \in \mathscr{D}$ on a d'après (9):

$$\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}.$$

Mais $\tau_n \in \mathscr{D}$, donc $\tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n = \tilde{\pi}_{-\lambda}(\psi)\,\tau_n$ et en utilisant (3), § 1.3 on a:

$$\langle \tilde{\pi}_{-\lambda}(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \langle \tau_n, \tilde{\pi}'_{-\lambda}(\check{\psi})\,\xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}.$$

En utilisant l'invariance de ξ sous H on a donc:

$$\langle \tilde{\pi}_\lambda(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big) \langle \tau_n, \xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}.$$

Mais d'après (9) et le Lemme 15 on a:

$$\langle \tau_n, \xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'} = \langle\!\langle \tau_n, \xi \rangle\!\rangle = \langle \tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}.$$

Finalement:

$$\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big) \langle \tau_n, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}$$

et en passant à la limite, grâce à (11) on a:

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \xi \rangle\!\rangle = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big) \langle \tau_2, \varphi_3\,\xi \rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}}.$$

On utilise encore le Lemme 15 pour finalement obtenir:

$$\text{(12)} \qquad \langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau_2, \xi \rangle\!\rangle = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big)\,\langle\!\langle \tau_2, \xi \rangle\!\rangle.$$

En ajoutant les relations (10) et (12) on obtient

$$\langle\!\langle \tilde{\pi}'_\lambda(\psi)\,\tau, \xi \rangle\!\rangle = \Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big)\,\langle\!\langle \tau, \xi \rangle\!\rangle. \qquad \square$$

Revenons au calcul de $\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda} \rangle = \langle \tilde{u}_\lambda^\pm, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}$. On a $\tilde{u}_\lambda^\pm \in \mathscr{D}(S^2)$ et d'après la définition de $u_\lambda^\pm$ (cf. Théorème 1 et § 6.2) et les propriétés de transformations sous A de η_λ (Lemme 2) on a:

$$u_\lambda^+ = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} \varphi(a)\,a^{-(\lambda+\rho)}\,da\Big)\,(\pi'_\lambda(\psi)\,\eta_\lambda)$$

et

$$u_\lambda^- = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} \varphi(a)\,a^{-(\lambda+\rho)}\,da\Big)\,(\pi'_\lambda(\psi)\,\pi'_\lambda(s_\alpha)\,\eta_\lambda)$$

(on a intégré l'action de A sur η_λ). On notera $\eta_\lambda^+ = \eta_\lambda$, $\eta_\lambda^- = \pi'_\lambda(s_\alpha)\,\eta_\lambda$. Alors, comme $u_\lambda^\pm$ est C^∞ sur S^2, on a:

$$\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda} \rangle = \langle\!\langle \tilde{u}_\lambda^\pm, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle$$

et on peut appliquer le Lemme 16 (pour Supp ψ assez petit) et l'on a:

$$\langle u_\lambda^\pm, \xi_{-\lambda} \rangle = \Big(\int_{\mathscr{C}^-} \varphi(a)\,a^{-(\lambda+\rho)}\,da\Big)\Big(\int_H \psi(h)\,dh\Big)\,\langle\!\langle \tilde{\eta}_\lambda^\pm, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\langle\!\langle \tilde{\eta}_\lambda^\pm, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle$.

Rappelons que l'on a choisi λ avec $\mathrm{Re}(s-1)>0$. Donc $\tilde{\xi}_{-\lambda}$ n'est pas en général une fonction. Par contre $\tilde{\eta}_\lambda^+$ est la fonction sur la sphère définie par:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{2^{s-1}}(x_2+1)^{s-1}.$$

Alors $\langle\!\langle \tilde{\eta}_\lambda^\pm, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle$ est la valeur en $t=s$ du prolongement méromorphe de la fonction $g^\pm$ définie par

$$t \to \int_{K/T} \tilde{\xi}_{-\nu}(k)\,\eta_\lambda^\pm(k)\,dk = g^\pm(t), \quad \text{où} \quad \nu = 2t\delta \text{ avec } -\mathrm{Re}(t+1)>0.$$

Donc, pour $\mathrm{Re}(t+1)<0$, on a:

$$g^+(t) = \int_{S^2} (\sup(x_1, 0))^{-t-1}\,\frac{(x_1+1)^{s-1}}{2^{s-1}}\,dx.$$

On prend sur la sphère des coordonnées cylindriques (x_1, θ) et l'on a $dx = dx_1 \dfrac{d\theta}{4\pi}$ (on veut que S^2 soit de surface 1). D'où

$$g^+(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^{-t-1} \frac{(x_1+1)^{s-1}}{2^{s-1}} dx_1.$$

Considérons la fonction h de 2 variables complexes (u, v) définie par

$$h(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^{-u-1} \frac{(x_1+1)^{v-1}}{2^{v-1}} dx_1 \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(u) < 0 \quad \text{et} \quad v \in \mathbb{C}.$$

Comme la distribution $(x_+)^z$ n'a des pôles que pour $z \in -\mathbb{N}^*$, h est méromorphe sur $\mathbb{C}^2$ avec au pire des pôles sur les plans d'équation $u = p \in \mathbb{N}$, et l'on a, pour s non entier:

$$g(s) = h(s, s).$$

Calculons

$$h(u, u) \qquad \text{pour } \operatorname{Re} u < 0.$$

D'après [7, Formule 1.1, p. 10], on a:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1+bt)^{-x-y} dt = (1+b)^{-x} B(x, y)$$

$$\text{pour } b > -1, \qquad \operatorname{Re} x > 0, \qquad \operatorname{Re} y > 0.$$

On prend ici $x = -u$, $y = 1$, $b = 1$ et l'on trouve

$$h(u, u) = \frac{1}{2^u} \times 2^u B(-u, 1) = \frac{\Gamma(-u)\,\Gamma(1)}{\Gamma(-u+1)} = -\frac{1}{u}.$$

D'où, par prolongement holomorphe,

$$g^+(s) = -\frac{1}{s}$$

et

$$\langle\!\langle \tilde{\eta}_\lambda^+, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle = -\frac{1}{s}.$$

Calculons maintenant:

$$\langle\!\langle \tilde{\eta}_\lambda^-, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\!\rangle.$$

On a pour $\operatorname{Re}(t+1) < 0$:

$$g^-(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_1^{-t-1} \frac{(1-x_1)^{s-1}}{2^{s-1}} dx_1$$

et, par définition de la fonction B, pour $\operatorname{Re} t < 0$ et $\operatorname{Re} s > 0$ (cf. [7, Formule 1, p. 9]):

$$g^-(t) = \frac{1}{2^s} B(-t, s) = \frac{1}{2^s} \frac{\Gamma(-t)\,\Gamma(s)}{\Gamma(s-t)}.$$

Comme $\lim_{t\to s} \frac{1}{\Gamma(s-t)} = 0$, on voit que pour s non entier:

et donc

$$\langle\langle \tilde{\eta}_\lambda^-, \tilde{\xi}_{-\lambda} \rangle\rangle = 0.$$

Finalement on a obtenu:

Lemme 17 *Pour ψ à support assez petit (voisin de e) et* $\operatorname{Re}(s-1)>0$:

$$\langle u_\lambda^+, \xi_{-\lambda}\rangle = -\frac{1}{s}\Big(\int_{\mathscr{C}^-} \varphi(a)\, a^{-(\lambda+\rho)}\, da\Big) \int_H \psi(h)\, dh$$

$$\langle u_\lambda^-, \xi_{-\lambda}\rangle = 0.$$

6.5 Fin de la démonstration du Lemme 13 en rang 1

Par comparaison des Lemmes 14 et 17 on a

$$B^-(\lambda) = -\frac{1}{s}, \qquad B^+(\lambda) = 0$$

soit encore:

$$A'(s_\alpha, \lambda)\, \xi_{-\lambda}^1 = -\frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_\lambda^{s_\alpha}$$

puis en changeant λ en $-\lambda = s_\alpha \lambda$

$$A'(s_\alpha, s_\alpha \lambda)\, \xi_\lambda^1 = \frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha} = \varepsilon(\alpha)\, \frac{2}{\lambda_\alpha}\, \xi_{s_\alpha \lambda}^{s_\alpha}$$

et ceci achève la démonstration du Lemme 13 dans le cas où G est de rang 1.

Notre démonstration du Théorème 2 est maintenant complète. □

7 Détermination des distributions Θ_λ

7.1

On rappelle que pour $\varphi \in C_c^\infty(G/H)$ on a posé $\Theta_\lambda(\varphi) = \langle \pi'_\lambda(\varphi)\, \xi_\lambda . \xi_{-\lambda}\rangle$ dès que ξ_λ et $\xi_{-\lambda}$ sont définis (ce qui arrive sur le complémentaire d'une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$). La distribution Θ_λ est propre sous l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur G/H, $D(G/H)$ (pour le paramétre $-\lambda$, dans les identifications habituelles), d'après les propriétés des vecteurs ξ_λ (voir § 3.2) et invariante sous l'action à gauche de H. On sait, d'après [10, Th. 4.2], qu'une telle distribution est une fonction localement intégrable sur G/H, analytique sur l'ouvert des éléments réguliers de G/H ([10, Def. 2.5]) que l'on note $(G/H)'$. Si $E \subset G/H$, on note E' l'ensemble des éléments réguliers de E. Alors on a:

Théorème 3 *Pour les valeurs régulières de λ où ξ_λ et $\xi_{-\lambda}$ sont définies on a:*
(i) Soit $w\in W$. Soit $a\in A$. Si $w\notin W_H$ et awH est régulier dans G/H, on a

$$\Theta_\lambda(awH)=0.$$

(ii) Si aH est régulier dans G/H:

$$\Theta_\lambda(aH)=(-1)^{|\Delta_n^+|}2^{|\Delta^+|}\Big(\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\lambda_\alpha)^{-1}\Big)\times\frac{\sum_{x\in W_H}(-1)^{\ell(x)}a^{-x\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(a^{-\alpha}-a^\alpha)},$$

où $\ell(x)$ est la longueur de x comme élément de W.

7.2

On commence la démonstration du Théorème 3. On introduit la fonction $\Delta_{\mathscr{A}}$ sur $\mathscr{A}$ comme dans [10, Formule (4.6)], qui est définie par:

$$\forall w\in W,\quad \forall a\in A,\quad \Delta_{\mathscr{A}}(waH)=(wa^2\sigma(w)^{-1})^{-\rho_{\mathfrak{c}}}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-(wa^2\sigma(w^{-1}))^\alpha).$$

Mais $\sigma(w)^{-1}=t_w w^{-1}$. On pose alors $a_w=waw^{-1}$, $t'_w=wt_w w^{-1}$. Alors $t_w'^2=1$ et:

$$\Delta_{\mathscr{A}}(waH)=t_w'^{-\rho_{\mathfrak{c}}}a_w^{-2\rho_{\mathfrak{c}}}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-t_w'^\alpha a_w^{2\alpha})$$

$$\Delta_{\mathscr{A}}(waH)=t_w'^{\rho_{\mathfrak{c}}}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(a_w^{-\alpha}-t_w'^\alpha a_w^\alpha).$$

En particulier

$$\Delta_{\mathscr{A}}(aH)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(a^{-\alpha}-a^\alpha).$$

Par ailleurs, on sait d'après [10, Théorème 4.8], que, sous les hypothèses du théorème, la fonction $\Psi_{\mathscr{A}}$, définie sur $\mathscr{A}'$ par $\Delta_{\mathscr{A}}\Theta_\lambda$, se prolonge en une fonction analytique sur $\mathscr{A}$ (il n'y a pas de racines réelles de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{h}$ et donc, avec les notations de [10], $\mathscr{A}'_{\mathbb{R}}=\mathscr{A}$).

En outre, le fait que Θ_λ soit propre dans $D(G/H)$ implique que, pour les valeurs régulières de λ, cette fonction peut s'écrire sous la forme:

$$(13)\qquad \forall a\in A,\quad \forall w\in W,\quad (\Delta_{\mathscr{A}}\Theta_\lambda)(waH)=\sum_{x\in W}d(w,x,\lambda)\,a^{-x\lambda}.$$

Clairement les $d(w,y,\lambda)$ sont méromorphes en λ et on va les calculer pour λ tel que $\mathrm{Re}(\lambda-\rho)$ soit strictement Δ^+-dominant, en supposant en outre que les fonctions méromorphes qui interviendront dans les calculs seront définies. Au bout du compte cela déterminera ces fonctions méromorphes sur un ouvert, donc partout. Pour cela on va calculer de deux façons différentes $\langle u^w_{\lambda,x},\xi_{-\lambda}\rangle$ (cf. définition de $u^w_{\lambda,x}$ au Théorème 1) (on posera $u^w_{\lambda,x}=0$ si $x\notin W_H$).

7.3 Premier calcul de $\langle u^w_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda}\rangle$

D'après le Théorème 1 on a:

$$\langle u^w_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda}\rangle = \frac{1}{C_G} \lim_{t\to+\infty} a_t^{-x(\lambda+\rho)} \Theta_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi)).$$

On va calculer $\Theta_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi))$ en utilisant (13). Comme Θ_λ est une fonction localement intégrable sur G/H, invariante à gauche par H, la formule (13) et la formule intégrale de la Proposition 3 montrent que:

$$\frac{1}{C_G}\Theta_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi)) = \int_{H/T} \psi(hT)\, d\dot{h} \int_{\mathscr{C}} \varphi_t(a) \frac{\sum_{y\in W} d(w,y,\lambda)\, a^{-y\lambda}}{\Delta_{\mathscr{A}}(waH)} D_w(a)\, da.$$

Soit encore:

$$\frac{1}{C_G}\Theta_\lambda(\Phi_t^w(\psi,\varphi))$$
$$= \int_{H/T} \psi(hT)\, d\dot{h} \times \int_{\mathscr{C}} \varphi(a) \frac{\sum_{y\in W} d(w,y,\lambda)\,(a a_{-t})^{-y\lambda}}{\Delta_{\mathscr{A}}(w a a_{-t} H)} D_w(a a_{-t})\, da.$$

Pour $a\in\mathscr{C}$, on a vu au Lemme 8

$$D_w(a a_{-t}) \sim a_t^{2x\rho}\, a^{-2x\rho}.$$

De même, comme on suppose que $\mathrm{Re}(\lambda-\rho)$ est Δ^+-dominant et que $X_0\in x(C^+)$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} a_t^{-x\lambda} \sum_{y\in W} d(w,y,\lambda)\,(a a_{-t})^{-y\lambda} = d(w,x,\lambda)\, a^{-x\lambda}.$$

Enfin

$$\Delta_{\mathscr{A}}(w a a_{-t} H) \sim \varepsilon(w,x)\, a^{-x\rho}\, a_t^{x\rho}$$

où $\varepsilon(w,x)$ est un signe qui ne nous intéressera que lorsque $w=1$. Dans ce cas:

$$\Delta_{\mathscr{A}}(aH) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} (a^{-\alpha} - a^{\alpha})$$
$$= (-1)^{|\{\alpha\in x\Delta^+ \mid \alpha\in-\Delta^+\}|} \prod_{\alpha\in x\Delta^+} (a^{-\alpha} - a^{\alpha}).$$

Mais de la définition de la longueur il vient

$$|\{\alpha\in x\Delta^+ \mid \alpha\in -\Delta^+\}| = \ell(x).$$

Donc

$$\Delta_{\mathscr{A}}(aH) = (-1)^{\ell(x)} \prod_{\alpha\in x\Delta^+} (a^{-\alpha} - a^{\alpha})$$

et l'on en déduit

$$\Delta_{\mathscr{A}}(a a_{-t} H) \sim (-1)^{\ell(x)}\, a^{-x\rho}\, a_t^{x\rho}.$$

D'où

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(a)\, a_t^{-x(\lambda+\rho)} \frac{\sum_{y \in W} d(w, y, \lambda)\,(a a_{-t})^{-y\lambda}}{\Delta_{\mathscr{A}}(w a a_{-t} H)} D_w(a a_{-t})$$
$$= d(w, x, \lambda)\, \varepsilon(w, x)\, a^{-x(\lambda+\rho)} \varphi(a)$$

avec $\varepsilon(w, x) = \pm 1$ et $\varepsilon(1, x) = (-1)^{\ell(x)}$.

Il n'est pas difficile de voir que la convergence est dominée (voir démonstration du Lemme 8). Finalement on a obtenu:

Lemme 18 *Soit* $\lambda \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}}$, *régulier, avec* $\operatorname{Re}(\lambda - \rho)$ strictement Δ^+*-dominant et tel que* $\xi_{-\lambda}$ *soit défini. Alors*:

$$\langle u^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle = \varepsilon(w, x)\, d(w, x, \lambda) \int_{H/T} \psi(hT)\, d\dot{h} \times \int_{\mathscr{C}} \varphi(a)\, a^{-x(\lambda+\rho)}\, da.$$

(*rappelons que* $u^w_{\lambda, x} = 0$ *si* $x \notin W_H$).

7.4 Deuxième calcul de $\langle u^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle$

Lemme 19 *Pour* λ *dans un ouvert non vide de* $\{\mu \in \mathfrak{a}'_{\mathbb{C}} \mid \operatorname{Re}(\mu - \rho)$ *est* Δ^+*-dominant*$\}$, *on a, pour* $x \in W_H$:

(*i*) $\langle u^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle = 0$ *si* $w \notin W_H$

(*ii*) $\langle u^1_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle = B(\lambda) \int_{\mathscr{C}} \varphi(a) a^{-x(\lambda+\rho)}\, da \int_{H/T} \varphi(hT)\, d\dot{h}$ *où* $B(\lambda) = (-1)^{|\Delta_n^+|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \left(\frac{2}{\lambda_\alpha}\right)$.

Démonstration. On a vu (cf. Lemme 12 et ce qui précède) que $u^w_{\lambda, x} = A'(w_0, \lambda)\, v^w_{\lambda, x}$ avec $v^w_{\lambda, x} \in I_{-w_0\lambda}$. D'après la Remarque 3 on a donc:

$$u^w_{\lambda, x} = A(w_0, -w_0\lambda)\, v^w_{\lambda, x}.$$

Donc

$$\langle u^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle = \langle A(w_0, -w_0\lambda)\, v^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle$$
$$= \langle v^w_{\lambda, x}, A'(w_0, -w_0\lambda)\, \xi_{-\lambda} \rangle.$$

Mais d'après le Théorème 2 on a l'égalité de fonctions méromorphes

$$A'(w_0, -w_0\lambda)\, \xi_{-\lambda} = B(\lambda)\, \xi^{w_0}_{-w_0\lambda}$$

où

$$B(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \varepsilon(\alpha) \left(\frac{-2}{\lambda_\alpha}\right) = (-1)^{|\Delta_n^+|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \left(\frac{2}{\lambda_\alpha}\right).$$

Donc:

$$\langle u^w_{\lambda, x}, \xi_{-\lambda} \rangle = B(\lambda)\, \langle v^w_{\lambda, x}, \xi^{w_0}_{-w_0\lambda} \rangle.$$

Mais on sait d'après le Lemme 12 que $v^w_{\lambda,x}$ est à support contenu dans $\overline{Hwxw_0AN}$ et, par définition, $\xi^{w_0}_{-w_0\lambda}$ est à support dans $\overline{Hw_0AN}$. Donc

$$\langle v^w_{\lambda,x}, \xi^{w_0}_{-w_0\lambda}\rangle = 0 \qquad \text{si } Hwxw_0AN \neq Hw_0AN$$

i.e. (comme $x \in W_H$) si $w \notin W_H$. D'où la partie (i) du lemme.

On prend maintenant $w=1$. Alors

$$\langle u^1_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda}\rangle = B(\lambda)\langle v^1_{\lambda,x}, \xi^{w_0}_{-w_0\lambda}\rangle.$$

Or, d'après le Lemme 12, $v^1_{\lambda,x}$ a son support inclus dans $\overline{Hxw_0AN}$ et

$$v^1_{\lambda,x}(hxw_0) = \frac{1}{c_0}\Big(\int_{\mathscr{C}} \varphi(a)\, a^{-x(\lambda+\rho)}\, da\Big)\, \psi(h).$$

On applique alors la formule intégrale de [13, Lemme 1.3] (avec la constante c_0: voir la démonstration du Lemme 12) et l'on a (puisque l'on peut travailler dans l'ouvert Hxw_0AN où $\xi^{w_0}_{-\lambda}$ est défini par une fonction)

$$\langle v^1_{\lambda,x}, \xi_{-\lambda}\rangle = \int_{\mathscr{C}} \varphi(a)\, a^{-x(\lambda+\rho)}\, da \int_{H/T} \psi(hT)\, d\dot{h}.$$

7.5 *Fin de la démonstration du Théorème 3*

D'après le Lemme 18 on voit que $d(w,x,\lambda) \equiv 0$ si $x \notin W_H$ (puisque $u^w_{\lambda,x} = 0$ si $x \notin W_H$).

Maintenant, en comparant le Lemme 18 et le Lemme 19 (i), on voit aussi que $d(w,x,\lambda)=0$ si $w \notin W_H$ et $x \in W_H$. Donc $d(w,x,\lambda)=0$ pour tout $x \in W$, si $w \notin W_H$ et ceci prouve la partie (i) du Théorème 3. Maintenant, en comparant les Lemmes 18 et 19 (ii), on voit que:

$$d(1,x,\lambda) = (-1)^{\ell(x)} B(\lambda).$$

Donc, d'après la définition des fonctions d, on a:

$$\Delta_{\mathscr{A}}(aH)\,\Theta_\lambda(aH) = B(\lambda) \sum_{x \in W_H} (-1)^{\ell(x)} a^{-x\lambda}.$$

D'où, pour $aH \in (G/H)'$

$$\Theta_\lambda(aH) = B(\lambda) \frac{\sum_{x \in W_H} (-1)^{\ell(x)} a^{-x\lambda}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (a^{-\alpha} - a^{\alpha})}$$

avec $B(\lambda) = (-1)^{|\Delta_n^+|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \left(\frac{2}{\lambda_\alpha}\right)$. □

Référenses

[1] van den Ban, E.: The principal series for a reductive symmetric space I. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **21**, 359–412 (1988)

[2] Bernstein, I.N., Gelfand, S.I.: Meromorphic property of the functions P^λ, Funkts. Anal. Prilozh. **3**, 68–69 (1969)

[3] Bruhat, F.: Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bull. Soc. Math. Fr. **84**, 97–205 (1956)

[4] Cartier, P.: Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, exposé au séminaire Bourbaki n° 454. (Lect. Notes Math., vol. 514) Berlin Heidelberg New York: Springer 1976

[5] Casselman, W.: Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G. (Preprint 1987)

[6] Duflo, M.: Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes. (Lect. Notes Math., vol. 497, pp. 26–87) Berlin Heidelberg New York: Springer 1975

[7] Erdelyi, A.: Higher transcendental functions, vol. I. New York Toronto: Mc Graw-Hill 1953

[8] Faraut, J.: Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques. J. Math. Pures Appl. **58**, 369–414 (1979)

[9] Gelfand, I.M., Chilov, G.E.: Les distributions, vol. I. Paris: Dunod 1962

[10] Harinck, P.: Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **23**, 1–38 (1990)

[11] Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups I. J. Funct. Anal. **19**, 104–204 (1975)

[12] Knapp, A., Stein, E.: Intertwining operators for semi-simple Lie group II. Invent. Math. **60**, 9–84 (1980)

[13] Olafson, G.: Fourier and Poisson transformation associated to a semi-simple symmetric space. Invent. Math. **90**, 605–629 (1987)

[14] Oshima, T., Matsuki, T.: Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroup. J. Math. Soc. Japan **32**, 399–414 (1980)

[15] Poulsen, N.: On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups. J. Funct. Anal. **9**, 87–120 (1972)

[16] Schwartz, L.: Théorie des distributions, vol. I. Paris: Hermann 1950

[17] Schwartz, L.: Sous-espaces hilbertiens et noyaux associés, applications aux représentations des groupes de Lie. In: Centre Belge de Recherches Mathématiques (ed.) Deuxième Colloque CBRM sur l'analyse fonctionnelle. Liège 1964, pp. 153–163. Paris: Gauthier-Villars 1964

[18] Wallach, N.: Harmonic analysis on homogeneous spaces. New York: Dekker 1973

[19] Warner, G.: Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, vol. I. Berlin Heidelberg New York: Springer 1973

[20] Harinck, P.: Fonctions généralisées sphériques induites sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ et applications. (Preprint)

[21] Sano, S.: Invariant spherical distributions and the Fourier inversion formula on $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})/\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, J. Math. Soc. Japan **36**, 191–218 (1984)