JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **122**, 152–221 (1994)

Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs: Equation fonctionnelle

JACQUES CARMONA ET PATRICK DELORME

Département de Mathématiques Informatique, Faculté des Sciences de Luminy, URA 225 du CNRS, 163, Avenue de Luminy, F-13288 Marseille Cedex 9, France

Communicated by M. Vergne

Received December 27, 1992; revised March 2, 1993

Let G be the group of real points of a reductive algebraic group defined over $\mathbb{R}$, σ an involution of G, and θ a Cartan involution of G commuting with σ. Let H be an open subgroup of the group of fixed points for σ. One builds a meromorphic basis for the space of H-fixed distributions vectors of induced representations from a $\sigma\theta$-stable parabolic subgroup P of G. For this, we use a method which extends the domain of application of Bruhat's thesis (in particular, to the irreducibility problem for generalized principal series). The meromorphy is obtained by means of a functional equation that we establish and which generalizes the equation obtained by E. van den Ban in the case when P is minimal $\sigma\theta$-stable.

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish Chandra, σ une involution de G, H un sous-groupe ouvert du sous-groupe des points fixes de σ, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, et K le groupe des points fixes de θ.

Le deuxième auteur de cet article a remarqué qu'il résultait du travail [Be] de J. N. Bernstein et de [De] que la mesure de Plancherel de G/H avait son support contenu dans l'ensemble des représentations induites unitaires par un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P de G de σ-décomposition de Langlands $P = MAN$, l'induisante étant de la forme $man \mapsto a^{\nu}\,\delta(m)$, où δ est une série discrète de $M/M \cap H$ et $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ (cf. Appendice C.2). La représentation induite sera notée $(\bar{\pi}^P_{\delta,\nu}, \bar{I}^P_{\delta,\nu})$ tandis que l'induite C^∞ sera notée $(\pi^P_{\delta,\nu}, I^P_{\delta,\nu})$. L'étude de la désintégration de la mesure de Dirac δ_{eH} sur G/H conduit à rechercher des vecteurs distributions H-invariants de ces induites (i.e., des éléments H-invariants du dual

0022-1236/94 \$6.00

topologique $(I^P_{\delta,\nu})'$ de $I^P_{\delta,\nu}$). Une différence notoire avec le cas des groupes (i.e., $G = G_1 \times G_1$ et $\sigma(x, y) = (y, x)$) est que, pour construire un tel vecteur pour ν imaginaire, on doit procéder à un prolongement méromorphe (cf. [Ol, B3] dans le cas des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux, [BrD] dans le cas général).

Dans cet article, on étend certains résultats d'E. van den Ban au cas de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables généraux, en supposant seulement δ unitaire irréductible. On montre, entre autres, que les vecteurs distributions H-invariants de $I^P_{\delta,\nu}$ construits dans [BrD] fournissent une base méromorphe pour ν générique. Ici et par la suite, "ν générique" signifie pour ν dans le complémentaire d'une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. D'autre part, la dépendance méromorphe doit être comprise comme suit: l'espace des vecteurs distributions de $I^P_{\delta,\nu}$ doit être regardé comme un sous-espace $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ des V^∞_δ-distributions sur G, i.e., du dual $\mathscr{D}'(G, V^\infty_\delta)$ de l'espace $\mathscr{D}(G, V^\infty_\delta)$ des fonctions C^∞ à support compact sur G à valeurs dans l'espace V^∞_δ des vecteurs C^∞ de δ. On peur alors parler de méromorphie d'une application à valeurs dans $\mathscr{D}'(G, V^\infty_\delta)$.

Pour démontrer ce résultat, on commence par démontrer, pour ν générique, une majoration de la dimension de l'espace $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ des vecteurs distributions H-invariants de $I^P_{\delta,\nu}$, par application de la théorie de Bruhat, suivant en cela une démarche parallèle à celle de van den Ban dans le cas où P est $\sigma\theta$-stable minimal (cf. [B3]). On commence par remarquer (cf. Prop. 3) que tout élément de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ admet une restriction de classe C^∞ à la réunion $\mathcal{O}$ des (H, P)-doubles classes ouvertes de G, restriction qui est entièrement déterminée par les valeurs prises sur un ensemble de représentants de ces double classes ouvertes. On en choisit un particulier $\mathscr{W}_M$ lié à un groupe de Weyl. C'est un ensemble fini.

Pour w élément de $\mathscr{W}_M$ et τ élément de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$, on note $ev_w(\tau)$ la valeur en w de la restriction à $\mathcal{O}$ de τ. C'est un élément de $\mathscr{V}(\delta, w) := ((V^\infty_\delta)')^{M \cap w^{-1}Hw}$, espace qui est de dimension finie (cf. [B2]). On établit alors que l'application $\tau \mapsto (ev_w(\tau))_{w \in \mathscr{W}_M}$ de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $\mathscr{V}(\delta) := \prod_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{V}(\delta, w)$ est injective pour ν générique (Théorème 1). Ceci fournit la borne supérieure de la dimension de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$.

Une autre application de la théorie de Bruhat que nous traitons dans l'Appendice B, montre que $\bar{I}^P_{\delta,\nu}$ est irréductible pour ν générique dans $i\mathfrak{a}^*$ (on se place dans le cas $\sigma = \theta$ ce qui implique que P est un parabolique quelconque de G). De plus, si le caractère infinitésimal de δ est réel, $\bar{I}^P_{\delta,\nu}$ est irréductible pour ν dans $i\mathfrak{a}^*$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ (Théorème B.1). Ce dernier résultat était mentionné dans une lettre de Harish Chandra à van Dijk et doit donc lui être attribué.

Rappelons brièvement ce que nous utilisons de la théorie de Bruhat.

Soit Γ un groupe de Lie agissant sur une variété X suivant un nombre fini d'orbites. Etant donné une représentation (π, V) de classe C^∞ de Γ

dans un espace localement convexe séparé (e.l.c.s.) quasi-complet, la théorie de Bruhat permet de majorer la dimension d'un espace $\mathscr{T}$ de V-distributions vérifiant

$$\forall \gamma \in \Gamma, \qquad \gamma \cdot \tau = {}^t\pi(\gamma)^{-1} \circ \tau,$$

à support dans une partie fermée Γ-invariante (ici le complémentaire de la réunion des orbites ouvertes de X) par une somme portant sur $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \hat{\mathscr{W}}$, où $\hat{\mathscr{W}}$ est un ensemble de représentants des Γ-orbites concernées, des dimensions des espaces $\mathrm{Hom}_{\Gamma_x}(V, E_n^x)$, où Γ_x est le stabilisateur de $x \in \hat{\mathscr{W}}$ dans Γ et E_n^x l'espace d'une représentation $\tilde{S}_n^x$ construite à partir du produit tensoriel symétrique d'ordre n de l'action canonique de Γ_x sur le quotient $T_x(X)/T_x(\Gamma \cdot x)$ des plans tangents en x à X et $\Gamma \cdot x$ respectivement (cf. Appendice A).

Dans notre cas, on prendra $\Gamma = H \times P$ agissant sur $X = G$ par $((h, p), g) \mapsto hgp^{-1}$. Dans l'appendice B on prend $\Gamma = P \times P$ agissant sur $X = G$ par $((p, p'), g) \mapsto pg(p')^{-1}$. Dans le premier cas, si P est $\sigma\theta$-stable minimal, ou, dans le second cas, si l'induisante est de dimension finie, la majoration, donnée par la théorie de Bruhat, de la dimension de $\mathscr{T}$, permet d'obtenir commodément un critère d'annulation de $\mathscr{T}$ car:

(a) La représentation (π, V) est de dimension finie.

(b) L'ensemble $\hat{\mathscr{W}}$ de représentants peut être choisi dans un groupe de Weyl $\hat{W}$ laissant stable un sous-espace abélien $\hat{\mathfrak{a}}$ "assez gros," espace auquel est attaché une sous-algèbre abélienne $\tilde{\mathfrak{a}}$ de Lie Γ_x.

On obtient alors simplement un critère générique d'annulation en écrivant que les deux représentations de $\tilde{\mathfrak{a}}$ (ou simplement d'un élément privilégié de $\tilde{\mathfrak{a}}$) dans V et E_n^x n'ont aucun poids en commun.

Dans notre cas, pour $x \in \mathscr{W}_M$:

$$\Gamma_x = \{(xpx^{-1}, p) \mid p \in P \cap x^{-1}Hx\},$$

et:

$$\pi(man) = a^{\nu + \rho_P}\,\delta(m),$$

où $\rho_P \in \mathfrak{a}^*$ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n} := \mathrm{Lie}\, N$. La représentation π étant de dimension infinie en général, nous utiliserons une méthode qui permet d'étendre le champ d'application habituel de la Théorie de Bruhat. Elle consiste à traduire la condition de Γ_x-entrelacement sur un sous-groupe parabolique $P^x = L^x N'^x$ (décomposition de Lévi) de $L := MA$, avec $L^x := L \cap x^{-1}Lx$ groupe θ-stable donc réductif dans $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\, G$. Si $\mathfrak{l}^x := \mathrm{Lie}\, L^x$, on peut alors associer à tout Γ_x-morphisme non nul $T \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_x}(V_\delta, E_n^x)$ un $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}^x$ morphisme non nul $\hat{T}$ de $V_\delta^\infty/(\overline{\mathfrak{n}'^x \cdot V_\delta^\infty})$ dans un sous-quotient Γ_x-irréductible F_n de E_n^x. On utilise alors les résultats classiques sur les caractères infinitésimaux de ce L^x-module et un élément privilégié du cente de $\mathfrak{l}^{\times}$ pour obtenir une condition générique d'annulation qui implique facilement l'injectivité de ev.

Si $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est tel que $\operatorname{Re} \nu - \rho_P$ soit strictement dominant par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$, on construit une application $j(P, \delta, \nu)$ de $\mathscr{V}(\delta)$ dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ telle que $ev \circ j(P, \delta, \nu)$ soit l'identité de $\mathscr{V}(\delta)$ (Théorème 3). Cela résulte immédiatement de [BrD, §3.2]. Il est toutefois nécessaire de faire sur M une hypothèse sur la continuité automatique (cf. §1.2), hypothèse vérifiée dès que G est algébrique par exemple.

Le deuxième résultat principal de ce travail (Théorème 2) concerne l'étude de l'application $j(P, \delta, \nu)$. Nous démontrons que, pour tout $\mu \in \mathfrak{a}_{\emptyset,\mathbb{C}}^*$ poids P-dominant d'une représentation (H, K)-sphérique (voir §1.4 pour les détails) de dimension finie, il existe une équation fonctionnelle reliant $j(P, \delta, \nu)$ et $j(P, \delta, \nu+\mu)$ sur leur domaine commun de définition (voir [B4, Th. 9.3] pour le cas où P est $\sigma\theta$-stable minimal). Ce résultat permet de construire un prolongement méromorphe de l'application $\nu \mapsto j(P, \delta. \nu)$.

Pour démontrer ce résultat, nous suivons une démarche parallèle à celle de [B4], mais nous démontrons directement nos résultats dans le cadre des espaces $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ en utilisant des techniques développées dans [VW]. Ceci nous permet d'éviter d'avoir à introduire trop tôt les propriétés de l'application $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$, notamment l'existence d'un prolongement méromorphe, et d'établir cette existence comme conséquence de l'équation fonctionelle. On voit alors, par prolongement méromorphe, que $ev \circ j(P, \delta, \nu)$ est l'identité de $\mathscr{V}(\delta)$ dès que $j(P, \delta, \nu)$ est défini. Ceci, joint au résultat d'injectivité générique de ev montre que, si η_i, $i = 1, ..., q$ est une base de $\mathscr{V}(\delta)$, $\{j(P, \delta, \nu, \eta_i) \mid i = 1, ..., q\}$ est une base méromorphe de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ pour ν générique (cf. Théorème 3).

Etant donné un autre sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P' de G associé à P, on introduit le transposé ${}^t\!A(P', P, \delta, \nu)$ du prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacement $A(P', P, \delta, \nu)$ de Knapp et Stein. Avec ce qui précède, on déduit immédiatement l'existence sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ d'une famille méromorphe d'endomorphismes $B(P', P, \delta, \nu)$ de $\mathscr{V}(\delta)$ telle que

$$ {}^t\!A(P, P', \delta, \nu) \circ j(P, \delta, \nu) = j(P, \delta, \nu) \circ B(P', P, \delta, \nu). $$

Au §5, nous montrons que la détermination de $B(P', P, \delta, \nu)$ se ramène au cas où les groupes P et P' sont σ-adjacents puis, par un changement de groupe G, au cas où P est un sous-groupe parabolique maximal de G. Ceci généralise des résultats de [B3].

Notons que dans le cas où P est $\sigma\theta$-stable minimal, l'existence de l'équation fonctionnelle et des endomorphismes $B(P', P, \delta, \nu)$ jouent un rôle important dans l'étude des intégrales d'Eisenstein (cf. [B4]).

Nous espérons revenir sur ces questions dans le cas général.

1. Notations

1.1. Si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual algébrique; si V est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié et $S(V)$ l'algèbre symétrique de $V_{\mathbb{C}}$.

Si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques, on désigne par $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, par E' le dual topologique de E et par ${}^tA$ la transposée d'une application linéaire continue $A \in \mathscr{L}(E, F)$.

Etant donné une variété X, dénombrable à l'infini et de classe C^∞, un espace de Fréchet V et $m \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{D}^m(X, V)$ (et $\mathscr{D}(X, V)$ si $m = \infty$) l'espace des fonctions de classe C^m sur X, à valeurs dans V et à support compact. On munit chacun de ces espaces de sa topologie naturelle et on note $\mathscr{D}'(X, V)$ le dual topologique de $\mathscr{D}(X, V)$ que l'on munira de la topologie de dual fort [Bou1].

Tout $\tau \in \mathscr{L}(V) := \mathscr{L}(V, V)$, définit par composition un endomorphisme de $\mathscr{D}(X, V)$ noté encore τ. La transposée de cette application est un endomorphisme continu pour les topologies faible et forte de $\mathscr{D}'(X, V)$. On le note ${}^t\tau$.

Si S est un groupe de Lie réel, S^0 désignera sa composante neutre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{s}$ et $X \mapsto X'$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{s})$. Le dual unitaire de S sera noté $\hat{S}$.

On choisit une mesure de Haar à gauche ds sur S, ce qui permet d'indentifier les fonctions sur S à des distributions. On note $s \mapsto L_s$ (resp. $s \mapsto R_s$) la représentation régulière gauche (resp. droite) sur $C^\infty(S)$ et $X \mapsto L_X$ (resp. $X \mapsto R_X$) la représentation de $U(\mathfrak{s})$ obtenue par différentiation. Si (π, E) est une représentation de S dans E, on notera π^* la représentation contragrédiente dans E^*, et E^S le sous-espace des invariants de $\pi(S)$. Si, de plus, E est un espace vectoriel topologique et si, pour tout s dans S, $\pi(s)$ est un endomorphisme continu, on notera $s \mapsto \pi'(s) = {}^t(\pi(s^{-1}))$ la représentation contragrédiente de S dans le dual topologique E' de E.

Pour toute représentation π de S dans un espace localement convexe séparé E, continue au sens de [C, §1], on notera E^∞ l'espace des vecteurs C^∞ de (π, E), espace que l'on munira de sa topologie naturalle (cf. loc. cit. §1). La représentation contragrédiente agit sur le dual fort $E^{-\infty}$ de E^∞ par une représentation π' qui est différentiable dès que E^∞ est un espace de Fréchet et de Montel.

1.2. Soit G un groupe réductif dans la classe de Harish Chandra (cf. e.g. [HS, (2.1)] par exemple). Si θ est une involution de Cartan de G et K le groupe des points fixes de θ, on dira qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-module est de Harish Chandra s'il est admissible et de type fini (cf. [HS, (2.23)]). Un G-module de Harish Chandra est un G-module différentiable dans un Fréchet V dont le $(\mathfrak{g}, K)$-module $V_{(K)}$ des vecteurs K-finis est un $(\mathfrak{g}, K)$-module de Harish Chandra. On dit que G satisfait la condition de continuité automatique si:

> Pour toute paire (V, W) de G-modules de Harish Chandra à croissance modérée (cf. [C] pour la définition), tout morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules $V_{(K)} \to W_{(K)}$ se prolonge en un morphisme continu de G-modules dont l'image est fermée. En particulier, tout G-morphisme continu $V \to W$ est à image fermée. (1)

Remarquons que si G satisfait (1), il existe une unique complétion à croissance modérée d'un module de Harish Chandra. L'existence résulte du théorème du sous-module de Casselman et de [C], l'unicité résulte de (1). On fera dans toute la suite de ce travail les hypothèses suivantes:

> G est un groupe réductif dans la classe de Harish Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, K le groupe des points fixes de θ. Le groupe G ainsi que les sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G possèdent la propriété de continuité automatique. (2)

Remarque 1. On sait que si G et σ sont tels que le groupe G est le sous groupe des points réels d'un groupe algébrique réductif, et σ un automorphisme involutif défini sur $\mathbb{R}$ de ce groupe algébrique, le couple (G, σ) satisfait (2) d'après [C].

1.3. On fixe un sous-groupe ouvert H du groupe des points fixes de σ. On note $\mathfrak{c}$ le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ son algèbre dérivée et $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des éléments anti-invariants par θ (resp. σ). Pour toute sous-algèbre abélienne $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$ formée d'éléments semi-simples et tout sous-espace $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{d}$, on notera $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{d})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{u}$ et, pour $\alpha \in \mathfrak{d}^*$, $\mathfrak{u}^\alpha$ le sous-espace de poids correspondant.

On fixe une forme bilinéaire B invariante sur $\mathfrak{g}$, négative définie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K, positive-définie sur $\mathfrak{s}$, qui coïncide avec la forme de Killing sur $\mathfrak{g}_1$ et telle que les couples d'espaces $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{c})$ et $(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}, \mathfrak{c} \cap \mathfrak{q})$ soient orthogonaux. On munit $\mathfrak{g}$ de la norme euclidienne associée au produit scalaire $(X, Y) \mapsto -B(X, \theta(Y))$.

On fixe un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_\emptyset$ de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$ et on note $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ un système de racines positives dans l'ensemble $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}$. On lui associe l'algèbre $\mathfrak{n}_\emptyset = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)} \mathfrak{g}^\alpha$ où $\mathfrak{g}^\alpha$ désigne le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ correspondant à la racine α de $\mathfrak{a}_\emptyset$. On note $L_\emptyset$ le centralisateur de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans G. On définit $\mathfrak{m}_\emptyset = \mathfrak{l}_{\emptyset,kh} \oplus \mathfrak{l}_{\emptyset,kq} \oplus \mathfrak{l}_{\emptyset,sh}$ où

$\mathfrak{l}_{\emptyset,k_q} = \mathfrak{l}_\emptyset \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ etc. Soit $P_\emptyset$ le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{l}_\emptyset \oplus \mathfrak{n}_\emptyset$. Il est clairement $\sigma\theta$-stable. On note $P_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset N_\emptyset$ la σ-décomposition de Langlands de $P_\emptyset$ (cf. [B3, §2]), où $M_\emptyset$ admet $\mathfrak{m}_\emptyset$ comme algèbre de Lie, $A_\emptyset = \exp(\mathfrak{a}_\emptyset)$, $N_\emptyset = \exp(\mathfrak{n}_\emptyset)$.

Soit Σ l'ensemble des racines $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$-simples de $\mathfrak{a}_\emptyset$. On fixe une partie Θ de Σ et on lui associe le sous-espace $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in \Theta} \operatorname{Ker} \alpha$, le centralisateur $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et l'orthogonal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{l}$ relativement à B de telle sorte que $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset), \alpha|_{\mathfrak{a}} \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$, le sous-groupe parabolique P de G d'algèbre $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ est $\sigma\theta$-stable et admet $P = MAN$ pour σ-décomposition de Langlands, où $A = \exp(\mathfrak{a})$, $N = \exp(\mathfrak{n})$, $L = MA$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans G et M un groupe σ et θ stable d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$. Le groupe P est $\sigma\theta$-stable et le triplet $(L, \sigma, H \cap L)$ vérifie les mêmes propriétés que (G, σ, H).

On définit enfin une forme linéaire $X \mapsto \rho_P(X) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \operatorname{ad}(X)|_{\mathfrak{n}}$ sur $\mathfrak{a}$ et on écrit $\rho_P = \rho_\emptyset$ lorsque $P = P_\emptyset$.

1.4. *Représentations de dimension finie (H, K)-sphériques*

On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$, σ et θ stable, telle que $\mathfrak{a}_m := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{s}$ soit abélienne maximale dans $\mathfrak{s}$ et contienne $\mathfrak{a}_\emptyset$ (cf. par exemple [BrD] pour l'existence). Les décompositions $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_\emptyset \oplus (\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h})$ et $\mathfrak{j} = \mathfrak{a}_m \oplus (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{k})$ permettent d'identifier $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ et $\mathfrak{a}_m^*$ à des sous-espaces de $\mathfrak{a}_m^*$ et $\mathfrak{j}^*$ respectivement. On choisit pour $\mathfrak{j}$ un système de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ compatible avec $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$, et on énumère $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ de telle sorte que $\Sigma \setminus \Theta = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$. On notera $\delta_1, ..., \delta_l \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ les poids fondamentaux correspondants.

LEMME 1. *Il existe des entiers $n_i \in \mathbb{N}^*$ $(i = 1, ..., l)$, vérifiant les conditions suivantes*:

(i) *Les éléments $\tilde{\delta}_i = n_i \delta_i$ de $\mathfrak{j}^*$ sont des poids $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$-dominants.*

(ii) *La représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids $\tilde{\delta}_i$ s'intègre en une représentation (π_i, V_i) de G possédant un vecteur H-invariant non nul.*

(iii) *La représentation (π_i, V_i) admet un vecteur K-invariant non nul.*

(iv) *Il existe sur V_i un produit scalaire invariant par K et $\mathfrak{k} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{s}$, possédant la propriété suivante: on peut choisir $v_i \in V_i$ de poids $\tilde{\delta}_i$ sous $\mathfrak{j}$, un vecteur H-invariant ξ_i et un vecteur K-invariant η_i de telle sorte que (v_i, ξ_i) et (v_i, η_i) soient réels strictement positifs.*

(v) *Le vecteur v_i est M-invariant, et $\tilde{\delta}_{i\,|\,\mathfrak{a}_\emptyset \cap \mathfrak{m}} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.*

Démonstration. L'existence des entiers n_i vérifiant (i), (ii), (iv), (v), à l'exception de l'assertion relative au vecteur K-invariant dans (iv) est démontrée dans [BrD, Lemme 2], dans l'hypothèse où G et σ sont "algébriques". On étend facilement ce résultat à la situation présente en remplaçant dans [BrD] le groupe des points complexes par le revêtement universel du sous-groupe connexe de $\operatorname{Int} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\operatorname{ad} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. La représentation $\pi_i \otimes (\pi_i' \circ \theta)$ contient la représentation $\tilde{\pi}_i$ de plus haut poids $\tilde{\delta}_i = 2n_i\,\delta_i$ qui est K-sphérique. Il est facile de voir que la famille d'entiers $(2n_i)$ satisfait les propiétés voulues. ∎

Remarque 2. Le poids $\mu = \sum_{i=1}^{m} m_i \tilde{\delta}_i$ où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, ..., m$, est $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$-dominant et la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids μ s'intègre en une représentation (π_μ, F_μ) de G. Cette représentation peut être munie d'un produit scalaire invariant par K et $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{s}$, et il existe un vecteur H-invariant e_H, un vecteur K-invariant e_K et un vecteur e_μ de plus haut poids μ, invariant sous M tels que $(e_\mu, e_\mu) = (e_\mu, e_H) = (e_\mu, e_K) = 1$. Plus précisément, (π_μ, F_μ) est la sous-représentation de $\bigotimes_{i=1}^{m} (V_i^{\otimes m_i})$ engendrée par $\bigotimes_{i=1}^{m} (v_i^{\otimes m_i})$.

1.5. *Paramétrage de l'ensemble des (H, P) double-classes ouvertes*

LEMME 2. (i) *Si Ω est un ouvert non vide de G stable par les translations à gauche par H et à droite par $P_\emptyset$, Ω contient une $(H, P_\emptyset)$ double-classe ouverte.*

(ii) *La réunion $\mathcal{O}$ des (H, P) double-classes ouvertes est dense dans G.*

Démonstration. L'assertion (i) résulte de [BrD, Lemme 3]. Le complémentaire dans G de l'adhérence de la réunion des (H, P) double-classes ouvertes est un ouvert (H, P) invariant ne contenant aucune (H, P) double-classe ouverte; il est donc réduit à l'ensemble vide, ce qui prouve (ii). ∎

Le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ s'identifie (cf. [B3, Lemme 1.2]) au quotient de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ par $Z_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On désignera par W_H l'image de $N_{K \cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ dans W et par W^M et W_H^M les groupes analogues obtenus en remplaçant G par M.

LEMME 3. (i) *L'application $m \mapsto HmP$, de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ dans l'ensemble $H \backslash G/P$ des (H, P) double-classes, induit une bijection de $W_H \backslash W/W^M$ sur l'ensemble $(H \backslash G/P)^{op}$ des (H, P) double-classes ouvertes de G.*

(ii) *Pour tout $m \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ l'application $(h, p) \mapsto hmp$ de $H \times P$ dans G est partout submersive.*

Démonstration. D'après le Lemme 2(i), toute (H, P)-double classe ouverte contient une $(H, P_\emptyset)$-double classe ouverte. On sait (cf. [B3, Prop. B2]) que l'application $m \mapsto HmP_\emptyset$ induit une bijection de $W_H \backslash W$ sur l'ensemble $(H \backslash G/P_\emptyset)^{op}$ des $(H, P_\emptyset)$-double classes ouvertes de G, et donc que toute (H, P)-double classe ouverte est de la forme HwP $(w \in W)$. Comme pour tout $w \in W$ on a $\bigcup_{v \in W_M} HwvP_\emptyset \subseteq HwP$, l'inclusion:

$$HwP \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{v \in W^M} HwvP_\emptyset\right) \tag{1}$$

montrera que les $(H, P_\emptyset)$ double-classes ouvertes contenues dans HwP sont exactement les double-classes $HwvP_\emptyset$ $(v \in W^M)$. En effet, si $y \in W_H \backslash W$ vérifie $HyP_\emptyset \subseteq HwP$, l'intersection $HyP_\emptyset \cap \mathrm{Cl}(HwvP_\emptyset)$ est non vide, pour un élément v de W^M et comme $HyP_\emptyset$ est ouvert, cet élément v vérifiera $HyP_\emptyset \cap HwvP_\emptyset \neq \emptyset$ soit encore $y \in W_H wv$. Montrons donc l'inclusion (1). En remplaçant $P_\emptyset$ (resp. P) par $P_\emptyset^w = M_\emptyset^w A_\emptyset^w N_\emptyset^w$ (resp. $P^w = M^w A^w N^w$) où $P_\emptyset^w = wP_\emptyset w^{-1}$, $N_\emptyset^w = wN_\emptyset w^{-1}$, etc. et (en remarquant que $M_\emptyset^w = M_\emptyset$, $A_\emptyset^w = A_\emptyset$), on se ramène à prouver l'inclusion dans le cas $w = 1$, car:

$$HP^w \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{y \in W^{M^w}} HyP_\emptyset^w\right)$$

équivaut à:

$$HwP \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{y \in W^{M^w}} HywP_\emptyset\right)$$

c'est-à-dire à:

$$HwP \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{v \in W^M} HwvP_\emptyset\right)$$

qui est l'inclusion voulue car $W^{M^w} = wW^M w^{-1}$. On suppose donc $w = 1$. D'après le Lemme 2(ii) appliqué à M, le groupe M est l'adhérence de la réunion de ses $(H \cap M, P_\emptyset \cap M)$ double classes ouvertes, c'est-à-dire que:

$$M = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{v \in W^M} (H \cap M)\, v(P_\emptyset \cap M)\right).$$

De $AN \subseteq P_\emptyset$, on déduit immédiatement:

$$HP = HMAN \subseteq \mathrm{Cl} \bigcup_{v \in W^M} HvP_\emptyset$$

c'est-à-dire l'inclusion recherchée. On a montré que les $(H, P_\emptyset)$-double classes ouvertes contenues dans HwP sont les $HwvP_\emptyset$ où $v \in M^M$. De plus, si $w \in W$ et $w' \in W$ sont tels que $HwP = Hw'P$, on a $Hw'P_\emptyset \subseteq HwP$ et donc d'après ce qui précède $w' \in W_H w W^M$. On a démontré l'implication suivante:

$$HwP = Hw'P \Rightarrow W_H w W^M = W_H w' W^M.$$

La réciproque est évidente.

Pour démontrer (ii), il suffit de montrer que l'application concernée est submersive au point (e, e). Utilisons l'évaluation en m des champs de vecteurs invariants à droite pour identifier l'espace $T_m(G)$ tangent en m à G à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'image de la différentielle en (e, e) de l'application $(h, p) \mapsto hmp$ de $H \times P$ dans G est égale à:

$$\mathfrak{h} + \operatorname{Ad} m(\mathfrak{p}).$$

Montrons que si $m \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ cette image est identique à $\mathfrak{g}$. Son orthogonal relativement à B est $\mathfrak{q} \cap \operatorname{Ad} m(\mathfrak{n}) \subseteq \operatorname{Ad} m(\mathfrak{n}) \cap \sigma(\operatorname{Ad} m(\mathfrak{n}))$ qui est réduit à $\{0\}$ puisque $\operatorname{Ad} m(\mathfrak{p})$ est $\sigma\theta$-stable lorsque $m \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. ∎

2. Séries principales généralisées H-sphériquess

2.1. On se fixe une représentation unitaire irréductible (δ, V_δ) du groupe M. Pour $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ on introduit la série principale généralisée lisse $(\pi_{\delta,\nu}^P, I_{\delta,\nu}^P)$ agissant sur:

$$I_{\delta,\nu}^P = \{\varphi \in C^\infty(G, V_\delta^\infty) \mid \forall (g, m, a, n) \in G \times M \times A \times N$$
$$\varphi(gman) = a^{-\nu-\rho}\, \delta(m^{-1})\, \varphi(g)\}$$

où l'on a noté $\rho = \rho_P$, l'action de G étant définie par translation à gauche. S'il n'y a aucune ambiguité possible sur le choix du parabolique P, on écrira $I_{\delta,\nu} = I_{\delta,\nu}^P$, etc. On munit $I_{\delta,\nu}^P$ de la topologie définie par les semi-normes

$$\|\varphi\|_{D,q} = \operatorname*{Sup}_{k \in K} q((L_D \varphi)(k))$$

où D décrit $U(\mathfrak{g})$ et q décrit l'ensemble des semi-normes définissant la topologie de V_δ^∞ (cf. [C, §4]). On sait que, muni de sa topologie naturelle, V_δ^∞ est un espace de Montel, (cf. [BrD, §1.4]).

On utilisera un espace indépendant du paramètre ν de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$I_\delta = \{\varphi \in C^\infty(K, V_\delta^\infty) \mid \forall (k, m) \in K \times (K \cap M),$$
$$\varphi(km) = \delta(m^{-1})\, \varphi(k)\}.$$

On munit l'espace I_δ de la famille de semi-normes

$$\|\varphi\|_{D,q} = \operatorname*{Sup}_{k \in K} q((L_D \varphi)(k)),$$

où D décrit $U(\mathfrak{k})$ et q parcourt l'ensemble des semi-normes définissant la topologie de V_δ^∞.

L'homomorphisme de restriction des fonctions de G à K définit une application linéaire $r_\nu^P : I_{\delta,\nu}^P \to I_\delta$ (ou $r_\nu : I_{\delta,\nu} \to I_\delta$) qui est clairement continue et bijective. Les deux espaces étant des espaces de Fréchet, l'application du Théorème du graphe fermé montre que r_ν est un isomorphisme d'espaces topologiques (noté aussi $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$), isomorphisme dont l'application réciproque sera notée e_ν^P (ou $e_\nu : \varphi \mapsto \varphi_\nu$). On notera $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^P$ la représentation de G sur I_δ obtenue par transport de structure. On sait que les espaces $I_{\delta,\nu}^P$ et I_δ sont des espaces de Montel car ce sont les espaces de G-modules à croissance modérée (cf. [BrD, §1.4; C]).

2.2. *Intégrales d'entrelacement*

On utilisera la définition d'une fonction holomorphe (resp. C^∞) définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) à valeurs dans un espace localement convexe séparé E donnée dans [Bou2, §3.2.1]. Rappelons que si E est quasi-complet, f est holomorphe (resp. C^∞) si et seulement si f est faiblement holomorphe (resp. faiblement C^∞) [Bou2, §3.3.1].

Donnons maintenant une définition moins standard.

On dira qu'une fonction f, définie sur un ouvert dense U' d'un ouvert U de $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans E, est méromorphe, si et seulement si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 et une fonction g_{x_0} holomorphe non nulle sur V, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $g_{x_0} f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur V à valeurs dans E.

Nous ne chercherons pas à définir précisément la notion de variété polaire d'une fonction méromorphe à valeurs vectorielles. On utilisera pourtant cette terminologie en disant que f admet une variété polaire contenue dans F (non nécéssairement fermé) si f admet un prolongement holomorphe au voisinage de chacun des points du complémentaire de F.

Soit $P_j = MAN_j$, $j = 1, 2$ deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G admettant un même facteur de Lévi $L = MA$. La Proposition suivante résume un certain nombre de propriétés des intégrales d'entrelacement établies dans [KSt, VW].

PROPOSITION 1. (i) *Il existe une constante réelle $c = c_\delta$ telle que si on note $\Delta(\mathfrak{n}_1 \cap \theta(\mathfrak{n}_2), \mathfrak{a})$ l'ensemble des poids de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_1 \cap \theta(\mathfrak{n}_2)$ et*

$$\mathscr{A}(P_2, P_1) = \{\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_1 \cap \theta(\mathfrak{n}_2), \mathfrak{a}), \operatorname{Re}(\nu, \alpha) > c\}$$

l'intégrale $\int_{N_2 \cap \theta(N_1)} \varphi(xv)\, dv$ (où dv est une mesure de Haar) converge absolument dans V_δ^∞ pour tout $\nu \in \mathscr{A}(P_2, P_1)$, $\varphi \in I_{\delta,\nu}^{P_1}$, $x \in G$.

La relation:

$$(A(P_2, P_1, \delta, \nu)(\varphi))(x) = \int_{N_2 \cap \theta(N_1)} \varphi(xv)\, dv$$

définit un élément $A(P_2, P_1, \delta, \nu)(\varphi)$ de $I_{\delta,\nu}^{P_2}$. De plus, l'opérateur $A(P_2, P_1, \delta, \nu)$ entrelace les représentations $\pi_{\delta,\nu}^{P_1}$ et $\pi_{\delta,\nu}^{P_2}$ de G, d'où le nom d'intégrale *d'entrelacement qui lui est donné. On notera* $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *l'endomorphisme de* I_δ *obtenu par transport de structure en utilisant les isomorphismes* $r_\nu^{P_j} : I_{\delta,\nu}^{P_j} \to I_\delta$ *précédemment construits.*

(ii) *Si on munit l'espace* $\mathscr{L}(I_\delta)$ *des endomorphismes continus de l'espace de Fréchet* I_δ *dans lui-même de la topologie de la convergence simple, l'application* $\nu \mapsto \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *de* $\mathscr{A}(P_2, P_1)$ *dans* $\mathscr{L}(I_\delta)$ *ainsi définie se prolonge en une application méromorphe sur* $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, *à valeurs dans* $\mathscr{L}(I_\delta)$ *et dont la variété polaire est contenue dans la réunion d'une famille localement finie d'hyperplans. On notera encore* $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *ce prolongement.*

(iii) *Il existe une famille localement finie d'hyperplans de* $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, *famille dont la réunion sera notée* $\mathscr{H}_\delta$, *et dont le complémentaire sera noté* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C},\delta,i}^*$, *tels que ce prolongement soit défini et inversible pour* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C},\delta,i}^*$ *et tout* P_1, P_2. *Plus précisément, les équations de ces hyperplans sont du type* $(\nu, \alpha) = cste$ *où* α *décrit* $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Démonstration. L'assertion (i) résulte de [VW, Lemme 1.2]. Remarquons toutefois que ceux-ci travaillent dans le dual complexe $\mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_1$ de la composante déployée de MA alors qu'ici ν appartient au dual de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^* \subseteq \mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^*$.

Pour démontrer (ii), remarquons que l'espace de Fréchet I_δ est tonnelé. D'après le Théorème de Banach–Steinhaus, toute limite simple d'éléments de $\mathscr{L}(I_\delta)$ appartient à $\mathscr{L}(I_\delta)$ [Bou1, Ch. 3, §3, No. 6]. Pour vérifier qu'une fonction $T : \Omega \to \mathscr{L}(I_\delta)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe, il suffit, lorsque $\mathscr{L}(I_\delta)$ est muni de la topologie de la convergence simple, de vérifier que pour tout $z \in \Omega$, tout $v \in \mathbb{C}^n$ et tout $\varphi \in I_\delta$ fixés, le quotient $(T(z + \xi v)(\varphi) - T(z)(\varphi))/\xi$ admet, dans I_δ, une limite lorsque ξ tend vers zéro dans $\mathbb{C}$. En effet, et d'après la remarque ci-dessus, cette limite sera donnée par l'action sur φ d'un élément de $\mathscr{L}(I_\delta)$. Il suffit donc de vérifier que, pour tout $\varphi \in I_\delta$ fixé, l'application $z \mapsto T(z)(\varphi)$ est holomorphe à valeurs dans I_δ.

Pour obtenir le prolongement méromorphe, on utilise l'équation fonctionnelle du Th. 1.5 de [VW], puis on restreint à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Si on tient compte de la liberté dont on dispose dans le choix du poids dominant μ figurant dans cette équation fonctionnelle, on peut appliquer un raisonnement analogue à celui de [BrD, Th.A.3.3] pour vérifier que la variété polaire de $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ (pour $\nu \in \mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^*$), est une famille localement finie d'hyperplans. On obtient ensuite le résultat désiré par restriction à $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$.

Pour démontrer (iii), on introduit grâce à [KSt, Prop. 7.3], une fonction $\nu \mapsto \eta(P_2, P_1, \delta, \nu)$, méromorphe sur $\mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et telle que

$$\begin{aligned}\tilde{A}(P_1, P_2, \delta, \nu)\, \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu) &= \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)\, \tilde{A}(P_1, P_2, \delta, \nu)\\ &= \eta(P_2, P_1, \delta, \nu)\, Id_{I_\delta},\end{aligned}$$

(égalité de fonctions méromorphes). Cette égalité est établie au niveau des vecteurs K-finis dans [KSt]; elle se prolonge par continuité à l'espace I_δ tout entier. Il résulte en outre du Th. 7.6 et de la Prop. 7.4 de [KSt] que

$$\eta(P_2, P_1, \delta, \nu) > 0 \qquad (\nu \in \sqrt{-1}\,\mathfrak{a}_1^*).$$

Plus précisément (Th. 6.6 et Th. 7.6(v) de [KSt]), les zéros de $\eta(P_2, P_1, \delta, \nu)$ sont contenus dans une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}_{1,\mathbb{C}}^*$ dont les équations sont du type $(\nu, \alpha) = cste$ pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1)$.

Comme il existe $\nu_0 \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ tel que $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ et $A(P_1, P_2, \delta, \nu)$ soient définis simultanément lorsque ν varie dans un voisinage de ν_0, l'espace $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ n'est pas contenu dans la variété polaire de $\eta(P_2, P_1, \delta, \nu)$. Il existe donc des points $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ qui ne sont pas contenus dans les variétés polaires de $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ et $\tilde{A}(P_1, P_2, \delta, \nu)$ et tels que $\eta(P_2, P_1, \delta, \nu) \neq 0$. On obtient ainsi les assertions de (iii). ∎

Corollaire 1. (i) *L'application* $\nu \mapsto {}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ (*où* ${}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *est la transposée de l'application linéaire continue* $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu) \in \mathscr{L}(I_\delta)$) *de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C},\delta,i}^* \subseteq \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ *dans* $\mathscr{L}(I'_\delta)$ *est méromorphe sur* $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ *lorsqu'on munit* $\mathscr{L}(I'_\delta)$ *de la topologie de la convergence simple. De plus, pour* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C},\delta,i}^*$, $\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *est défini et inversible.*

(ii) *Si* $z \mapsto \tau(z)$ *est une appliation holomorphe d'un ouvert connexe* Ω *d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, à valeurs dans* I'_δ, $z \mapsto \nu(z)$ *une application holomorphe de* Ω *dans* $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ *dont l'image n'est pas entièrement contenue dans le complémentaire de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C},\delta,i}^*$ *dans* $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, *l'application* $z \mapsto {}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu(z))\,\tau(z)$ *est méromorphe sur* Ω.

De plus, si pour $z_0 \in \Omega$, $V(\nu(z_0))$ *est un voisinage ouvert de* $\nu(z_0) \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ *et* $f : V(\nu(z_0)) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe non nulle et telle que* $\nu \mapsto f(\nu)\,\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ *soit holomorphe sur* $V(\nu(z_0))$, *alors* $z \mapsto f(\nu(z))\,{}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu(z))\,\tau(z)$ *est holomorphe sur* $\nu^{-1}(V(\nu(z_0)))$.

Démonstration. (i) On peut raisonner localement. On se fixe un élément $\nu_0 \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, un voisinage $V(\nu_0)$ de ν_0 et une fonction f, holomorphe sur $V(\nu_0)$ tels que $\nu \mapsto f(\nu)\,\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ soit holomorphe sur $V(\nu_0)$. On va vérifier que $\nu \mapsto f(\nu)\,{}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)$ est holomorphe.

L'espace I_δ étant un espace de Montel [BrD], son dual fort I'_δ est aussi un espace de Montel [Bou1, Ch. 4, §3, Prop. 6], donc est tonnelé d'après la définition même d'un espace de Montel.

Il suffit donc (cf. le début de la démonstration de la Prop. 1) de démontrer que pour tout $\tau \in I'_\delta$, l'application $\nu \mapsto f(\nu)\,{}^t\tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)\tau$ est holomorphe à valeurs dans I'_δ. Comme l'espace de Montel I'_δ est quasi-complet, cette holomorphie est équivalente à l'holomorphie faible. Tout espace de Montel étant réflexif, il suffit finalement de vérifier que pour tout couple $(\tau, \varphi) \in (I'_\delta, I_\delta)$ l'application

$$\nu \mapsto \langle f(\nu)^t \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu)\, \tau, \varphi \rangle$$

est holomorphe, ce qui résulte immédiatement de la Proposition 1 et des définitions.

Pour démontrer (ii), on se ramène comme ci-dessus à prouver l'holomorphie sur $V(z_0) := \nu^{-1}(V(\nu(z_0)))$ de

$$z \mapsto \langle f(\nu(z))^t \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu(z))\, \tau(z), \varphi \rangle$$

et ce pour tout $\varphi \in I_\delta$. Or l'application

$$(z, z') \mapsto \langle f(\nu(z))^t \tilde{A}(P_2, P_1, \delta, \nu(z))\, \tau(z'), \varphi \rangle$$

est séparément holomorphe donc (globalement) holomorphe. On en déduit (ii) par restriction à la diagonale. ∎

2.3. *Vecteurs distributions des séries principales généralisées*

On conserve les notations du §1.1. On note L (resp. R) la représentation régulière gauche (resp. droite) de G dans $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$, et L' (resp. R') sa contragrédiente dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$. De la même façon, on notera δ' l'action contragrédiente de M sur $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ obtenue à partir de l'action par composition de M sur $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$.

On veut identifier le sous-espace topologique

$$\begin{aligned}\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) = \{\tau \in \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty) \mid \forall (m, a, n) \in M \times A \times N,\\ R'(man)\tau = a^{\nu-\rho}\, \delta'(m^{-1})\tau\}\end{aligned} \tag{1}$$

du dual fort $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ de $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$ au dual topologique fort $(I_{\delta,\nu}^P)'$ de $I_{\delta,\nu}^P$. Pour cela on définit $\delta_\nu^P : P \to \mathscr{L}(V_\delta^\infty)$ par:

$$\forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N, \qquad \delta_\nu^P(man) = a^{\nu-\rho}\, \delta(m). \tag{2}$$

A $\varphi \in \mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$ on associe $\theta_\nu^P(\varphi) : G \to V_\delta^\infty$ tel que:

$$\forall g \in G, \qquad (\theta_\nu^P(\varphi))(g) = \int_P \delta_{\nu+2\rho}^P(p)\, \varphi(gp)\, d_l p \tag{3}$$

où $d_l p$ est une mesure de Haar à gauche sur P. On vérifie facilement que $\theta_\nu^P(\varphi) \in I_{\delta,\nu}^P$ et que θ_ν^P définit un entrelacement de G-modules entre $(L, \mathscr{D}(G, V_\delta^\infty))$ et $(\pi_{\delta,\nu}^P, I_{\delta,\nu}^P)$.

On se fixe une fonction $\psi_0 \in C_c^\infty(P)$, invariante à gauche par $M \cap K$ et telle que:

$$\int_P \psi_0(p)\, d_l p = 1. \tag{4}$$

Grâce à la $M \cap K$-invariance à gauche de ψ_0, la relation

$$\forall k \in K, \forall p \in P, \qquad \psi_0(kp) = \psi_0(p), \tag{5}$$

définit sans ambiguité un prolongement C^∞ de ψ_0 de P à G.

On note ω_ν^P l'application linéaire continue de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ dans $(I_{\delta,\nu}^P)'$ obtenue par transposition et restriction de l'application linéaire continue $\varphi \mapsto \psi_0 \varphi$ de $I_{\delta,\nu}^P$ dans $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$.

LEMME 4. (i) *L'application ω_ν^P est caractérisée par la relation*:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu), \forall \varphi \in I_{\delta,\nu}^P, \qquad \langle \omega_\nu^P(\tau), \varphi \rangle = \langle \tau, \psi_0 \varphi \rangle. \tag{6}$$

(ii) *L'image de la transposée ${}^t(\theta_\nu^P)$ de θ_ν^P est contenue dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$.*

(iii) *L'application ω_ν^P est un isomorphisme topologique de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ sur $(I_{\delta,\nu}^P)'$ admettant pour inverse ${}^t(\theta_\nu^P)$.*

Démonstration. C'est une vérification immédiate. ∎

Ce résultat nous permet d'identifier (algébriquement et topologiquement) $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ et $(I_{\delta,\nu}^P)'$ ce que nous ferons désormais, en écrivant $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) = (I_{\delta,\nu}^P)'$.

De la même façon on idenfiera I'_δ au sous-espace $\mathscr{D}'(K, \delta)$ de $\mathscr{D}'(K, V_\delta^\infty)$ défini par

$$\mathscr{D}'(K, \delta) := \{\tau \in \mathscr{D}'(K, V_\delta^\infty) \mid \forall m \in M \cap K, R'_m \tau = \delta'(m^{-1})\tau\}. \tag{7}$$

Si Q est le projecteur canonique de $\mathscr{D}(K, V_\delta^\infty)$ sur I_δ défini par

$$(Q(\varphi))(k) = \int_{M \cap K} \delta(m)\, \varphi(km)\, dm \tag{8}$$

l'identification de $\mathscr{D}'(K, \delta)$ à I'_δ se fera par la relation

$$\forall \tau \in I'_\delta, \forall \varphi \in \mathscr{D}(K, V_\delta^\infty)), \qquad \langle \tau, \varphi \rangle := \langle \tau, Q(\varphi) \rangle. \tag{9}$$

L'application ${}^t(r_\nu^P) : I'_\delta \to (I_{\delta,\nu}^P)'$ sera notée $\tau \mapsto \tau^P_{-\nu}$ ou $\tau \mapsto \tau_{-\nu}$ s'il n'y a pas de confusion possible sur P. D'après les résultats précédents, c'est un isomorphisme topologique qui entrelace $(\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^P)'$ et $(\pi_{\delta,\nu}^P)'$ (notées respectivement $\tilde{\pi}'_{\delta,\nu}$ et $\pi'_{\delta,\nu}$ s'il n'y a aucun risque d'ambiguité sur P).

L'isomorphisme réciproque est ${}^t(e_\nu^P)$ (dont on peut montrer qu'il correspond à la restriction de G à K des V_δ^∞-distributions), sera noté $\tau \mapsto \tilde{\tau}$.

Il est facile de vérifier que

$$\forall \tau \in I'_\delta, \qquad \operatorname{Supp} \tau_{-\nu} = (\operatorname{Supp} \tau) P, \tag{10}$$

et

$$\forall \tau \in I'_{\delta,\nu}, \qquad \operatorname{Supp} \tilde{\tau} = \{k \in K \mid kP \subseteq \operatorname{Supp} \tau\}. \tag{11}$$

En utilisant la définition des intégrales d'entrelacement, et leur prolongement méromorphe, on voit facilement que, pour tout élément ν de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $A(P_2, P_1, \delta, \nu)$ soit défini:

$$\forall \varphi \in I_{\delta,\nu}^{P_1}, \qquad \operatorname{Supp} A(P_2, P_1, \delta, \nu)(\varphi) \subseteq \overline{((\operatorname{Supp} \varphi)(\theta(N_1) \cap N_2))}. \tag{12}$$

Par dualité, et en utilisant les relations (9) et (10), on obtient facilement que, pour tout élément ν de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $A(P_2, P_1, \delta, \nu)$ soit défini:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P_2, \delta, \nu), \qquad \operatorname{Supp} {}'A(P_2, P_1, \delta, \nu)(\tau) \subseteq \overline{((\operatorname{Supp} \tau)(\theta(N_2) \cap N_1))}. \tag{13}$$

L'argument utilise l'égalité:

$$P_2 P_1 = (\theta(N_1) \cap N_2) P_1, \tag{14}$$

qui repose sur l'égalité:

$$N_2 = (\theta(N_1) \cap N_2)(N_1 \cap N_2),$$

(cf. [W, Lemme 8.10.2]).

2.4. *Une famille holomorphe de vecteurs distributions pour les séries principales sphériques, définie sur un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Les applications $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$*

On note $\mathscr{W}_M$ un ensemble de représentants des double-classes de $W_H \backslash W / W^M$ dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ (cf. Lemme 3).

Remarquons que, pour tout $w \in \mathscr{W}_M$, $w^{-1}Hw$ est le groupe des points fixes de l'involution σ_w de G définie par

$$\forall g \in G, \qquad \sigma_w(g) = w^{-1}(\sigma(wgw^{-1}))w.$$

Comme w a été choisi dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, σ_w commute avec l'involution θ et $\sigma_w(M_\emptyset) = M_\emptyset$.

A tout $w \in W$ on associe l'espace

$$\mathscr{V}(\delta, w) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap w^{-1}Hw} \tag{1}$$

et on construit la somme directe:

$$\mathscr{V}(\delta) = \bigoplus_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{V}(\delta, w). \tag{2}$$

Ces espaces sont de dimension finie (cf. [B2]). L'injection de $\mathscr{V}(\delta, w)$ dans $\mathscr{V}(\delta)$ sera notée $i(\delta, w)$ et la projection de $\mathscr{V}(\delta)$ sur $\mathscr{V}(\delta, w)$ parallèlement aux autres composantes sera notée $pr(\delta, w)$.

Dans ce qui suit, ν désignera un élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ vérifiant la condition suivante:

$$\operatorname{Re}(\nu - \rho) \text{ est strictement dominant pour } \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}). \tag{3}$$

A tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta, 1)$ on associe une fonction $\varepsilon_1(P, \delta, \nu, \eta)$ définie sur G, à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$, par les relations:

(a) $\varepsilon_1(P, \delta, \nu, \eta) = 0$ en dehors de HP.

(b) $\forall (h, m, a, n) \in H \times M \times A \times N$,

$$\varepsilon_1(P, \delta, \nu, \eta)(hman) = a^{(\nu - \rho)} \delta'(m^{-1})\eta. \tag{4}$$

Pour $w \in \mathscr{W}_M$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ on définit:

$$\varepsilon_w(P, \delta, \nu, \eta) = R_{w^{-1}} \varepsilon_1(wPw^{-1}, w\delta, w\nu, \eta) \tag{5}$$

où $w\delta$ est la représentation de wMw^{-1} déduite de δ par transport de structure. Cette expression est bien définie car $\eta \in (V_\delta^{-\infty})^{M \cap w^{-1}Hw}$ équivaut à $\eta \in (V_{w\delta}^{-\infty})^{wMw^{-1} \cap H}$. Ici, R désigne la représentation régulière droite de G. On associe enfin à tout élément ν vérifiant (3) et tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$:

$$j(P, \delta, \nu, \eta) = \sum_{w \in \mathscr{W}_M} \varepsilon_w(P, \delta, \nu, pr(\delta, w)\eta). \tag{6}$$

Rappelons le résultat suivant de [BrD] (où il est énoncé sous des hypothèses plus restrictives) qui s'étend sans changement à notre situation.

PROPOSITION 2. (i) *Soit* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *tel que* $\operatorname{Re}(\nu - \rho)$ *soit strictement dominant pour* $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$. *Alors, pour tout* $w \in \mathscr{W}_M$ *et tout* $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ (*resp. tout* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$), *la fonction* $\varepsilon_w(P, \delta, \nu, \eta)$ (*resp.* $j(P, \delta, \nu, \eta)$) *est continue sur* G *à valeurs dans le dual for* $V_\delta^{-\infty}$. *Cette fonction définit un élément de* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$.

(ii) *L'application* $\nu \mapsto \varepsilon_w(P, \delta, \nu, \eta)$ (*resp.* $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu, \eta)$) *est holomorphe sur l'ouvert de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$\mathscr{C} := \{\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \operatorname{Re}(\nu - \rho) \text{ est strictement dominant pour } \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})\}$$

à valeurs dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^{\infty})$.

Remarque concernant la démonstration. C'est pour établir cette proposition que l'hypothèse de continuité automatique sur M a été introduite (cf. dans [BrD] la preuve du Lemme 6, de la Prop. 1 et la Remarque finale de l'introduction).

Noter que dans [BrD] on s'intéressait seulement à ε_1, mais les résultats s'étendent immédiatement à ε_w et j. ∎

On définira pour $\nu \in \mathscr{C}$ les applications linéaires $j(P, \delta, \nu) : \mathscr{V}(\delta) \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ et $\varepsilon_w(P, \delta, \nu) : \mathscr{V}(\delta, w) \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ par:

$$j(P, \delta, \nu)(\eta) = j(P, \delta, \nu, \eta)$$

et

$$\varepsilon_w(P, \delta, \nu)(\eta) = \varepsilon_w(P, \delta, \nu, \eta).$$

On pourra alors regarder $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$ comme une application holomorphe sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{V}(\delta), \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty))$.

3. Restriction des vecteurs distributions H-invariants des séries principales généralisées aux (H, P) double-classes ouvertes

3.1. *Régularité de la restriction*

Lemme 5. *Etant donné une application ν d'un ensemble Ω dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on dira qu'une application $\tau : \Omega \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ est de type (P, δ, ν) si, pour tout $z \in \Omega$, l'image $\tau(z)$ est contenue dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu(z)) = (I^P_{\delta, \nu(z)})'$. On notera alors $\tilde{\tau}$ l'application de Ω dans I'_δ définie par*

$$(\tilde{\tau}(z)) = (\widetilde{\tau(z)}) \qquad (z \in \Omega).$$

(a) *On suppose tout d'abord que $\nu(\Omega)$ est borné. Dans ce cas les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *La famille $\tau(\Omega)$ est une famille équicontinue de formes linéaires sur $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$.*

(ii) *La famille $\tilde{\tau}(\Omega)$ est une famille équicontinue de formes linéaires sur I_δ.*

(b) *On suppose maintenant que Ω est un ouvert d'un espace vectoriel complexe de dimension finie et que ν est holomorphe sur Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i)′ L'*application τ est holomorphe de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ muni de la topologie faible de dual de $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$.*

(ii)′ *L'application $\tilde{\tau}$ est holomorphe de Ω dans I'_δ muni de sa topologie de dual fort.*

(iii)′ *L'application τ est holomorphe de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ muni de la topologie forte.*

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). L'espace de Fréchet I_δ étant tonnelé, il suffit [Bou1, Ch. 3, §3, No. 6, Th. 2] de vérifier que $\tilde{\tau}(\Omega)$ est simplement borné. Si $\varphi \in I_\delta$, l'identification entre $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu(z))$ et $(I^P_{\delta,\nu(z)})'$ (cf. Lemme 4(i)) et la définition de $\tilde{\tau}$ (voir après le Lemme 4) se traduisent ici par

$$\langle \tilde{\tau}(z), \varphi \rangle = \langle \tau(z), \psi_0 \varphi_{\nu(z)} \rangle.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ on définit $f^\lambda : G \to \mathbb{C}$ par la relation

$$\forall k \in K, \forall m \in M, \forall a \in A, \forall n \in N, \qquad f^\lambda(kman) = a^\lambda.$$

Alors $f^\lambda \in C^\infty(G)$ et l'application $\lambda \mapsto f^\lambda$ est holomorphe de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $C^\infty(G)$. De plus,

$$\varphi_\lambda = f^{-\lambda} \varphi_0 \qquad (\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}),$$

de telle sorte que

$$\langle \tilde{\tau}(z), \varphi \rangle = \langle \tau(z), f^{-\nu(z)} \psi_0 \varphi_0 \rangle.$$

Mais si $\nu(\Omega)$ est borné, $\{f^{-\nu(z)} \mid z \in \Omega\}$ est, grâce à la continuité de $\lambda \mapsto f^\lambda$, relativement compact dans $C^\infty(G)$ donc borné. Dans ce cas $\{f^{-\nu(z)} \psi_0 \varphi_0 \mid z \in \Omega\}$ est borné d'après le Lemme A.1(iv). L'équicontinuité de $\tau(\Omega)$ implique alors que $\{\langle \tau(z), f^{-\nu(z)} \psi_0 \varphi_0 \rangle \mid z \in \Omega\}$ est borné pour tout $\varphi \in I_\delta$. L'ensemble $\tilde{\tau}(\Omega)$ est donc simplement borné, ce qui achève de prouver que (i) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (i). Si on suppose donc $\tilde{\tau}(\Omega)$ équicontinu, les identifications usuelles se traduisent par

$$\forall z \in \Omega, \qquad \tau(z) = (\tilde{\tau}(z))_{-\nu(z)} = f^{\nu(z)}(\tilde{\tau}(z))_0. \tag{1}$$

Grâce à la continuité de $r_0 \circ \theta_0$, (cf. §2.3), l'ensemble de formes linéaires sur $\mathscr{D}(G, V^\infty_\delta)$:

$$\{(\tilde{\tau}(z))_0 \mid z \in \Omega\} = \{{}^t(r_0 \circ \theta_0)(\tilde{\tau}(z)) \mid z \in \Omega\}$$

est équicontinu dans I'_δ. L'ensemble $\{f^{\nu(z)} \mid z \in \Omega\}$ est contenu dans l'image par l'application continue $\lambda \mapsto f^\lambda$ du compact $\overline{\nu(\Omega)}$. Elle est bornée dans $C^\infty(G)$. Le Lemme A.1(v) et (1) permettent d'en déduire que $\tau(\Omega)$ est équicontinu, ce qui achève de prouver que (i) implique (ii).

On suppose maintenant que ν est holomorphe (mais $\nu(\Omega)$ non nécessairement borné). On veut prouver l'équivalence de (i)', (ii)' et (iii)'.

Montrons d'abord que (i)' implique (ii)'. Supposons donc τ holomorphe. L'espace de Fréchet I_δ est tonnelé et son dual for I'_δ est quasi-complet [Bou1, Ch. 4, §3, No. 2, Prop. 3]. D'autre part, l'espace I_δ est de Montel (cf. §2.1) donc réflexif. L'application $\tilde{\tau}$ est fortement holomorphe si et seulement si elle est faiblement holomorphe (cf. [Bou2, 3.3.1]). Soit $\varphi \in I_\delta$. De l'holomorphie de l'application $z \mapsto f^{-\nu(z)}$ de Ω dans $C^\infty(G)$ découle celle de l'application $z \mapsto f^{-\nu(z)}\psi_0\varphi_0$ de Ω dans $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$. On en déduit que l'application:

$$(z, z') \mapsto \langle \tau(z), f^{-\nu(z')}\psi_0 e_0(\varphi) \rangle$$

de $\Omega \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ est séparément holomorphe, donc (globalement) holomorphe. On en déduit, par restriction à la diagonale, que $z \mapsto \langle \tilde{\tau}(z), \varphi \rangle$ est holomorphe sur Ω, c'est-à-dire que (i)' implique (ii)'.

Prouvons maintenant que (ii)' implique (iii)'. Supposons donc $\tilde{\tau}$ holomorphe. On a vu que:

$$\tau(z) = f^{\nu(z)}(\tilde{\tau}(z))_0 = f^{\nu(z)}({}^t(r_0 \circ \theta_0)' \, (\tilde{\tau}(z))).$$

L'application ${}^t(r_0 \circ \theta_0)$ est continue et $\tilde{\tau}$ est holomorphe; l'application $z \mapsto {}^t(r_0 \circ \theta_0)(\tilde{\tau}(z))$ est donc holomorphe de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ fort. D'autre part, la fonction ν étant holomorphe, l'application $z \mapsto f^{\nu(z)}$ est holomorphe de Ω dans $C^\infty(G)$. L'holomorphie de τ résulte alors du Lemme A.1(vii), ce qui achève de prouver que (ii)' implique (iii)'. Comme (iii)' implique trivialement (i)', le lemme est démontré. ∎

DÉFINITION 1. On dira qu'une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ vérifie la condition $(\mathscr{H})$ s'il existe des réels positifs $\{c_D > 0 \mid D \in U(\mathfrak{h})\}$ (avec $c_1 = 1$), tels que l'ensemble $\{c_D^{-1}(L_D)'\tau \mid \tau \in \mathscr{A}, D \in U(\mathfrak{h})\}$ soit équicontinu.

PROPOSITION 3. (i) *Soit Ω un ouvert d'un espace vectoriel complexe de dimension finie et ν: $\Omega \to \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ une application holomorphe. On suppose que $\tau : \Omega \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ est une application holomorphe de type (P, δ, ν) qui vérifie l'une des conditions suivantes:*

$$\textit{Pour tout compact } \omega \textit{ de } \Omega, \tau(\omega) \textit{ satisfait } (\mathscr{H}). \tag{C}$$

Ou bien

> *Pour tout $z \in \Omega$, $\tau(z)$ est invariante à gauche sous l'action du groupe H.*

Alors, pour tout z dans Ω, la restriction de $\tau(z)$ à la réunion $\mathscr{O}$ des (H, P) double-classes ouvertes de G est une fonction C^∞ sur $\mathscr{O}$ à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$ (on identifie les fonctions C^∞ sur les ouverts de G à des distributions grâce à la mesure de Haar de G choisie au §1).

(ii) *Si $x \in \mathscr{O}$, l'application $z \mapsto \tau(z)(x)$ de Ω dans $V_\delta^{-\infty}$ est holomorphe.*

Démonstration. L'image par l'application holomorphe τ de tout compact ω de Ω est compacte, donc faiblement bornée dans le dual de l'espace tonnelé $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$ (Lemme A.1(iii)) donc équicontinue [Bou1, Ch. 3, §3, No. 6, The. 2].

Si les $\tau(z)$ $(z \in \Omega)$, sont invariantes à gauche par H, $\tau(\omega)$ vérifie trivialement la condition $(\mathscr{H})$. On est donc ramené à prouver la proposition en supposant que τ vérifie la condition (C) ce que nous ferons désormais.

On peut raisonner localement et remplacer Ω par un ouvert relativement compact dans Ω pour se placer dans le cas où $\tau(\Omega)$ vérifie la condition $(\mathscr{H})$ et $\nu(\Omega)$ est borné. Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application $(h, p) \mapsto hxp$ de $H \times P$ dans G est submersive en tout point $(h, p) \in H \times P$ (Lemme 3(ii)). Cela signifie que les champs de vecteurs $\{L_X \mid X \in \mathfrak{h}\}$ et $\{R_Y \mid Y \in \mathfrak{p}\}$ engendrent en tout point de $\mathcal{O}$ l'espace tangent à G.

Etant donné $x \in \mathcal{O}$, il est facile de vérifier qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}'$ de x dans $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}'$ soit l'image d'une carte (c'est-à-dire difféomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^p$) et que les champs de vecteurs $\{L_X \mid X \in \mathfrak{h}\}$ et $\{R_Y \mid Y \in \mathfrak{p}\}$ engendrent le $C^\infty(\mathcal{O}')$-module des champs de vecteurs sur $\mathcal{O}'$. On peut en outre supposer que $\mathcal{O}'$ est relativement compact dans $\mathcal{O}$.

L'ensemble de formes $\{c_D^{-1}(L'_D)\, \tau(z) \mid z \in \Omega,\, D \in U(\mathfrak{h})\}$ étant équicontinu sur $\mathscr{D}_{\bar{\mathcal{O}}'}(\mathcal{O}, V_\delta^\infty) \subseteq \mathscr{D}_{\bar{\mathcal{O}}'}(G, V_\delta^\infty)$ on voit qu'il existe une semi-norme continue p sur V_δ^∞ et des opérateurs différentiels $D_1^0, ..., D_n^0$ sur $\mathcal{O}$ tels que:

$$\begin{gathered}\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)(\subseteq \mathscr{D}_{\bar{\mathcal{O}}'}(\mathcal{O}, V_\delta^\infty)), \qquad \forall z \in \Omega, \forall D \in U(\mathfrak{h}),\\ |c_D^{-1}\langle (L'_D)\, \tau(z), \varphi \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Sup}_{x \in \mathcal{O}'} p(D_i^0 \varphi(x)).\end{gathered} \tag{2}$$

Cette majoration implique

$$\forall D \in U(\mathfrak{h}), \forall z \in \Omega, \qquad (L'_D)\, \tau(z)_{|\mathcal{O}'} \in \mathscr{D}'^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty) \tag{3}$$

où m est le plus grand des ordres des opérateurs différentiels D_i^0, $1 \leqslant i \leqslant n$, sur $\mathcal{O}'$. Comme τ est de type (P, δ, ν) on peut écrire:

$$\begin{gathered}\forall (X, Y, Z) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{n}, \qquad \forall D \in U(\mathfrak{h}),\\ (R'_{X+Y+Z})\, (L'_D)\tau(z) = (-\delta'(X) + (\nu(Z) - \rho)(Y))((L'_D)\, \tau(z)).\end{gathered} \tag{4}$$

Par ailleurs, il résulte du choix fait pour $\mathcal{O}'$ que tout opérateur différentiel sur $\mathcal{O}'$ s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients C^∞ d'éléments de la forme $R_{D'} L_D$ $(D \in U(\mathfrak{h}),\, D' \in U(\mathfrak{p}))$. La relation (4) implique alors: Pour tout opérateur différentiel D sur $\mathcal{O}'$, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ et, pour $i = 1, ..., p$, une fonction f_i holomorphe sur Ω, une fonction ψ_i de classe C^∞ sur $\mathcal{O}'$, un endomorphisme continu γ_i de V_δ^∞ et un élément D_i de $U(\mathfrak{h})$ tels que:

$$(D\tau(z)|_{\mathcal{O}'}) = \sum_{i=1}^{p} f_i(z)\, \psi_i\, {}'\gamma_i((L'_{D_i})\, \tau(z)|_{\mathcal{O}'}) \tag{5}$$

où, pour γ endomorphisme de V_δ^∞, on a noté ${}^t\gamma$ l'endomorphisme transposé de l'endomorphisme de $\mathscr{D}(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ défini par la composition avec γ. De plus, $f_i(\Omega)$ est borné (car $v(\Omega)$ est borné).

Comme les distributions $(L'_{D_i})\tau(z)_{|\mathcal{O}'}$ sont dans $\mathscr{D}'^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ d'après (3), il en résulte que, pour tout opérateur différentiel D sur $\mathcal{O}'$ et tout $z \in \Omega$:

$$D\tau(z)_{|\mathcal{O}'} \in \mathscr{D}'^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty). \tag{6}$$

Il résulte alors du Lemme A.1(iii) que pour tout $z \in \Omega$, tout $v \in V_\delta^\infty$ et tout opérateur différentiel D sur $\mathcal{O}'$, la distribution $(D\tau(z))_v$ est d'ordre inférieur ou égal à m. Cela implique (cf. [Schw, Ch. 6, Th. 19, p. 191]) que pour tout $v \in V_\delta^\infty$, $(\tau(z))_v$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathcal{O}'$ que nous noterons $F(z, v)$. On peut donc, pour z fixé, définir une fonction $F(z)$ sur $\mathcal{O}'$, à valeurs dans le dual algébrique V_δ^* de V_δ^∞, par:

$$\forall x \in \mathcal{O}', \forall v \in V_\delta^\infty, \qquad \langle F(z)(x), v\rangle = F(z, v)(x).$$

On va prouver que $F(z)$ est à valeurs dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$. D'après le Lemme A.1(ix), pour tout $x \in \mathcal{O}'$ il existe une suite finie $s \mapsto (\varphi_s, D_s)$, $s = 1, ..., t$, où $\varphi_s \in \mathscr{D}^m(\mathcal{O}')$ et D_s est un opérateur différentiel sur $\mathcal{O}'$, telle que:

$$\sum_{s=1}^{t} D_s \varphi_s = \delta_x, \tag{7}$$

où δ_x est la mesure de Dirac en $x \in \mathcal{O}'$. En particulier:

$$\begin{aligned} F(z, v)(x) &= \left\langle F(z, v), \sum_{s=1}^{t} D_s \varphi_s \right\rangle_{C^\infty(\mathcal{O}'), (C^\infty(\mathcal{O}'))'} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \langle {}^tD_s F(z, v), \varphi_s \rangle_{C^\infty(\mathcal{O}'), C^\infty(\mathcal{O}')'}, \end{aligned}$$

où ${}^tD_s$ est le transposé (relativement à la mesure de Haar de G) de D_s. C'est donc également un oprérateur différentiel. Si on utilise le fait que $\varphi_s \in \mathscr{D}^m(\mathcal{O}')$ alors que ${}^tD_s F(z, v) = {}^tD_s \tau(z)_{v\,|\,\mathcal{O}'}$, on a:

$$\begin{aligned} F(z, v)(x) &= \sum_{s=1}^{t} \langle {}^tD_s \tau(z)_v, \varphi_s \rangle_{\mathscr{D}'^m(\mathcal{O}'), \mathscr{D}^m(\mathcal{O}')} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \langle {}^tD_s \tau(z), \varphi_s \otimes v \rangle_{\mathscr{D}'^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty), \mathscr{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)}. \end{aligned}$$

La continuité de l'application $v \mapsto F(z, v)(x)$ résulte alors du fait que $v \mapsto \varphi_s \otimes v$ est continu de V_δ^∞ dans $\mathscr{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ et de la continuité de ${}^tD_s \tau(z)$ sur $\mathscr{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$, $s = 1, ..., t$ (cf. (2), (3), et (5)).

La fonction F est donc à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$. Comme $x \mapsto F(z, v)(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{O}'$ pour tout $v \in V_\delta^\infty$ et tout $z \in \Omega$, la fonction F est de classe C^∞ à valeurs dans le dual faible de l'espace V_δ^∞. Mais V_δ^∞ est un espace de Montel (cf. §2.1), il est donc réflexif. Alors F est encore C^∞ quand on la considère à valeurs dans son dual fort [Bou2, 3.3.1].

Comparons $F(z)$ et $\tau(z)$ sur $\mathcal{O}'$. On a:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}'), \forall v \in V_\delta^\infty, \qquad \langle \tau(z), \psi \otimes v \rangle = \langle \tau(z)_v, \psi \rangle$$
$$= \langle F(z, v), \psi \rangle.$$

Mais de la définition de $F(z)$ il résulte que $F(z, v) = F(z)_v$, d'où:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}'), \forall v \in V_\delta^\infty, \qquad \langle \tau(z), \psi \otimes v \rangle = \langle F(z), \psi \otimes v \rangle.$$

La densité de $\mathcal{D}(\mathcal{O}') \otimes V_\delta^\infty$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ implique alors l'égalité de $\tau(z)$ et $F(z)$ sur $\mathcal{O}'$. On a montré que $\tau(z)$ est de classe C^∞ au voisinage de tout point de $\mathcal{O}$ donc sur $\mathcal{O}$. L'assertion (i) est démontrée.

Prouvons (ii). On fixe un élément x de $\mathcal{O}$ et on construit $\mathcal{O}'$ contenant x comme ci-dessus. On choisit $s \mapsto (D_s, \varphi_s)$ comme en (7). Ecrivons (5) en remplaçant D par ${}^tD_s$:

$$({}^tD_s \tau(z))_{|\mathcal{O}'} = \sum_{i=1}^{p_s} f_{s,i}(z)\, \psi_{s,i}\, \gamma'_{s,i}\,(L'_{D_{s,i}})\,(\tau(z)_{|\mathcal{O}'}).$$

D'après (2), $\{(L'_{D_{s,i}})\,(\tau(z)_{|\mathcal{O}'}) \mid s = 1, ..., t,\ i = 1, ..., p_s,\ z \in \Omega\}$ est une famille équicontinue de formes linéaires sur $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$. Si on utilise le fait que les $f_{s,i}(\Omega)$ sont bornés et que l'image par la transposée d'un endomorphisme continue de $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ d'une partie équicontinue de $\mathcal{D}'^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$ est équicontinue, on voit que $\{{}^tD_s \tau(z) \mid z \in \Omega,\ s = 1, ..., t\}$ est une famille équicontinue de formes linéaires sur $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$.

Le sous-espace $\mathcal{D}(\mathcal{O}')$ étant dense dans $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}')$, il existe dans $\mathcal{D}(\mathcal{O}')$, une suite $(\varphi_{s,n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers φ_s dans $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}')$, $s = 1, ..., t$. Pour tout $v \in V_\delta^\infty$, la suite $(\varphi_{s,n} \otimes v)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $\varphi_s \otimes v$ dans $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$. L'ensemble $\{{}^tD_s \tau(z) \mid z \in \Omega, s = 1, ..., t\}$ étant équicontinu dans le dual de $\mathcal{D}^m(\mathcal{O}', V_\delta^\infty)$, la suite de fonctions sur Ω

$$z \mapsto \langle {}^tD_s \tau(z), \varphi_{s,n} \otimes v \rangle$$

converge uniformément sur Ω vers l'application

$$z \mapsto \langle {}^tD_s \tau(z), \varphi_s \otimes v \rangle.$$

Mais l'hypothèse d'holomorphie faite sur τ implique que pour tout $s = 1, ..., t$ et tout entier n la fonction

$$z \mapsto \langle {}^tD_s \tau(z), \varphi_{s,n} \otimes v \rangle = \langle \tau(z), D_s(\varphi_{s,n} \otimes v) \rangle$$

est holomorphe sur Ω. Il en résulte que, pour tout $v \in V_\delta^\infty$ et tout $s = 1, ..., t$

$$z \mapsto \langle {}^t D_s \tau(z), \varphi_s \otimes v \rangle$$

est holomorphe. Si on tient compte de la définition de F et des propriétés de D et φ (voir (7)) on a:

$$\sum_{s=1}^{t} \langle {}^t D_s \tau(z), \varphi_s \otimes v \rangle = \langle F(z)(x), v \rangle.$$

Alors, pour tout $v \in V_\delta^\infty$ la fonction $z \mapsto \langle F(z)(x), v \rangle$ est holomorphe sur Ω. Comme V_δ^∞ est un espace réflexif, car de Montel, cela prouve que la fonction $z \mapsto F(z)(x)$ est faiblement holomorphe de Ω dans $V_\delta^{-\infty}$, donc holomorphe, en utilisant [Bou2, §3.3.1] et le fait que $V_\delta^{-\infty}$ est quasi-complet. ▮

3.2. *Exemples de familles vérifiant la condition* (C)

LEMME 6. *Etant donné un ouvert Ω d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, on considère deux applications holomorphes ν_1 et ν_2 de Ω dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Soit τ une application holomorphe de type (P, δ, ν_1) de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ et f une application holomorphe de Ω dans $C^\infty(G)$ telle que:*

$$\forall z \in \Omega, \forall (g, m, a, n) \in G \times M \times A \times N,$$

$$(f(z))(gman) = a^{\nu_2(z)}(f(z))(g).$$

On suppose de plus que pour tout z dans Ω, $\tau(z)$ est invariant à gauche sous l'action de H.

Alors l'application τ' de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ définie par

$$\tau'(z) = f(z)\, \tau(z)$$

est holomorphe de type (P, δ, ν), où $\nu = \nu_1 + \nu_2$, et vérifie la condition (C) *de la Proposition* 3.

Démonstration. Le fait que τ' est holomorphe et de type (P, δ, ν) est immédiat. On introduit maintenant les applications $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\tau}'$ de Ω dans $(I_\delta)'$ par:

$$\forall z \in \Omega, \qquad \tilde{\tau}(z) = (\widetilde{\tau(z)}), \; \tilde{\tau}'(z) = (\widetilde{\tau'(z)})$$

dont on sait grâce au Lemme 5(b) qu'elles sont holomorphes.

Pour $D \in U(\mathfrak{g})$ l'application $z \mapsto (L'_D)\, \tau'(z)$ est encore de type (P, δ, ν) et

$$(\widetilde{(L'_D)\, \tau'(z)}) = \tilde{\pi}'_{\delta, \nu(z)}(D)\, \tilde{\tau}'(z) \tag{1}$$

d'après les propriétés d'entrelacement de l'application $\tau \mapsto \tilde{\tau}$.

D'après le Lemme 5(a), pour prouver que τ' vérifie la condition (C), il suffit de vérifier que:

> Pour tout compact ω de Ω, il existe pour chaque $D \in U(\mathfrak{h})$ une constante $c_{D,\omega} > 0$ telle que
>
> $$\{c_{D,\omega}^{-1}(\tilde{\pi}'_{\delta,\nu(z)}(D))\,\tilde{\tau}'(z) \mid D \in U(\mathfrak{h}), z \in \omega\}$$
>
> est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur I_δ.

Tout d'abord, et comme on l'a déjà remarqué, $\tau(\omega)$ est un ensembe équicontinu de formes linéaires sur $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$ d'après le Lemme 5(a); il en va de même pour $\tilde{\tau}(\omega)$ sur I_δ. Alors il existe une semi-norme continue p sur V_δ^∞ telle que:

$$\begin{gathered}\exists n \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in I_\delta, \forall z \in \omega,\\ |\langle \tilde{\tau}(z), \varphi \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{l} \operatorname{Sup}_{k \in K} p((L_{D_i}\varphi)(k)),\end{gathered} \tag{2}$$

où $D_1, ..., D_l$ est une base de l'espace des éléments de degré inférieur ou égal à n de $U(\mathfrak{k})$.

Par ailleurs, comme $\tau(z)$ est invariante à gauche sous l'action de H, on a:

$$\forall z \in \omega, \forall D \in U(\mathfrak{h}), \qquad (L'_D)\,(f(z)\,\tau(z)) = ((L'_D) f(z))\,\tau(z).$$

D'où, grâce à (1):

$$\forall z \in \omega, \forall D \in U(\mathfrak{h}), \qquad ((\tilde{\pi}_{\delta,\nu(z)})'\,(D))\,\tilde{\tau}'(z) = (L'_D f(z))_{|K}\,\tilde{\tau}(z). \tag{3}$$

On vérifie par ailleurs facilement que:

$$\begin{gathered}\forall i, j = 1, ..., l, \exists D'_{i,j} \in U(\mathfrak{k}), \forall (\varphi, \psi) \in C^\infty(G)^2,\\ (L_{D_i}(\varphi\psi)) = \sum_{j=1}^{l} (L_{D'_{i,j}}\psi)\, L_{D_j}(\varphi).\end{gathered} \tag{4}$$

Si on pose

$$c_{D,\omega} = l^{-2} \operatorname*{Sup}_{k \in K,\, z \in \Omega,\, (i,j) \in \{1, ..., l\}^2} (|(L_{D'_{i,j}} L_D f(z))(k)| + 1)$$

il résulte de (2) et (4) que

$$\begin{gathered}\forall D \in U(\mathfrak{h}), \forall \varphi \in I_\delta, \forall z \in \Omega,\\ c_{D,\omega}^{-1}\, |\langle (L_D f(z)_{|K})\,\tilde{\tau}(z), \varphi \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{l} \operatorname{Sup}_{k \in K} p((L_{D_i}\varphi)(k)).\end{gathered} \tag{5}$$

Ici on a utilisé l'égalité évidente:

$$\langle (L_D f(z)|_K)\,\tilde{\tau}(z), \varphi\rangle = \langle \tilde{\tau}(z), (L_D f(z)_{|K})\varphi\rangle.$$

L'uniforme continuité de la famille

$$\{c_{D,\omega}^{-1}(\tilde{\pi}'_{\delta,v(z)}(D))\,\tilde{\tau}'(z) \mid D \in U(\mathfrak{h}), z \in \omega\}$$

en résulte alors de (3) et (5). Ceci achève de prouver que $f\tau$ vérifie la condition (C). ∎

LEMME 7. *On reprend les notations de la Proposition 3. Soit P' un autre sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable admettant MA pour facteur de Lévi. On suppose que l'image réciproque Ω_s par v du lieu singulier de l'application $\lambda \mapsto \tilde{A}(P, P', \delta, \lambda)$ est d'intérieur vide dans Ω. On suppose qu'il existe une fonction f, holomorphe sur Ω et telle que:*

$$\forall \varphi \in I_\delta, \qquad z \mapsto f(z)\,\tilde{A}(P, P', \delta, v(z))$$

se prolonge en une application holomorphe de Ω dans I_δ (cette propriété est toujours vraie localement sur Ω d'après la Proposition 1 et son Corollaire). On définit l'application τ' de type (P', δ, v) de Ω dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ par:

$$\begin{aligned}\forall z \in \Omega, \qquad \tau'(z) &= f(z)\,\tau(z) \circ (A(P, P', \delta, v(z)))\\ &= f(z)\,{}^t A(P, P', \delta', v(z))(\tau(z)).\end{aligned}$$

Alors, si τ est holomorphe, τ' est holomorphe et, si τ vérifie la condition (C) *sur Ω, il en est de même de τ'.*

Démonstration. On introduit $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\tau}'$ comme au Lemme 5. Alors:

$$\tilde{\tau}'(z) = \tilde{\tau}(z) \circ (f(z)\,\tilde{A}(P, P', \delta, v(z)))$$

est holomorphe. L'holomorphie de τ' résulte du Lemme 5(b). On suppose maintenant que τ satisfait (C). Soit ω un compact de Ω. On introduit les constantes $c_{D,\omega}$ de la condition ($\mathscr{H}$) pour $\tau(\omega)$ ($D \in U(\mathfrak{h})$). On va vérifier que

$$\{c_{D,\omega}^{-1}(L'_D)\,\tau'(z) \mid D \in U(\mathfrak{h}), z \in \omega\},$$

est équicontinue. On ramène le problème à un problème sur $\tilde{\tau}'$ grâce au Lemme 5(a). If faut voir que

$$\{c_{D,\omega}^{-1}((\tilde{\pi}_{\delta,v(z)}^{P'})'(D))\,\tilde{\tau}'(z) \mid D \in U(\mathfrak{h}), z \in \omega\}$$

est équicontinue sur I_δ. L'espace de Fréchet I_δ étant tonnelé, il suffit pour cela de montrer que c'est une partie simplement bornée dans le dual de I_δ. Soit $\varphi \in I_\delta$. Si on utilise la propriété d'entrelacement des opérateurs $\tilde{A}(P, P', \delta, \nu(z))$, on a:

$$\begin{aligned}\langle c_{D,\omega}^{-1}((\tilde{\pi}^{P'}_{\delta,\nu(z)})'(D))\,\tilde{\tau}'(z), \varphi\rangle \\ = \langle c_{D,\omega}^{-1}((\tilde{\pi}^{P}_{\delta,\nu(z)})'(D))\,\tilde{\tau}(z), f(z)\,\tilde{A}(P, P', \delta, \nu(z))\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Mais $\{c_{D,\omega}^{-1}(\tilde{\pi}^{P}_{\delta,\nu(z)})'(D)\,\tilde{\tau}(z) \mid D \in U(\mathfrak{h}),\ z \in \omega\}$ est équicontinu sur I_δ d'après le Lemme 5(a), et l'holomorphie de $z \mapsto f(z)\,\tilde{A}(P, P', \delta, \nu(z))\varphi$ implique que l'image de ω par cette dernière application est bornée. On en déduit que $\langle c_{D,\omega}^{-1}(\tilde{\pi}^{P'}_{\delta,\nu(z)})'(D)\,\tilde{\tau}'(z), \varphi\rangle$ est borné. Le Lemme en résulte. ∎

3.3. *Injectivité de l'application d'évaluation sur $\mathscr{W}_M$ et restriction à $\mathcal{O}$ des éléments de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ pour ν générique: Enoncé du résultat*

Pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ le sous-espace des éléments de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ invariants sous l'action à gauche du groupe H. On se propose de construire une base de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dépendant de façon méromorphe du paramètre ν. La Proposition 3 appliquée à une fonction constante τ montre que la restriction à $\mathcal{O}$ des distributions induit une application linéaire de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $C^\infty(\mathcal{O}, P, \delta, \nu)^H$ où $C^\infty(\mathcal{O}, P, \delta, \nu)^H$ est l'espace des fonctions $\varphi : \mathcal{O} \to V_\delta^{\ \infty}$, de classe C^∞, et vérifiant la condition suivante:

$$\forall (h, x, m, a, n) \in H \times \mathcal{O} \times M \times A \times N, \quad \varphi(hxman) = \delta'(m^{-1})\, a^{\nu-\rho}\varphi(x). \quad (1)$$

Pour $x \in G$ et φ fonction définie sur un voisinage de x dans G, on notera $ev_x(\varphi) := \varphi(x)$. Si $\varphi \in C^\infty(\mathcal{O}, P, \delta, \nu)^H$ et $w \in \mathscr{W}_M$, on a $ev_w(\varphi) \in (V_\delta^{\ \infty})^{M \cap w^{-1}Hw} \simeq \mathscr{V}(\delta, w)$. On en déduit par composition une application de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $\mathscr{V}(\delta)$ notée ev et définie par:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H, \qquad ev(\tau) = (ev_w(\tau_{|\mathcal{O}}))_{w \in \mathscr{W}_M}.$$

Remarque 3. Grâce aux relations de covariance et à l'égalité $\mathcal{O} = H\mathscr{W}_M P$, il est clair que pour τ dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$, sa restriction à $\mathcal{O}$ est nulle si et seulement si $ev(\tau)$ est nulle.

Si on tient compte de la cocompacité du groupe P dans G et des conditions de covariance vérifiées par les éléments de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$, on voit que tout élément de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ est d'ordre fini sur G. On notera $\mathscr{D}'_k(G, P, \delta, \nu)$ le sous-espace formé des élements de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ d'ordre inférieur ou égal à k. On se propose d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Pour chaque (H, P) double classe Q non ouverte dans G, il existe un hyperplan $\mathscr{H}_Q$ de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ d'équation $\nu(X_Q) = 0$, pour un élément X_Q*

de $\mathfrak{a}$, *un élément* ν_Q *de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, *un entier naturel* n_Q *et une suite finie* $\lambda_1^Q, ..., \lambda_{n_Q}^Q$ *de complexes tels que si l'élément* ν *appartient au complémentaire* $\mathscr{A}(P)$ *dans* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *de* $\bigcup_Q \bigcup_{i=1}^{n_Q} (\mathscr{H}_Q + \lambda_i^Q \nu_Q + \mathbb{N}\nu_Q)$ *l'application de restriction ev envoie injectivement* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ *dans* $\mathscr{V}(\delta)$.

3.4. *Démonstration du Théorème* 1: *Une application de la Théorie de Bruhat*

On va appliquer les résultats de l'Appendice A au groupe $\Gamma = H \times P$ agissant sur la variété $X = G$ par $(h, p, x) \in H \times P \times G \mapsto (h, p) \cdot x = hxp^{-1} \in G$. Les orbites de cette action de $H \times P$ sont exactement les (H, P)-double classes et sont donc en nombre fini.

On fixe $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et on définit la représentation π du groupe $H \times P$ sur l'espace V_δ^∞ par la relation:

$$\forall (h, m, a, n) \in H \times M \times A \times N, \qquad \pi(hman) = a^{\nu - \rho}\,\delta(m). \tag{1}$$

On notera V_ν le $H \times P$-module ainsi obtenu.

Dans ce cas:

$$\mathscr{D}'(X, \pi) = \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H.$$

Notons $\mathscr{T}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{D}'(X, \pi)$ à support dans le complémentaire de la réunion des (H, P) double-classes ouvertes de G. Si on utilise la Remarque 3 et l'Appendice A, l'application *ev* est injective si et seulement si:

$$\mathscr{T} = \{0\}.$$

Cette égalité sera vérifiée dès que, pour toute (H, P)-double classe non ouverte Q et tout entier naturel n, on aura:

$$i(V_\nu, Q, n) = \{0\} \qquad \text{(voir A.2.4)}.$$

Dans tout ce qui suit, on fixe une (H, P)-double classe Q et un point x de Q. On rappelle que, par définition:

$$i(V_\nu, Q, n) = \dim \operatorname{Hom}_{\Gamma_x}(V_\nu, E_n^x)$$

où Γ_x agit sur $V_\nu = V_\delta^\infty$ par π et sur E_n^x par $\tilde{S}_n^x$ (voir Appendice A). Les opérateurs d'entrelacement concernés sont des opérateurs continus.

On va choisir un représentant particulier x dans la double classe Q. Ce choix va nous permettre d'exhiber certaines sous-algèbres de l'algèbre de Lie Lie Γ_x de Γ_x. Plus précisément, on choisira x dans $Q \cap K$ de telle sorte (voir [R, Th. 13] ou [M, Th. 1]) que:

$$\operatorname{Ad} x(\mathfrak{a}_m) \qquad \text{soit } \sigma\text{-stable},$$

ce qui équivaut à:

$$\sigma(x)^{-1} x \in N_K(\mathfrak{a}_m).$$

On notera:

$$w = \sigma(x)^{-1}x.$$

On définit l'automorphisme involutif σ^x de G par:

$$\forall y \in G, \qquad \sigma^x(y) = \sigma(wyw^{-1}).$$

Cette involution commute avec θ et le groupe $H^x = x^{-1}Hx$ est un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ^x. Notre choix de x implique que la différentielle de σ^x (notée encore σ^x) vérifie:

$$\sigma^x(\mathfrak{a}_m) = \mathfrak{a}_m.$$

A l'involution σ^x est associée une décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^x + \mathfrak{q}^x$$

où $\mathfrak{h}^x = \mathrm{Ad}\, x^{-1}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathfrak{q}^x = \mathrm{Ad}\, x^{-1}(\mathfrak{q})$) est le sous-espace propre de σ^x associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

On définit l'élément X_P de $\mathfrak{a}$ par:

$$X_P \in (\mathfrak{a}_\emptyset \cap \mathfrak{c})^\perp \cap \mathfrak{a}$$

et

$$\forall \alpha \in \Sigma \backslash \Theta, \qquad \alpha(X_P) = 1.$$

Le Lemme suivant regroupe les propriétés que nous utiliserons par la suite.

LEMME 8. (i) *La sous algèbre* $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{n}$, *resp.* $\mathfrak{l}$) *de* $\mathfrak{g}$ *est somme de l'ensemble des sous-espaces de poids sous* $\mathfrak{a}_\emptyset$, *ou* $\mathfrak{a}_m$, *positifs ou nuls* (*resp. strictement positifs, resp. nuls*) *sur* X_P. *En outre, on a*:

$$\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset) \cup \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_m), \qquad \alpha(X_P) \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Si Q est non ouverte on a*:

$$X_P + \sigma^x(X_P) \neq 0.$$

(iii) *Soit*

$$\mathfrak{n}^x := (\mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{n})) + (\mathfrak{n} \cap \sigma^x(\mathfrak{l})) + (\mathfrak{n} \cap \sigma^x(\mathfrak{n})),$$

et

$$\mathfrak{l}^x := \mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{l}).$$

Alors, $\mathfrak{n}^x$ *(resp.* $\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$*) est un idéal nilpotent de* $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ *(resp.* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$*) qui agit de manière nilpotente dans* $\mathfrak{g}$*. De plus,* $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{n}^x$ *et* $\mathfrak{l}^x$ *sont stables par* σ^x *et on a*:

$$\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}^x \oplus \mathfrak{n}^x,$$
$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x = (\mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x) \oplus (\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x).$$

(iv) L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}'^x := \mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ *est une sous-algèbre parabolique de* $\mathfrak{l}$ *dont* $\mathfrak{n}'^x := \mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{n})$ *est le radical unipotent et* $\mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}^x \oplus \mathfrak{n}'^x$ *est une décomposition de Lévi. En outre*:

$$\mathfrak{n}'^x = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}^x.$$

(v) *Le stabilisateur* Γ_x *de* $x \in G$ *dans* Γ *et son algèbre de Lie vérifient*:

$$\Gamma_x = \{(xpx^{-1}, p) \mid p \in P \cap H^x\},$$
$$\operatorname{Lie} \Gamma_x = \{(\operatorname{Ad} x(X), X) \mid X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x\}.$$

L'action canonique d'un élément de Γ_x *sur l'espace tangent* $T_x(G)$ *en* x *à* G *s'identifie à l'action adjointe de sa deuxième composante (quand on identifie* $T_x(G)$ *à* $\mathfrak{g}$ *par la différentielle de la multiplication à gauche par* x*). Moyennant l'identification précédente, l'espace tangent* $T_x(Q)$ *en* x *à* Q *est donné par*:

$$T_x(Q) = \mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x.$$

(vi) *Avec les notations de l'Appendice* A, *le caractère* ρ_{Γ_x} *de* Γ_x *vérifie*:

$$\forall p \in P \cap H^x, \qquad \rho_{\Gamma_x}(xpx^{-1}, p) = |\operatorname{Det}(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{h}^x} p)|,$$

où $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{h}^x}$ *est la représentation de* $P \cap H^x$ *dans le sous-espace* $\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x$ *de* $\mathfrak{g}$*. Si on note encore* ρ_{Γ_x} *la différentielle de* ρ_{Γ_x}*, on a*:

$$\forall X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x, \qquad \rho_{\Gamma_x}(\operatorname{Ad} x(X), X) = \operatorname{Tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}+\mathfrak{h}^x}(X). \tag{2}$$

De plus:

$$\forall X \in \mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x, \qquad \rho_{\Gamma_x}(\operatorname{Ad} x(X), X) = 0. \tag{3}$$

(vii) *La deuxième projection définit un isomorphisme de* Lie Γ_x *sur* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$*. Pour toute sous-algèbre* $\mathfrak{u}$ *de* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$*, on notera* $\tilde{\mathfrak{u}}$ *la sous-algèbre de*

Lie Γ_x *image réciproque de* $\mathfrak{u}$ *par cette projection. Les poids de* $(\widetilde{\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x})$ *(identifiée par la deuxième projection à* $\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x$*) agissant par* S_n^x *dans* E_n^x *sont de la forme:*

$$\lambda = -\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j)_{|\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x}$$

où pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\alpha_j \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m) \cap \sigma^x(\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m))$. *En particulier,* $\lambda(X_P)$ *et* $\lambda(\sigma^x(X_p))$ *sont des éléments de* $-\mathbb{N}^*$.

(viii) *On définit* $\mu \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)^*$ *par:*

$$\forall X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x, \qquad \mu(X) = \rho_{\Gamma_x}(\operatorname{Ad} x(X), X).$$

C'est un caractère de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$ *vérifiant:*

$$\mu(X_P + \sigma^x(X_P)) \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. (i) est évident.

(ii) Raisonnons par l'absurde et supposons $X_P + \sigma^x(X_P) = 0$. Cela signifie que:

$$X_P \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}^x$$

et donc que X_P est $\sigma^x\theta$-stable. Il en résulte immédiatement que P est $\sigma^x\theta$-stable ce qui implique (cf. [B3]) que $H^xP = x^{-1}HxP$ est ouvert dans G. Il en est alors de même pour la double classe $Q = HxP$, ce qui achève de prouver (ii).

Prouvons (iii). La somme $\mathfrak{p}'$ (resp. $\mathfrak{n}'$) des sous-espaces de poids de $\mathfrak{a}_m$ positifs ou nuls (resp. strictement positifs) sur $X_P + \sigma^x(X_P)$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{n}'$ est le radical unipotent. L'algèbre $\mathfrak{n}'$ est donc un idéal nilpotent de $\mathfrak{p}'$ qui agit de façon nilpotente dans $\mathfrak{g}$. Il en va de même de l'idéal $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ de l'algèbre $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$. Mais l'algèbre $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ est la somme des sous-espaces de poids de $\mathfrak{a}_m$ qui sont positifs ou nuls simultanément sur X_P et $\sigma^x(X_P)$. On a donc clairement $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{n}^x$, $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ et $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}^x \oplus \mathfrak{n}^x$.

Le couple $(\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x, \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)$ vérifie des propriétés analogues puisque $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{h}^x = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$. La stabilité de $\mathfrak{n}^x$ (resp. $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$, resp. $\mathfrak{l}^x$) sous l'action de σ^x résulte immédiatement des définitions.

Ces propriétés de stabilité jointes aux relations $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) = \mathfrak{l}^x \oplus \mathfrak{n}^x$ et $\mathfrak{p} \cap \sigma^x(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{h}^x = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$ déjà établis impliquent: $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x = \mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x \oplus \mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$, ce qui achève de prouver (iii).

Prouvons (iv). L'algèbre $\mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{p})$ (resp. $\mathfrak{n}'^x$, resp. $\mathfrak{l}^x$) est la somme des sous-espaces de poids de $\mathfrak{a}_m$ dans $\mathfrak{l}$ positifs ou nuls (resp. strictement positifs, resp. nuls) sur $\sigma^x(X_P)$, d'où (iv).

Prouvons (v). L'identification de Γ_x et de son algèbre de Lie est immédiate. Si $X \in \mathfrak{g}$ et $(xpx^{-1}, p) \in \Gamma_x$, on a:

$$(xpx^{-1}, p) \cdot x \exp X = xpx^{-1}x(\exp(X))\,p^{-1}$$
$$= x \exp(\operatorname{Ad} p(X)).$$

On obtient bien l'action désirée de Γ_x sur $T_x(G)$.

L'identité $T_x(Q) = \mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x$ est non moins évidente.

Prouvons (vi). La formule donnant ρ_{Γ_x} est l'application directe de sa définition (cf. Appendice A), et de l'expression de la fonction modulaire d'un groupe de Lie comme déterminant. On obtient alors (2) par différentiation et la nullité de (3) résulte de la nilpotence, établie en (iii), de l'opérateur ad X pour $X \in \mathfrak{n}^x$.

Prouvons (vii). Comme S_n^x est la n-ième puissance symétrique de S_1^x, il suffit de démontrer le résultat pour $n = 1$. Par definition, la représentation S_1^x est définie par l'action canonique de Γ_x sur le quotient $T_x(G)/T_x(Q)$. D'après la description de l'action de Γ_x donnée précédemment, nous devons donc déterminer les poids de l'action de $\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x$ sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x)$ obtenue par passage au quotient de la représentation adjointe. Or, $\theta(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{q}^x$ est un supplémentaire $\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x$-stable de $(\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x)$ dans $\mathfrak{g}$. Mais $\theta(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{q}^x \subseteq \theta(\mathfrak{n}) \cap \sigma^x(\theta(\mathfrak{n}))$, et les poids de $\mathfrak{a}_m$ dans $\theta(\mathfrak{n}) \cap \sigma^x(\theta(\mathfrak{n}))$ sont de la forme $\lambda = -\alpha$ avec $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m) \cap \sigma^x(\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m))$. Compte tenu de (i), cette relation achève de prouver (vii).

Prouvons (viii). Le fait que μ soit un caractère résulte de la propriété correspondante de ρ_{Γ_x}. D'après (2) on a:

$$\forall X \in \mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x, \qquad \mu(X) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_{|\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x}) = -\operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x}).$$

Il en résulte que μ est somme de certains poids de $\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{h}^x$ dans $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{q}^x$. Mais ceux-ci sont évidemment des restrictions de poids de $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m) \cap \sigma^x(\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}_m))$, ce qui, compte tenu de (i) entraîne:

$$\mu(X_P + \sigma^x(X_P)) \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Fin de la démonstration du Théorème 1. Supposons $i(V_\nu, Q, n) \neq 0$ pour un entier n et une double-classe non ouverte Q. On aura donc, avec les notations du Lemme 8(vii):

$$\operatorname{Hom}_{\widetilde{(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)}}(V_\nu, \tilde{E}_n^x) \neq \{0\}.$$

Mais, par définition, $\widetilde{(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)}$ agit sur V_ν via sa deuxième projection et celle-ci agit sur V_ν par δ_ν (cf. (2.3.2) pour la définition de δ_ν). De même (voir Lemme 8(v), (vii) et la définition de S_n^x), $\widetilde{(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)}$ agit sur $\tilde{E}_n^x$ via sa deuxième projection $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$, par le produit tensoriel du caractère μ

(cf. Lemme 8(viii)) avec la n-ième puissance symétrique de l'action adjointe de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$ sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{p} + \mathfrak{h}^x)$. On a donc, pour ces actions de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$ sur V_ν et $\tilde{E}_n^x$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x}(V_\nu, \tilde{E}_n^x) \neq \{0\}.$$

Il existe donc un sous-quotient simple F_n^x du $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x)$ module $\tilde{E}_n^x$ tel que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x}(V_\nu, F_n^x) \neq \{0\}.$$

Or, d'après le Lemme 8(iii), (v) et (vii), $\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x$ qui agit de manière nilpotente sur $\tilde{E}_n^x$. Il en résulte que $\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$ agit trivialement sur F_n^x.

Soit T un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x}(V_\nu, F_n^x)$. Pour tout $X \in \mathfrak{n}'^x = \mathfrak{l} \cap \sigma^x(\mathfrak{n})$, on a $\sigma^x(X) \in \mathfrak{n}$ et donc $\delta_\nu(\sigma^x(X)) = 0$. Il en résulte que, pour tout vecteur $v \in V_\nu$:

$$T(\delta_\nu(X)v) = T(\delta_\nu(X + \sigma^x(X))v).$$

L'algèbre $\mathfrak{n}^x$ étant σ^x-stable (Lemme 8(iii)), l'élément $X + \sigma^x(X)$ appartient à $\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$ dont l'action sur F_n^x est triviale. Compte tenu de la propriété d'entrelacement vérifiée par T on obtient:

$$\forall X \in \mathfrak{n}'^x, \forall v \in V_\nu, \qquad T(\delta_\nu(X)v) = 0.$$

Comme T est continu, il est non nul sur le sous-espace dense $(V_\nu)_{(K_M)}$ des vecteurs K_M-finis (où $K_M := K \cap M$) de V_ν et passe donc au quotient en un $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}^x$-morphisme non nul S de $U := (V_\nu)_{(K_M)}/(\mathfrak{n}'^x) \cdot ((V_\nu)_{(K_M)})$ dans F_n^x. Or $K_M^x := K_M \cap \sigma^x(L)$ est un sous-groupe compact maximal de la composante réductive $L \cap \sigma^x(L)$ du sous-groupe parabolique $L \cap \sigma^x(P)$ de L, et U est canoniquement muni d'une structure de $(\mathfrak{l}^x, K_M^x)$ module admissible de longueur finie [HS, Prop. 2.24]. En particulier, il existe une suite finie μ_i, $i = 1, ..., s$ d'éléments du dual complexe du centre $\mathfrak{c}^x$ de $\mathfrak{l}^x$ telle que U soit la somme de sous-espaces de poids généralisé μ_i sous $\mathfrak{c}^x$. Par construction de la structure de P-module de V_ν, on a sur l'algèbre $\mathfrak{a}$ qui est centrale dans $\mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x$:

$$(\mu_i)_{|\mathfrak{a}} = \nu - \rho, \qquad i = 1, ..., s.$$

Les restrictions μ_i' des μ_i à $(\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{c}^x) \cap \mathfrak{a}^\perp$, $i = 1, ..., s$, ne dépendent que de δ et x.

Comme $\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x$ agit trivialement sur F_n^x, et que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}^x = (\mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x) + (\mathfrak{n}^x \cap \mathfrak{h}^x)$ (cf. Lemme 8(iii)), le $\mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x$ module F_n^x est irréductible et l'élément $X_P + \sigma^x(X_P)$ qui est central dans $\mathfrak{l}^x \cap \mathfrak{h}^x$, agit par un scalaire n_0. D'après le Lemme 8(vii) on a:

$$n_0 \in n_1 - \mathbb{N}^*, \tag{4}$$

où $n_1 = \mu(X_P + \sigma^x(X_P)) \in \mathbb{Z}$ (cf. Lemme 8(viii)). Si on tient compte des propriétés d'entrelacement de S on a:

$$\exists i \in \{1, ..., s\}, \qquad \mu_i\,(X_P + \sigma^x(X_P)) = n_0. \tag{5}$$

Notons X_1 (resp. Y_1) la projection orthogonale de $X_P + \sigma^x(X_P)$ sur $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}_m \cap \mathfrak{c}^x \cap \mathfrak{a}^\perp$). Dire que $X_1 = 0$ équivaut à dire que la projection orthogonale de $\sigma^x(X_P)$ sur $\mathfrak{a}$ est égale à $-X_P \in \mathfrak{a}$. Etant donné les longueurs des vecteurs concernés, cela signifierait que $\sigma^x(X_P) = -X_P$, soit $X_P + \sigma^x(X_P) = 0$, ce qui contredit nos hypothèses sur Q (cf. Lemme 8(ii)). Comme:

$$\mu_i\,(X_P + \sigma^x(X_P)) = (\nu - \rho)(X_1) + \mu_i'(Y_1),$$

la relation (5) ci-dessus conduit à:

$$\nu(X_1) = -\rho(X_1) + \mu_i'(Y_1) - n_0,$$

et en tenant compte de (4):

$$\nu(X_1) \in -\rho(X_1) + \mu_i'(Y_1) - n_1 + \mathbb{N}. \tag{6}$$

Exprimons cette condition en introduisant une forme linéaire ν_Q sur $\mathfrak{a}$ vérifiant $\nu_Q(X_1) = -1$, et en notant $\lambda_i^Q = \rho(X_1) - \mu(Y_1) + n_1$ $(i = 1, ..., s)$. La relation (6) équivaut à:

$$\nu \in \bigcup_{i=1}^{n_Q} (\mathscr{H}_Q + \lambda_i^Q \nu_Q + \mathbb{N}\nu_Q), \tag{7}$$

où $\mathscr{H}_Q := \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \lambda(X_1) = 0\}$ et $n_Q = s$. Ceci achève le démonstration du Théorème. ∎

4. Equation fonctionnelle et prolongement méromorphe pour $j(P, \delta, \nu)$

Nous allons utiliser des idées de [VW, B4] pour établir des équations fonctionnelles pour $j(P, \delta, \nu)$, afin d'en déduire un prolongement méromorphe. Cela nécessite quelques variations par rapport à [B4] qui utilise le prolongement méromorphe dans l'établissement de l'équation fonctionnelle.

4.1. *Tensorisation par des représentations de dimension finie (H, K)-sphériques et caractères infinitésimaux: Premières propriétés*

Le centre $Z(\mathfrak{m})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{m}$ agit scalairement sur V_δ^∞, donc sur $V_\delta^{-\infty}$. On notera $\Lambda_\delta \in (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m})_{\mathbb{C}}^*$ (ou plus simplement Λ) une forme linéaire définissant le caractère infinitésimal de δ via l'isomorphisme de Harish Chandra.

Si V est un $\mathfrak{g}$-module sur lequel le centre $Z(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ agit de façon localement finie, et χ un caractère de $Z(\mathfrak{g})$, on définit:

$$V_\chi = \{v \in V \mid \forall Z \in Z(\mathfrak{g}), \exists k \in \mathbb{N}, (Z - \chi(Z))^k v = 0\}.$$

On a alors:

$$V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{(Z(\mathfrak{g}))}} V_\chi,$$

où $\widehat{(Z(\mathfrak{g}))}$ est l'ensemble des caractères de $Z(\mathfrak{g})$. De plus si

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$$

est une suite exacte de $\mathfrak{g}$ modules sur lesquels $Z(\mathfrak{g})$ agit de manière localement finie, pour tout $\chi \in \widehat{(Z(\mathfrak{g}))}$ la suite

$$0 \to (V_1)_\chi \to (V_2)_\chi \to (V_3)_\chi \to 0$$

est exacte. On note p_χ^V (ou p_χ) le projecteur de V sur V_χ parallèlement à la somme des espaces $V_{\chi'}$ ($\chi' \neq \chi$). Pour $\lambda \in \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$, on notera χ_λ le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ défini par λ via l'homomorphisme d'Harish Chandra, et p_λ le projecteur p_{χ_λ}. Notons que pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\chi_{\Lambda+\nu}$ (resp. $\chi_{-\Lambda-\nu}$) est le caractère infinitésimal de $\pi_{\delta,\nu}^P$ (resp. de la représentation contragrédiente de $\pi_{\delta,\nu}^P$) (cf. [Kn, Prop. 8.22]).

Remarque 4. Si V est un G module C^∞, pour tout caractère $\chi \in \widehat{(Z(\mathfrak{g}))}$, V_χ est un sous G-module. Si, en outre, il existe une suite finie $\chi_1, ..., \chi_p$ d'éléments de $\widehat{(Z(\mathfrak{g}))}$, et des entiers naturels $n_1, ..., n_p$ tels que, pour tout $Z \in Z(\mathfrak{g})$, $\prod_{i=1}^p (Z - \chi_i(Z))^{n_i}$ soit nul sur V, on vérifie facilement que $V = \bigoplus_{i=1}^p V_{\chi_i}$ et que les sous-espaces V_{χ_i} sont fermés dans V.

On dira qu'une application de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans un espace vectoriel est polynomiale si son image est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie, et si, comme application à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, elle est polynomiale au sens usuel.

On utilise les notations du §1.4 et on fixe $\mu = \sum_{i=1}^m m_i \tilde{\delta}_i \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. La représentation (π_μ, F_μ) (notée aussi (π, F)) est définie comme dans la Remarque 2 du §1.4, ainsi que les vecteurs e_H, e_K et e_μ.

Le produit scalaire défini dans la Remarque 2 du §1.4 permet d'identifier antilinéairement F à son dual F^*. L'image e_μ^* (resp. e_H^*, resp. e_K^*) de e_μ (resp. e_H, resp. e_K) par cette identification est un vecteur de F^* invariant sous M et $\bar{N}$, où $\bar{N} = \theta(N)$, et de poids $-\mu$ (resp. invariant par H, resp.

invariant par K) sous l'action de la représentation contragrédiente π^* de π. On a en outre:

$$\langle e_\mu^*, e_\mu \rangle = \langle e_H^*, e_\mu \rangle = \langle e_\mu^*, e_H \rangle = 1. \tag{1}$$

Soit:

$$\bar{\omega}(F^*) := \{\lambda \in \mathfrak{j}^* \mid \lambda \text{ est poids de } \mathfrak{j} \text{ dans } F^*\}, \tag{2}$$

$$\bar{\omega}'(F^*) := \bar{\omega}(F^*) \setminus \{-\mu\}, \tag{3}$$

et

$$S := \{(\lambda + \mu)_{|\mathfrak{a}} \mid \lambda \in \bar{\omega}'(F^*)\}. \tag{4}$$

Le Théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt implique:

$$F^* = \pi^*(U(\mathfrak{n}))\, e_\mu^*.$$

Il en résulte que pour tout $\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)$:

$$(\lambda + \mu)_{|\mathfrak{a}} = \sum_{i=1}^{t} n_i \alpha_i$$

où les n_i sont des entiers naturels non tous nuls et les α_i des éléments de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$. En particulier $\lambda + \mu \neq 0$. Ceci s'écrit encore:

$$S \subseteq (\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \setminus \{0\}) \cap \mathbb{N}\, \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}),$$

où $\mathbb{N}\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ désigne l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ d'éléments de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$.

Lemme 9. *Il existe un polynôme non nul q sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, produit de formes affines du type $\lambda + c$ où $\lambda \in S$ et $c \in \mathbb{C}$, et pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu) \neq 0$, un élément Z_ν de $Z(\mathfrak{g})$, vérifiant les conditions suivantes:*

(i) *On a:*

$$\forall \lambda \in \bar{\omega}'(F^*), \qquad \chi_{-\Lambda-\nu-\mu}(C) \neq \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(C),$$

où C est le Casimir de $\mathfrak{g}$. En particulier:

$$\forall \lambda \in \bar{\omega}'(F^*), \qquad \chi_{-\Lambda-\nu-\mu} \neq \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}.$$

(ii) *Pour tout $\mathfrak{g}$-module X admettant $\chi_{-\Lambda-\nu}$ comme caractère infinitésimal on a:*

$$\forall x \in X, \forall v \in F^*, \qquad p_{-\Lambda-\nu-\mu}(x \otimes v) = Z_\nu(x \otimes v).$$

(iii) *L'application* $\nu \mapsto q(\nu) Z_\nu$ *se prolonge en une application polynômiale de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *dans* $Z(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Notons $m(\lambda)$ la multiplicité du poids $\lambda \in \bar{\omega}(F^*)$; on a $m(-\mu) = 1$ car $F^* = \pi^*(U(\mathfrak{n}))\, e_\mu^*$. De plus, d'après [Ko, Th. 5.1]:

$$\forall Z \in Z(\mathfrak{g}), \forall y \in X \otimes F^*, \qquad \prod_{\lambda \in \bar{\omega}(F^*)} (Z - \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(Z))^{m(\lambda)} y = 0. \tag{5}$$

Ceci implique en particulier:

$$X \otimes F^* = \sum_{\lambda \in \bar{\omega}(F^*)} (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}}. \tag{6}$$

On définit:

$$\forall \lambda \in \bar{\omega}'(F^*), \qquad q_\lambda(\nu) = \chi_{-\Lambda-\nu-\mu}(C) - \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(C).$$

D'après l'expression standard de la valeur des caractères infinitésimaux sur le Casimir C (cf. par exemple [VW, §2.7]),

$$\chi_{\Lambda+\nu}(C) = (\Lambda, \Lambda) + (\nu, \nu) - cste,$$

la fonction $\nu \mapsto q_\lambda(\nu)$ est polynomiale de degré un associée à un élément de S. On définit alors:

$$q = \prod_{\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)} q_\lambda^{m(\lambda)} \tag{7}$$

et pour $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ vérifiant $q(\nu) \neq 0$:

$$Z_\nu = q(\nu)^{-1} \prod_{\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)} (C - \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(C))^{m(\lambda)}.$$

Clairement q vérifie (i).

On a, pour tout $\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)$:

$$\chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(Z_\nu) = 0,$$

et:

$$\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}(Z_\nu) = 1.$$

D'après (5) et la définition de Z_ν, on a, pour $y \in X \otimes F^*$:

$$(C - \chi_{-\Lambda-\nu-\mu}(C))\, Z_\nu\, y = 0. \tag{8}$$

D'autre part, d'après (5) et (i) on a:

$$X \otimes F^* = (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}} \oplus \sum_{\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)} (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}}. \tag{9}$$

L'égalité (8) jointe à (i) montre que:

$$Z_\nu y \in (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}}. \tag{10}$$

Par ailleurs, comme $Z_\nu \in Z(\mathfrak{g})$, on a, pour tout $\chi \in \widehat{(Z(\mathfrak{g}))}$:

$$Z_\nu (X \otimes F^*)_\chi \subseteq (X \otimes F^*)_\chi,$$

donc grâce à (9) et (10):

$$Z_\nu (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}} = 0$$

pour $\lambda \in \bar{\omega}'(F^*)$.

On suppose maintenant que $y \in (X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}}$. D'après (i), l'élément $C - \chi_{-\Lambda-\nu+\lambda}(C)$ définit un opérateur linéaire injectif sur $(X \otimes F^*)_{\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}}$. La relation (6) implique alors que: $(C - \chi_{-\Lambda-\nu-\mu}(C))\, y = 0$. Il en résulte facilement que $Z_\nu y = y$, ce qui achève de prouver (ii).

Le point (iii) est évident. ∎

LEMME 10. *On conserve les notations du Lemme précédent. Pour tout élément* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *tel que* $q(\nu) \neq 0$, *il existe un élément* Ad H*-invariant*, $\tilde{Z}_\nu$, *de* $U(\mathfrak{g})$ *vérifiant la condition suivante*:

Pour tout $\mathfrak{g}$*-module* X *admettant un caractère infinitésimal* $\chi_{-\Lambda-\nu}$ *et tout élément* x *de* X *on a*:

$$(I \otimes e_H)(p_{-\Lambda-\nu-\mu}(x \otimes e_H^*)) = \tilde{Z}_\nu x$$

(*où* $I \otimes e_H$ *est l'application de* $X \otimes F^*$ *dans* X *définie par contraction avec* e_H, *i.e.*, $\forall x \in X$, $\forall v \in F^*$, $(I \otimes e_H)(x \otimes v) = \langle e_H, v \rangle x$). *En outre, l'application* $\nu \mapsto q(\nu)\tilde{Z}_\nu$ *se prolonge en une application polynômiale de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *dans* $U(\mathfrak{g})^H$.

Démonstration. Soit $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ le coproduit de $U(\mathfrak{g})$ (cf. [Di, §2.7.1]). Pour $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ vérifiant $q(\nu) \neq 0$, on écrit:

$$\Delta(Z_\nu) = \sum_{i=1}^{t} X_i(\nu) \otimes Y_i(\nu)$$

avec $X_i(\nu)$, $Y_i(\nu) \in U(\mathfrak{g})$. D'après le Lemme précédent:

$$\forall x \in X, \qquad p_{-\Lambda-\nu-\mu}(x \otimes e_H^*) = Z_\nu (x \otimes e_H^*)$$

et grâce aux propriétés de l'application Δ:

$$\forall x \in X, \qquad p_{-\Lambda-\nu-\mu}(x \otimes e_H^*) = \sum_{i=1}^{t} (X_i(\nu)x) \otimes (\pi^*(Y_i(\nu))e_H^*).$$

La définition de l'application $I \otimes e_H$ permet de conclure:

$$(I \otimes e_H)(p_{\Lambda \ \nu \ \mu}(x \otimes e_H^*)) = \tilde{Z}_\nu x$$

où

$$\tilde{Z}_\nu := \sum_{i=1}^{l} \langle e_H, \pi^*(Y_i(\nu)) e_H^* \rangle X_i(\nu). \tag{11}$$

On peut, en utilisant sur $U(\mathfrak{g}) \otimes F^*$ la structure de $\mathfrak{g}$-module produit tensoriel de la représentation régulière gauche ξ de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ par π^*, écrire cette relation sous la forme:

$$\tilde{Z}_\nu = (Id_{U(\mathfrak{g})} \otimes e_H)((\xi \otimes \pi^*)(Z_\nu)(1 \otimes e_H^*)), \tag{12}$$

le symbole 1 représentant l'unité de $U(\mathfrak{g})$.

Etudions, pour $h \in H$, l'action de Ad h sur $\tilde{Z}_\nu$. De (11) on déduit:

$$(\mathrm{Ad}\, h)(\tilde{Z}_\nu) = \sum_{i=1}^{l} \langle e_H, \pi^*(Y_i(\nu)) e_H^* \rangle \,\mathrm{Ad}\, h(X_i(\nu)).$$

D'autre part, si on tient compte de l'invariance de e_H (resp. e_H^*) sous $\pi(H)$ (resp. sous $\pi^*(H)$), on a:

$$\langle e_H, \pi^*(Y_i(\nu)) e_H^* \rangle = \langle e_H, \pi^*(\mathrm{Ad}\, h(Y_i(\nu))) e_H^* \rangle,$$

donc:

$$(\mathrm{Ad}\, h)(\tilde{Z}_\nu) = \sum_{i=1}^{l} \langle e_H, \pi^*(\mathrm{Ad}\, h(Y_i(\nu))) e_H^* \rangle \,\mathrm{Ad}\, h(X_i(\nu)). \tag{13}$$

Mais Δ est un morphisme de G-modules lorsqu'on munit $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$) de l'action adjointe de G sur $U(\mathfrak{g})$ (resp. du produit tensoriel par elle même de l'action adjointe de G sur $U(\mathfrak{g})$). Cela implique:

$$\Delta(\mathrm{Ad}\, h(Z_\nu)) = \sum_{i=1}^{l} (\mathrm{Ad}\, h(X_i(\nu))) \otimes (\mathrm{Ad}\, h(Y_i(\nu)))$$

et on peut réécrire la relation (13) sous la forme:

$$\mathrm{Ad}\, h(\tilde{Z}_\nu) = (Id_{U(\mathfrak{g})} \otimes e_H)((\xi \otimes \pi^*)(\mathrm{Ad}\, h(Z_\nu)))(1 \otimes e_H).$$

Mais, Z_ν étant central dans $U(\mathfrak{g})$, Ad $h(Z_\nu) = Z_\nu$. Si on tient compte de (12), on peut conclure:

$$\forall h \in H, \qquad \mathrm{Ad}\, h(\tilde{Z}_\nu) = \tilde{Z}_\nu.$$

Par ailleurs la relation (12) implique immédiatement que l'application $\nu \mapsto q(\nu)\tilde{Z}_\nu$ se prolonge en une application polynomiale de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans $U(\mathfrak{g})^H$. ∎

4.2. *Tensorisation des séries principales généralisées par des représentations de dimension finie et caractères infinitésimaux*

Soit (γ, V_γ) une représentation de classe C^∞ de P dans un espace de Fréchet. On note:

$$\operatorname{Ind} V_\gamma = \{\varphi \in C^\infty(G, V_\gamma) \mid \forall (g, m, a, n) \in G \times M \times A \times N$$
$$\varphi(gman) = a^{-\rho}\gamma(man)^{-1}\varphi(g)\}. \tag{1}$$

On munit $\operatorname{Ind} V_\gamma$ de la topologie définie par la famille de semi-normes:

$$\|\varphi\|_{D,q} = \operatorname*{Sup}_{k \in K} q(L_D \varphi(k)),$$

où D décrit $U(\mathfrak{g})$ et q parcourt l'ensemble des semi-normes définissant la topologie de V_γ. On note $\operatorname{Ind} \gamma$ la restriction à $\operatorname{Ind} V_\gamma$ de la représentation régulière gauche de G dans $C^\infty(G, V_\gamma)$. On vérifie immédiatement que $(\operatorname{Ind} \gamma, V_\gamma)$ est une représentation de classe C^∞ de G dans un espace de Fréchet. De plus, si

$$0 \to V_{\gamma_1} \to V_{\gamma_2} \to V_{\gamma_3} \to 0$$

désigne une suite exacte de P-modules lisses de Fréchet, qui est topologiquement scindée comme suite de $M \cap K$-modules (i.e., V_{γ_1} admet un supplémentaire topologique $M \cap K$-invariant dans V_{γ_2}), la suite de G-modules

$$0 \to \operatorname{Ind} V_{\gamma_1} \to \operatorname{Ind} V_{\gamma_2} \to \operatorname{Ind} V_{\gamma_3} \to 0$$

qui lui est canoniquement associée est une suite exacte de G-modules lisses de Fréchet qui est topologiquement scindée comme suite de K-modules. Pour s'en convaincre, il suffit de restreindre les éléments de $\operatorname{Ind} V_{\gamma_i}$ à K et de remarquer que cette opération est injective.

On conserve les notations du §4.1.

LEMME 11. *Pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu) \neq 0$ on a des isomorphismes de G-modules*:

(i) $p_{\Lambda+\nu+\mu}(I_{\delta,\nu}^P \otimes F) \simeq I_{\delta,\nu+\mu}^P$.

(ii) $p_{-\Lambda-\nu-\mu}((I_{\delta,\nu}^P)' \otimes F^*) \simeq (I_{\delta,\nu+\mu}^P)'$.

Démonstration. La représentation γ_ν de P dans l'espace de Fréchet $V_{\gamma_\nu} := V_\delta^\infty \otimes F$ définie par:

$$\forall (m, a, n) \in M \times A \times N, \qquad \gamma_\nu(man) = a^\nu \delta(m) \otimes \pi(man)$$

est de classe C^∞. Soit $\Phi_\nu : I^P_{\delta,\nu} \otimes F \to \mathrm{Ind}\, V_{\gamma_\nu}$ l'application définie par:

$$\forall \varphi \in I^P_{\delta,\nu}, \forall v \in F, \forall g \in G, \qquad \Phi_\nu(\varphi \otimes v)(g) = \varphi(g) \otimes \pi(g)^{-1} v. \tag{2}$$

On voit immédiatement que Φ_ν est un isomorphisme topologique qui entrelace les représentations $\pi^P_{\delta,\nu} \otimes \pi$ et $\mathrm{Ind}\, \gamma_\nu$. Mais le P-module F admet une suite de Jordan–Hölder

$$F_0 = \{0\} \subseteq F_1 = \mathbb{C} e_\mu \subseteq \cdots \subseteq F_r = F,$$

chacun des F_i admettant un supplémentaire $M \cap K$-invariant dans F_{i+1}. Par tensorisation avec V_δ^∞, on en déduit une filtration du P-module $(\gamma_\nu, V_{\gamma_\nu})$ par ses sous P-modules (γ_i, V_i) où $V_i = V_\delta^\infty \otimes F_i$. De plus, V_i possède un supplémentaire topologique $M \cap K$-invariant dans V_{i+1}. D'après les propriétés de Ind rappelées plus haut, on en déduit une filtration de $\mathrm{Ind}\, V_{\gamma_\nu}$ par des sous G-modules fermés $U_i := \mathrm{Ind}\, V_i$ avec$U_{i+1}/U_i \simeq \mathrm{Ind}(V_{i+1}/V_i)$, soit encore $U_{i+1}/U_i \simeq \mathrm{Ind}(V_\delta^\infty \otimes (F_{i+1}/F_i))$.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ agit de manière semi-simple sur F_{i+1}/F_i (qui est non seulement irréductible sous P mais aussi sous MA car N agit trivialement). Cette action de $\mathfrak{j}$ fait apparaître des poids λ de $\mathfrak{j}$ dand F, i.e., $\lambda \in \bar{\omega}(F)$ et, si $i \geqslant 1$, on a, de plus, $\lambda \neq \mu$, i.e., $\lambda \in \bar{\omega}'(F) := \bar{\omega}(F) \backslash \{\mu\}$. D'après [Ko, Th. 5.4], $V_\delta^\infty \otimes (F_{i+1}/F_i)$ s'écrit comme somme directe de MA-modules admettant sous $Z(\mathfrak{l})$ des caractères infinitésimaux généralisés de la forme $\chi_{\Lambda+\nu+\lambda}$ où $\lambda \in \bar{\omega}(F)$. Après induction, chaque module U_{i+1}/U_i s'écrit comme somme directe de sous G-modules de caractère infinitésimal généralisé $\chi_{\Lambda+\nu+\lambda}$ ($\lambda \in \bar{\omega}(F)$). Si, de plus, $q(\nu)$ est non nul, on a, d'après le Lemme 9(i), $\chi_{\Lambda+\nu+\lambda} \neq \chi_{\Lambda+\nu+\mu}$ pour $\lambda \in \bar{\omega}'(F)$. Cela signifie que pour $i \geqslant 1$, $p_{\Lambda+\nu+\mu}(U_{i+1}/U_i) = \{0\}$. Compte tenu de l'exactitude du foncteur $V \to p_{\Lambda+\nu+\mu}(V)$, on obtient:

$$p_{\Lambda+\nu+\mu}(\mathrm{Ind}\, V_{\gamma_\nu}) = p_{\Lambda+\nu+\mu}(U_1). \tag{3}$$

Mais comme MN agit trivialement sur $F_1 = \mathbb{C} e_\mu$, alors que A agit par le caractère $a \mapsto a^\mu$, on a l'isomorphisme $U_1 \simeq I^P_{\delta,\nu+\mu}$ et donc:

$$p_{\Lambda+\nu+\mu}(U_1) \simeq I^P_{\delta,\nu+\mu}. \tag{4}$$

Il suffit alors d'utiliser (3), (4) et l'isomorphisme Φ_ν entre les G-modules $I^P_{\delta,\nu} \otimes F$ et $\mathrm{Ind}\, V_{\gamma_\nu}$ pour achever la démonstration de (i).

(ii) découle de (i) par passage au dual car:

$$(I^P_{\delta,\nu})' \otimes F^* \simeq (I^P_{\delta,\nu} \otimes F)'. \quad \blacksquare$$

LEMME 12. *On note $\bar{P} = \theta(P)$ et on fixe $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $q(\nu) \neq 0$.*

(i) *On a des isomorphismes de G-modules*:

$$p_{\Lambda+\nu+\mu}(I^{\bar{P}}_{\delta,\nu}\otimes F)\simeq I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu},$$
$$p_{-\Lambda-\nu-\mu}((I^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\otimes F^*)\simeq (I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})'.$$

(ii) *On considère l'application*:

$$\Psi_\nu : (I^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\otimes F^* \to \mathscr{D}'(G, V^\infty_\delta)\otimes F^*$$

définie par:

$$\forall \tau\in (I^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\ (=\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,\nu)),\ \forall v\in F^*,\qquad \Psi_\nu(\tau\otimes v)=f_v\cdot\tau,$$

où $f_v\in C^\infty(G,F^*)$ *est définie par*:

$$\forall g\in G,\qquad f_v(g)=\pi^*(g^{-1})v$$

et l'application bilinéaire de multiplication $(f,\tau)\mapsto f\cdot\tau$ *de* $C^\infty(G,F^*)\times\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta)$ dans $\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta\otimes F^*)$ *est caractérisée par*;

$$\forall f_1\in C^\infty(G),\ \forall v_1\in F^*,\ \forall\tau\in\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta),\qquad (f_1\otimes v_1)\cdot\tau=(f_1\tau)\otimes v_1.$$

(*D'une façon plus imagée, mais plus approximative*,

$$\text{“}\forall g\in G,\qquad \Psi_\nu(\tau\otimes v)(g)=\tau(g)\otimes\pi^*(g^{-1})v\text{”}$$

relation à comparer à la definition (4.2.2) *de* Φ_ν).

Alors, Ψ_ν *a pour image le sous-espace*:

$$\{\tau\in\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta)\otimes F^* \mid \forall(m,a,n)\in M\times A\times\theta(N)$$
$$R'_{man}\tau=(a^{\nu-\rho_{\bar{P}}}\delta'(m^{-1})\otimes\pi^*(man)^{-1})\tau\}$$

qui est fermé dans $\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta)\otimes F^*$ *et que nous noterons* $\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,F,\nu)$. *De plus*, Ψ_ν *définit un isomorphisme topologique qui entrelace* $(\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\otimes\pi^*$ *avec la restriction à* $\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,F,\nu)$ *de la contragrédiente de la représentation régulière gauche de G dans* $\mathscr{D}(G,V^\infty_\delta\otimes F)\simeq\mathscr{D}(G,V^\infty_\delta)\otimes F$ *que l'on notera* $(\pi^{\bar{P}}_{\delta,F,\nu})'$.

(iii) *L'application* $i:(I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})'\to\mathscr{D}'(G,V^\infty_\delta)\otimes\mathbb{C}e^*_\mu$ *définie par* $i(\tau)=\tau\otimes e^*_\mu$, $(\tau\in(I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})')$, *est injective, d'image fermée dans* $\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,F,\nu)$ *et entrelace* $(\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})'$ *et* $(\pi^{\bar{P}}_{\delta,F,\nu})'$. *Son image est égale à* $p_{-\Lambda-\nu-\mu}((I^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\otimes F^*)$.

(iv) *Pour tout élément* τ *de* $\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,\nu)$ *il existe un unique élément* $U_\nu(\tau)$ *de* $\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,\nu)$ *vérifiant la condition*:

$$\forall\tau\in\mathscr{D}'(G,\bar{P},\delta,\nu),$$
$$\Psi_\nu((((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'\otimes\pi^*)(Z_\nu))(\tau\otimes e^*_H))=U_\nu(\tau)\otimes e^*_\mu. \tag{5}$$

L'application U_ν *de* $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)$ *dans lui même ainsi définie est linéaire, continue et commute à l'action de* H.

(v) *Si l'élément* τ *de* $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)$ *admet une restriction de classe* C^∞ *à la double-classe ouverte* HwP, $(w \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset))$, *pour tout* $v \in F^*$, $\Psi_\nu(\tau \otimes v)$, *identifié à un élément de* $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty \otimes F)$, *admet une restriction de classe* C^∞ *à* HwP. *Si on note* $ev_w(\Psi_\nu(\tau \otimes v))$ *l'évaluation de cette restriction en* w, *on a*:

$$ev_w(\Psi_\nu(\tau \otimes v)) = ev_w(\tau) \otimes \pi^*(w^{-1})v.$$

(vi) *Pour* τ *élément de* $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$ *et* w *élément de* $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, $((\pi_{\delta,\nu}^{\bar{P}})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)(\tau \otimes e_H^*)$ *et* $U_\nu(\tau)$ *ont une restriction* C^∞ *à* HwP *et*:

$$ev_w((((\pi_{\delta,\nu}^{\bar{P}})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e_H^*)) = ev_w(U_\nu(\tau)) \otimes \pi^*(w)\, e_\mu^*. \tag{6}$$

(vii) *L'endomorphisme* E *de* $\mathscr{V}(\delta)$ $(\simeq \prod_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{V}(\delta, w))$ *défini par*:

$$(\eta_w)_{w \in \mathscr{W}_M} \mapsto (\langle \pi^*(w)\, e_\mu^*, e_H \rangle \eta_w)_{w \in \mathscr{W}_M}$$

(*voir* (2.4.1) *et* (2.4.2) *pour la définition de* $\mathscr{V}(\delta)$), *est bijectif. Si* $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *vérifie* $q(\nu) \neq 0$, *on a*:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H, \qquad ev(((\pi_{\delta,\nu}^{\bar{P}})'(\tilde{Z}_\nu))(\tau)) = E(ev(U_\nu(\tau))). \tag{7}$$

Démonstration. La démonstration de (i) est similaire à celle des point (i) et (ii) du Lemme 11. La seule différence est qu'on utilise une suite de Jordan–Hölder du $\bar{P}$ module F:

$$0 = F_0' \subseteq F_1' \subseteq \cdots \subseteq F_{r-1}' \subseteq F_r' = F$$

avec $F_{r-1}' = \theta(\bar{\mathfrak{n}})F$ de telle sorte que $F_r'/F_{r-1}' \simeq \mathbb{C}e_\mu$ est un $\bar{P}$-module sur lequel $M\theta(N)$ agit trivialement alors que A agit par $a \mapsto a^\mu$.

La démonstration de (ii) est fastidieuse mais immédiate. Indiquons seulement que l'inverse de Ψ_ν est donné par la restriction à $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, F, \nu)$ de l'opérateur de $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty) \otimes F^*$ dans lui-même défini de façon imagée par $\tau \otimes v \mapsto \tau_1$, avec:

$$\text{“}\forall g \in G, \qquad \tau_1(g) = \tau(g) \otimes \pi^*(g)v\text{”}.$$

Passons à (iii). Le seul point non évident est l'égalité de l'image de l'application i avec $p_{-\Lambda-\nu-\mu}(\Psi_\nu((I_{\delta,\nu}^{\bar{P}})' \otimes F^*))$. Mais i étant un G-morphisme et $(I_{\delta,\nu+\mu}^{\bar{P}})'$ admettant $\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}$ comme caractère infinitésimal, on a l'inclusion:

$$i(I_{\delta,\nu+\mu}^{\bar{P}})' \subseteq p_{-\Lambda-\nu-\mu}((I_{\delta,\nu}^{\bar{P}})' \otimes F^*).$$

L'application Ψ_ν étant un isomorphisme de G-modules, l'assertion (i) identifie le membre de droite de cette inclusion à $(I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})'$. Comme i est injective et que les composantes isotypiques du K-module $(I^{\bar{P}}_{\delta,\nu+\mu})'$ sont de dimension finie, on voit que les deux membres de l'inclusion ci-dessus ont même sous-espace de vecteurs K-finis. Mais ce sont en outre des sous G-modules fermés de $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, F, \nu)$ d'après les propriétés de i et $p_{\Lambda-\nu-\mu}$. D'où l'égalité recherchée, ce qui prouve (iii).

Passons à (iv). Le fait que $\Psi_\nu(((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e^*_H)$ soit contenu dans $p_{-\Lambda-\nu-\mu}((I^{\bar{P}}_{\delta,\nu}) \otimes F^*)$ résulte des propriétés de Z_ν. L'existence de $U_\nu(\tau)$ résulte alors de (iii) et son unicité (qui implique la linéairité de U_ν) est évidente. Comme le terme figurant à gauche de l'égalité (5) est continu par rapport à τ, il en est de même de celui de droite, donc de U_ν par simple contraction avec e_μ. La propriété d'entrelacement sous H de U_ν est immédiate si on tient compte des propriétés d'entrelacement de Ψ_ν et de l'invariance de e^*_H sous l'action de H. Ceci prouve (iv).

Le point (v) résulte immédiatement de la définition de Ψ_ν.

Passons à (vi). Comme dans la démonstration du Lemme 10, écrivons:

$$\Delta(Z_\nu) = \sum_{i=1}^{t} X_i(\nu) \otimes Y_i(\nu).$$

On a alors:

$$\begin{aligned}&(((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e^*_H)\\ &\quad = \sum_{i=1}^{t} ((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'(X_i(\nu))\tau) \otimes (\pi^*(Y_i(\nu))\, e^*_H)\end{aligned}$$

et il en résulte que le premier membre de cette égalité a une restriction à HwP de classe C^∞ si c'est le cas pour τ. Si, de plus, $\tau \in \mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$, le vecteur distribution $U_\nu(\tau)$ est également H-invariant. Dans ce cas, τ et $U_\nu(\tau)$ admettent une restriction de classe C^∞ à HwP d'après la Proposition 3, et c'est également le cas pour $((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu} \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e^*_H)$ d'après ce qui précède. En appliquant ev_w à l'égalité (5) et en utilisant (v), on obtient immédiatement (6), ce qui prouve (vi).

De même, si on contracte l'égalité (6) par e_H et si on tient compte des propriétés de Z_ν énoncées dans le Lemme 10, on obtient immédiatement (7). Pour finir de démontrer (vii), il suffit de prouver la bijectivité de E. L'espace $\mathscr{V}(\delta)$ étant de dimension finie, la bijectivité de E équivaut à son injectivité. Or cette dernière exprime que $\langle \pi^*(w)\, e^*_\mu, e_H \rangle$ est non nul quel que soit $w \in \mathscr{W}_M$. Dans le cas contraire, la fonction analytique $g \mapsto \langle \pi^*(g)\, e^*_\mu, e_H \rangle$ s'annulerait sur un ouvert HwP qui rencontre toutes les composantes connexes de G, donc serait identiquement nulle sur G. Ceci contredirait la relation $\langle e^*_\mu, e_H \rangle = 1$. Ceci achève de prouver le Lemme. ∎

4.3. *Enoncé de l'equation fonctionnelle pour j*

On définit une application $\varepsilon_\mu : F^* \to C^\infty(G)$ par:

$$\forall v \in F^*, \forall g \in G, \qquad (\varepsilon_\mu(v))(g) = \langle \pi(g)\, e_\mu, v \rangle. \tag{1}$$

On a alors:

$$\begin{gathered} \forall v \in F^*, \forall (g, m, a, n) \in G \times M \times A \times N, \\ (\varepsilon_\mu(v))(gman) = a^\mu(\varepsilon_\mu(v))(g). \end{gathered} \tag{2}$$

De l'égalité $G = KP$ et de la relation précédente, il résulte que $\varepsilon_\mu(e_K^*)$ ne s'annule pas sur G. On définit alors l'application $\mathscr{M}_\mu : \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty) \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty) \otimes F^*$ par:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty), \qquad \mathscr{M}_\mu(\tau) = ((\varepsilon_\mu(e_K^*))^{-1}\tau) \otimes e_K^*. \tag{3}$$

On notera $(I \otimes e_H)$ la contraction par e_H c'est-à-dire l'application de $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty) \otimes F^*$ dans $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ telle que:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty), \forall v \in F^*, \qquad (I \otimes e_H)(\tau \otimes v) := \langle e_H, v \rangle \tau. \tag{4}$$

On définit alors, pour $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ tel que $q(\nu) \neq 0$, l'endomorphisme $D_\mu(\nu) = D_\mu(P, \delta, \nu)$ de $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$ par:

$$D_\mu(\nu) := (I \otimes e_H) \circ ((L' \otimes \pi^*)(Z_\nu)) \circ \mathscr{M}_\mu, \tag{5}$$

où L' est la représentation contragrédiente de la représentation régulière gauche de G dans $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$. Il est facile, en utilisant l'expression de $\Delta(Z_\nu)$, de vérifier que $D_\mu(\nu)$ est un opérateur différentiel et que l'application $\tilde{D}_\mu(\nu)$: $\nu \mapsto q(\nu)\, D_\mu(\nu)$ se prolonge en une application polynomiale sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à valeurs dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathscr{D}(G, V_\delta^\infty)$.

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction polynomiale b_μ (resp. R_μ) sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp.* $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta))$), *non identiquement nulle et telle que*:

(i) *Pour $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ tel que* $\mathrm{Re}\, \nu - \rho_P$ *soit strictement dominant pour $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$, on a*:

$$\forall \eta \in \mathscr{V}(\delta), \qquad b_\mu(\nu)\, j(P, \delta, \nu, \eta) = \tilde{D}_\mu(\nu)\, j(P, \delta, \nu + \mu, R_\mu(\nu)(\eta)).$$

(ii) *L'opérateur $R_\mu(\nu)$ laisse stable $\mathscr{V}(\delta, w)$, pour $w \in \mathscr{W}_M$.*

4.4. *Préparation de la démonstration du Théorème 2: l'opérateur $S(\nu)$ et un inverse à droite $T(\nu)$*

LEMME 13. (i) *L'application $S(\nu): \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) \otimes F^* \to \mathscr{D}'(G, V_\delta^{\infty})$ définie par:*

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu), \forall v \in F^*, \qquad S(\nu)(\tau \otimes v) = \varepsilon_\mu(v)\tau, \tag{1}$$

est un G-morphisme continu à valeurs dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$.

(ii) *Si on utilise l'isomorphisme canonique de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ (resp. $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$) sur $\mathscr{D}'(K, \delta)$, l'opérateur obtenu à partir de $S(\nu)$ par transport de structure $\tilde{S}(\nu): \mathscr{D}'(K, \delta) \otimes F^* \to \mathscr{D}'(K, \delta)$ ne dépend pas de ν et*

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(K, \delta), \qquad \tilde{S}(\nu)(\tau \otimes e_K^*) = \tau. \tag{2}$$

En particulier $\tilde{S}(\nu)$ est surjective et l'image de $S(\nu)$ est $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$.

(iii) *Si l'élément ν de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est tel que $q(\nu)$ soit non nul, on a:*

$$S(\nu) \circ (((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)) = S(\nu). \tag{3}$$

(iv) *Si l'élément ν de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est tel que $q(\nu)$ soit non nul, l'application $S(\nu)$ définit par restriction une bijection de l'image de $((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$.*

(v) *Si τ appartient à $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$, $(\varepsilon_\mu(e_K^*))^{-1}\tau$ est dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ et, pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu)$ soit non nul, on définit une application linéaire $T(\nu): \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu) \to \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) \otimes F^*$ par:*

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu),$$
$$T(\nu)\,\tau = (((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu))((\varepsilon_\mu(e_K^*))^{-1}\,\tau \otimes e_K^*). \tag{4}$$

C'est un morphisme continu de G-modules qui vérifie:

$$S(\nu) \circ T(\nu) = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)} \tag{5}$$

$$T(\nu) \circ S(\nu) = ((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu). \tag{6}$$

Démonstration. (i) résulte immédiatement des propriétés de $\varepsilon_\mu(\cdot)$ (cf. (4.3.2)).

Pour (ii), on a clairement:

$$\forall v \in F^*, \qquad \forall \tau \in \mathscr{D}'(K, \delta), \quad (\tilde{S}(\nu))(\tau \otimes v) = \varepsilon_\mu(v)_{|K}\,\tau,$$

ce qui prouve que $(\tilde{S}(\nu))$ est indépendant de ν. Mais, d'après la définition (4.3.1) de ε_μ, on a: $\varepsilon_\mu(e_K^*)_{|K} \equiv 1$, d'où l'égalité (2). La surjectivité de $S(\nu)$ résulte de celle de $\tilde{S}(\nu)$, ce qui achève de prouver (ii).

Passons à (iii). Soit $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu)$ soit non nul. Grâce à la définition de Z_ν (cf. Lemme 9), on a:

$$S(\nu) \circ (((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)) = S(\nu) \circ p_{-\Lambda-\nu-\mu}.$$

Mais $S(\nu)$ est un G-morphisme. Donc:

$$S(\nu) \circ p_{-\Lambda-\nu-\mu} = p_{-\Lambda-\nu-\mu} \circ S(\nu).$$

Or, d'après (iv), $S(\nu)$ a une image contenue dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$ et ce G-module admet $\chi_{-\Lambda-\nu-\mu}$ comme caractère infinitésimal. D'où:

$$S(\nu) \circ p_{-\Lambda-\nu-\mu} = S(\nu).$$

L'égalité (3) résulte de ce qui précède et (iii) est prouvé.

L'égalité (3) et la surjectivité de $S(\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$ établie en (ii) montrent que $S(\nu)$ réalise une surjection de l'image de $((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$. Mais, compte tenu des propriétés de Z_ν (cf. Lemme 9(i)), cette image est égale à $p_{-\Lambda-\nu-\mu}(\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) \otimes F^*)$ donc fermée (cf. Remarque 4). De plus, d'après le Lemme 11, cette image est isomorphe à $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$. L'application $S(\nu)$ réalise donc un G-morphisme continu surjectif de G-modules entre les G-modules isomorphes $\mathrm{Im}((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)$ et $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$. Alors $S(\nu)$ est bijectif au niveau des vecteurs K-finis, donc son noyau, qui est un G-module, ne possède que 0 comme vecteur K-fini. L'application $S(\nu)$ est donc également injective, c'est à dire finalement bijective et (iv) et prouvé.

Montrons (v). On a, pour $\tau \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$, d'après la définition de $T(\nu)$:

$$(S(\nu) \circ T(\nu))(\tau) = S(\nu) \circ (((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu))((\varepsilon_\mu(e_K^*))^{-1}\tau \otimes e_K^*).$$

En tenant compte de (3) on a alors:

$$(S(\nu) \circ T(\nu))(\tau) = S(\nu)((\varepsilon_\mu(e_K^*))^{-1}\tau \otimes e_K^*),$$

et, en appliquant la définition de $S(\nu)$:

$$(S(\nu) \circ T(\nu))(\tau) = \tau,$$

ce qui prouve (5). On a donc:

$$S(\nu) \circ T(\nu) \circ S(\nu) = S(\nu)$$

et, compte tenu de (3):

$$S(\nu) \circ T(\nu) \circ S(\nu) = S(\nu) \circ (((\pi_{\delta,\nu}^P)' \otimes \pi^*)(Z_\nu)).$$

Or, d'après (iv), $S(\nu)$ est injectif sur l'image de $((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)$. De plus, d'après la définition de $T(\nu)$, cette image contient celle de $T(\nu)$. L'égalité précédente implique donc:

$$T(\nu) \circ S(\nu) = ((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu),$$

ce qui prouve (6).

En utilisant cette relation et le fait que $S(\nu)$ est un G-morphisme surjectif, on établit immédiatement que $T(\nu)$ est un G-morphisme. ∎

LEMME 14. (i) *L'endomorphisme E^* de $\mathscr{V}(\delta) = \prod_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{V}(\delta, w)$ défini par:*

$$(\eta_w)_{w \in \mathscr{W}_M} \mapsto (\langle \pi(w)\, e_\mu, e_H^* \rangle\, \eta_w)_{w \in \mathscr{W}_M},$$

est inversible.

(ii) *Soit ν un élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu)$ soit non nul. Alors, pour tout élément τ de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ on a $S(\nu) \circ (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e_H^*) \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)^H$, et:*

$$ev(S(\nu) \circ (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)))(\tau \otimes e_H^*) = E^*(ev(\tau)). \tag{7}$$

Démonstration. La vérification des propriétés de E^* est semblable à celle de E (voir Lemme 12(vii)). A noter que $\langle \pi^*(w)\, e_\mu^*, e_H \rangle = \overline{\langle \pi(w)\, e_\mu, e_H^* \rangle}$, ce qui justifie la notation E^*.

Prouvons (ii). Le seul point non trivial est (7). Mais, d'après le Lemme 13(iii), on a:

$$(S(\nu) \circ (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)))(\tau \otimes e_H^*) = S(\nu)(\tau \otimes e_H^*),$$

et en tenant compte de la définition de $S(\nu)$ (Lemme 13(ii)):

$$\begin{aligned} ev_w S(\nu)(\tau \otimes e_H^*) &= \varepsilon_\mu(e_H^*)(w)\, ev_w(\tau) \\ &= \langle \pi(w)\, e_\mu, e_H^* \rangle\, ev_w(\tau). \end{aligned}$$

L'égalité (7) en résulte. ∎

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathscr{A}(P)$ l'ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, défini au Théorème 1, tel que, pour ν élément de $\mathscr{A}(P)$, l'évaluation ev est une application injective de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $\mathscr{V}(\delta)$. Si ν est un élément de $\mathscr{A}(P)$ tel que $q(\nu)$ soit non nul, l'application $\tau \mapsto (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e_H^*)$ est injective de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $(\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) \otimes F^*)^H$.*

Démonstration. Soit ν comme ci-dessus et τ un élément de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ tel que $(((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e_H^*) = 0$. On a alors $S(\nu)(((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e_H^*) = 0$. D'après le Lemme précédent, cette condition équivaut à

$E^*(ev(\tau))=0$, c'est à dire, compte tenu de l'injectivité de E^* et ev, $\tau=0$. L'application décrite dans le Corollaire est donc injective. ▮

On rappelle que, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i}$, le prolongement méromorphe de l'intégrale d'entrelacement est défini et son transposé est une bijection de $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ (cf. Proposition 1(iii) et son Corollaire).

LEMME 15. (i) *Si* $\nu \in \mathscr{A}(P) \cap \mathscr{A}(\bar{P}) \cap \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i}$ *(cf. le Théorème* 1 *pour la définition de* $\mathscr{A}(P)$ *et* $\mathscr{A}(\bar{P})$*),* $(\pi^P_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)$ *définit un endomorphisme injectif de* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$.

(ii) *Pour tout* $\nu \in \mathscr{C}$ *(cf. Proposition* 2 *pour la définition de* $\mathscr{C}$*), on définit un endomorphisme* $M(\nu)$ *de* $\mathscr{V}(\delta)$ *par:*

$$M(\nu) := ev \circ ((\pi^P_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)) \circ j(P, \delta, \nu).$$

Alors, l'application $\nu \mapsto q(\nu)M(\nu)$*, définie sur* $\mathscr{C}$*, se prolonge en une application polynomiale sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *à valeurs dans* $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta))$.

(iii) *Si* $\nu \in \mathscr{A}(P) \cap \mathscr{A}(\bar{P}) \cap \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i} \cap \mathscr{C}$ *et* $q(\nu) \neq 0$*, l'application* $M(\nu)$ *est bijective.*

(iv) *Il existe sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *un polynôme non nul* q_1*, tel que l'application* $\nu \mapsto q_1(\nu)\, M(\nu)^{-1}$*, définie lorsque* ν *vérifie les conditions de* (iii)*, se prolonge en une application polynomiale de* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *à valeurs dans* $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta))$*. On a* $q_1(\nu) \neq 0$ *dès que* $q(\nu) \neq 0$ *et* $\nu \in \mathscr{A}(P) \cap \mathscr{A}(\bar{P}) \cap \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i} \cap \mathscr{C}$.

Démonstration. Prouvons (i). Si ν vérifie les hypothèses de l'énoncé, compte tenu du Corollaire du Lemme 14, on peut affirmer que l'application $\tau \mapsto (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e^*_H)$, est injective de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ dans $(\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) \otimes F^*)^H$. Par application de ${}^t\!A(\bar{P}, P, \delta, \nu)^{-1}$ (cet inverse existe car $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i}$), on en déduit l'injectivité de $\tau \mapsto (((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))$ $(\tau \otimes e^*_H)$ sur $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$. Mais, d'après le Lemme 12(iv) (cf. (4.2.5)), on a, pour tout élément τ de $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$:

$$\Psi_\nu((((\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(\tau \otimes e^*_H)) = (U(\nu))(\tau) \otimes e^*_\mu.$$

L'application $U(\nu)$ est donc injective sur $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$. De plus, l'application ev étant injective sur $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$ lorsque $\nu \in \mathscr{A}(\bar{P})$, il en va de même pour $ev \circ U(\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$. Compte tenu de la relation (4.2.6) et de la bijectivité de E (cf. Lemme 12(vii)), on a démontré l'injectivité de $ev \circ (\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, \bar{P}, \delta, \nu)^H$; cela prouve l'injectivité de $(\pi^{\bar{P}}_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)$ sur ce même espace. L'application de l'opérateur d'entrelacement bijectif ${}^t\!A(\bar{P}, P, \delta, \nu)$ permet de conclure à l'injectivité de $(\pi^P_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)$ sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$ et donc de prouver (i).

Passons à (ii). On sait, par exemple en revenant à la définition de j, que, pour tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $\nu \in \mathscr{C}$, $j(P, \delta, \nu, \eta)$ est de classe C^∞ sur $\mathscr{O}$. Il en est donc de même pour $((\pi^P_{\delta,\nu})'(D))\, j(P, \delta, \nu, \eta)$ pour tout élément D de $U(\mathfrak{g})$.

Pour $w \in \mathscr{W}_M$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$, l'expression $ev_w((\pi^P_{\delta,\nu})'(D)\, j(P, \delta, \nu, \eta))$ a donc un sens. Montrons que cette expression permet de définir une application polynomiale sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$. Il suffit pour cela de remarquer que $\mathfrak{q} = \mathrm{Ad}\, w(\mathfrak{p}) + \mathfrak{h}$, ce qui implique $U(\mathfrak{g}) = U(\mathrm{Ad}\, w(\mathfrak{p})) + U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{h}$. Or, compte tenu de la H-invariance de $j(P, \delta, \nu, \eta)$, on a, pour tout élément D de $U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{h}$:

$$ev_w(\pi^P_{\delta,\nu})'(D)\, j(P, \delta, \nu, \eta) \equiv 0.$$

Pour $D \in U(\mathrm{Ad}\, w(\mathfrak{p}))$, ce sont les propriétés de convariance à droite des éléments de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$ qui permettent d'assurer la dépendance polynomiale voulue. Si on ajoute à cela le fait que l'application $\nu \mapsto q(\nu)\, \tilde{Z}(_\nu)$ (cf. Lemme 10) est polynomiale la preuve de (ii) est achevée.

En outre, $j(P, \delta, \nu)$ est injective sur $\mathscr{V}(\delta)$ lorsque $\nu \in \mathscr{C}$, car, par définition des applications ev et $j(P, \delta, \nu)$ on a:

$$\forall \nu \in \mathscr{C}, \qquad ev \circ j(P, \delta, \nu) = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}(\delta)}. \tag{8}$$

Par composition avec $(\pi^P_{\delta,\nu})'(\tilde{Z}_\nu)$, en choisissant ν comme dans l'enoncé, on peut conclure, grâce à (i), à l'injectivité de $M(\nu)$, donc à sa bijectivité. Ceci achève de prouver (iii).

Passons à (iv). D'après (ii), l'application $\nu \mapsto q(\nu)\, M(\nu)$ se prolonge en une fonction polynomiale sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans End $\mathscr{V}(\delta)$ qui, d'après le point précédent, a un déterminant qui ne s'annule pas indentiquement. En particulier, $\nu \mapsto q(\nu)^{\dim \mathscr{V}(\delta)} \det M(\nu)$ est polynômiale. La fonction $\nu \mapsto \det M(\nu)$ est donc rationnelle de la forme $\nu \mapsto q_1(\nu)(q(\nu))^{-\dim \mathscr{V}(\delta)}$, avec q_1 polynôme non identiquement nul. L'application des formules de Cramer met alors en évidence le fait que $\nu \mapsto q_1(\nu)\, M(\nu)^{-1}$ s'étend en une fonction polynomiale sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. De plus, d'après (iii), si $\nu \in \mathscr{A}(P) \cap \mathscr{A}(\bar{P}) \cap \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i} \cap \mathscr{C}$ est tel que $q(\nu)$ soit non nul, det $M(\nu)$ est non nul et $q_1(\nu)$ est donc non nul sous ces mêmes hypothèses. ∎

Remarque 5. Lorsqu'on aura démontré que l'application $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$ se prolonge méromorphiquement à $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on aura, avec les mêmes notations, $q_1(\nu)$ non nul dès que $q(\nu)$ sera non nul et que ν sera un élément de $\mathscr{A}(P) \cap \mathscr{A}(\bar{P}) \cap \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\delta,i} \cap \mathscr{C} \cap \mathscr{P}$, où $\mathscr{P}$ est un ensemble contenant la variété polaire de $j(P, \delta, \nu)$. La démonstration est similaire (on utilise un prolongement méromorphe de la relation (8)).

4.5. *Fin de la démonstration du Théorème* 2

On applique la formule (4.4.7) du Lemme 14(iii) au cas $\tau = j(P, \delta, \nu, \eta)$. Si $\nu \in \mathscr{C}$ est tel que $q(\nu) \neq 0$, on a:

$$(ev \circ S(\nu) \circ (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)))(j(P, \delta, \nu, \eta) \otimes e^*_H) = E^*(\eta). \tag{1}$$

Mais l'application $S(\nu)$ est à valeurs dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)$ et la condition $\nu \in \mathscr{C}$ implique $\nu+\mu \in \mathscr{C}$. On peut donc appliquer $j(P, \delta, \nu+\mu)$ aux deux membres de l'égalité précédente. On suppose en outre $\nu+\mu \in \mathscr{A}(P)$. Alors, de la relation:

$$ev \circ j(P, \delta, \nu+\mu) = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}(\delta)},$$

résulte:

$$j(P, \delta, \nu+\mu) \circ ev = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)^H}.$$

L'application de $j(P, \delta, \nu+\mu)$ aux deux membres de (1) donne alors:

$$(S(\nu) \circ (((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu)))(j(P, \delta, \nu, \eta) \otimes e^*_H) = j(P, \delta, \nu+\mu, E^*(\eta)).$$

On utilise alors les propriétés de $S(\nu)$ (cf. Lemme 13(iii) et (4.4.3)), pour obtenir:

$$S(\nu)(j(P, \delta, \nu, \eta) \otimes e^*_H) = j(P, \delta, \nu+\mu, E^*(\eta)).$$

On applique alors $T(\nu)$ aux deux membres de cette égalité et on utilise le Lemme 13(v) pour conclure:

$$(((\pi^P_{\delta,\nu})' \otimes \pi^*)(Z_\nu))(j(P, \delta, \nu, \eta) \otimes \mathrm{e}^*_H) = T(\nu)\, j(P, \delta, \nu+\mu, E^*(\eta)).$$

Si on contracte les deux membres de cette égalité par e_H, on obtient, en utilisant la définition de $\tilde{Z}_\nu$ (cf. Lemme 10):

$$((\pi^P_{\delta,\nu})'\,(\tilde{Z}_\nu))\, j(P, \delta, \nu, \eta) = ((I \otimes e_H) \circ T(\nu))\, j(P, \delta, \nu+\mu, E^*(\eta)).$$

Mais, si on suppose en outre que $\nu \in \mathscr{A}(P)$, on a, d'après le Lemme précédent:

$$((\pi^P_{\delta,\nu})'\,(\tilde{Z}_\nu))\, j(P, \delta, \nu, \eta) = j(P, \delta, \nu, M(\nu)(\eta)).$$

Par ailleurs, il résulte des définitions de $D_\mu(\nu)$ (cf. (4.3.5)), et $T(\nu)$ (cf. Lemme 13(v), (4.4.4)), que:

$$(I \otimes e_H) \circ T(\nu) = D_\mu(\nu)_{|\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\mu)}.$$

On a donc démontré l'implication:

$$\begin{aligned}
&\forall \nu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{A}(P),\\
&\qquad (q(\nu) \neq 0 \text{ et } \nu+\mu \in \mathscr{A}(P) \Rightarrow j(P, \delta, \nu, M(\nu)\,\eta)\\
&\qquad\qquad = D_\mu(P, \delta, \nu)\, j(P, \delta, \nu+\mu, E^*(\eta))).
\end{aligned}$$

On suppose en outre que $M(v)$ est inversible. Alors, si v vérifie les conditions précédentes, on a:

$$j(P, \delta, v, \eta) = D_\mu(P, \delta, v)\, j(P, \delta, v + \mu, (M(v)^{-1} \circ E^*)(\eta)).$$

On multiplie les deux membres de cette égalité par $b_\mu(v) = q_1(v)\, q(v)$, et on obtient (cf. le Lemme 15(iv) pour la définition de q_1):

$$b_\mu(v)\, j(P, \delta, v, \eta) = q(v)\, D_\mu(P, \delta, v)\, j(P, \delta, v + \mu, (q_1(v)\, M(v)^{-1} \circ E^*)(\eta)).$$

L'application $R_\mu(v)\colon v \mapsto q_1(v)\, M(v)^{-1} \circ E^*$ se prolonge en une application polynomiale de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathscr{V}(\delta)$. Les calculs précédents se traduisent par l'égalité, valable pour v dans un ouvert dense de $\mathscr{C}$:

$$b_\mu(v)\, j(P, \delta, v, \eta) = \tilde{D}_\mu(P, \delta, v)\, j(P, \delta, v + \mu, R_\mu(v)(\eta)).$$

Or, les deux membres de cette égalité représentent des fonctions holomorphes sur $\mathscr{C}$, donc continues. Le point (i) du Théorème en résulte par densité.

Pour (ii), il faut démontrer une propriété similaire pour $M(v)$. Mais $((\pi_{\delta, v}^P)'\, (\tilde{Z}_v))$ agit sur $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)$ comme un opérateur différentiel. En particulier, pour $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$, on a:

$$((\pi_{\delta, v}^P)'\, (\tilde{Z}_v))\, j(P, \delta, v, \eta)_{|(\bigcup_{w' \in \mathscr{W}_M - \{w\}} Hw'P} = 0.$$

Cela implique que $M(v)\, \eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$, comme désiré. ▮

THÉORÈME 3. (i) *La fonction* $v \mapsto j(P, \delta, v)$, *holomorphe sur* $\mathscr{C}$, *à valeurs dans* $\mathrm{Hom}(\mathscr{V}(\delta), \mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty))$, *s'étend en une fonction méromorphe sur* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. *On notera encore* $v \mapsto j(P, \delta, v)$ *ce prolongement.*

(ii) *Il existe un suite finie* $\mathscr{H}_1, ..., \mathscr{H}_j$ *d'hyperplans affines de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *tels que la variété polaire de l'application* $v \mapsto j(P, \delta, v)$ *soit contenue dans la réunion des translatés* $\mathscr{H}_i - p\delta$, *où* $\delta = \sum_{i=1}^m \tilde{\delta}_i$ *et* p *décrit* $\mathbb{N}^*$. *De plus, l'espace vectoriel définissant la direction de* $\mathscr{H}_i$ *est défini par une équation de la forme*: $n_1 v_1 + \cdots + n_m v_m = 0$, *où les coefficients* $n_1, ..., n_m$ *sont des entiers relatifs, et* $v_1, ..., v_m$ *les complexes tels que*: $v = \sum_{i=1}^m v_i\, \tilde{\delta}$.

(iii) *Pour tout* $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *tel que* $j(P, \delta, v)$ *soit défini, on a*: $ev \circ j(P, \delta, v) = \mathrm{Id}_{\mathscr{V}(\delta)}$.

(iv) *Soit* $(\eta_i)_{i=1, ..., q}$ *une base de* $\mathscr{V}(\delta)$. *Si* $v \in \mathscr{A}(P)$ (*cf. Théorème* 1) *et* $j(P, \delta, v)$ *est définie* $(j(P, \delta, v, \eta_i))_{i=1, ..., q}$ *est une base de* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)^H$).

Démonstration. L'existence du prolongement méromorphe résulte de l'equation fonctionnelle établie lors de la démonstration du Théorème 2.

Pour (ii), on utilise la liberté dont on dispose pour le choix de μ dans le Théorème 2, et on procède comme dans [BrD, preuve du

Théorème A.3.3]. De la méromorphie de l'application $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$ sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, et du fait que, lorsqu'elle est définie, on a pour tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, $j(P, \delta, \nu, \eta) \in \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)^H$, on peut appliquer la Proposition 3 pour voir que $ev \circ j(P, \delta, \nu, \eta)$ est définie lorsque $j(P, \delta, \nu)$ l'est et que, de plus, l'application $\nu \mapsto ev \circ j(P, \delta, \nu, \eta)$ est méromorphe de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathscr{V}(\delta)$. La relation $ev \circ j(P, \delta, \nu, \eta) = \eta$, établie lorsque ν appartient à $\mathscr{C}$, s'étend par prolongement holomorphe à tout le domaine de définition, ce qui prouve (iii).

(iv) résulte de (iii) et du Théorème 1. ∎

5. Effet des intégrales d'entrelacement sur les familles $j(P, \delta, \nu)$

5.1. *Définition des matrices B*

Le résultat suivant est l'analogue de la Proposition 6.1 de [B3].

Proposition 4. *Soit P_1, P_2 deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de σ-décompositions de Langlands $P_i = MAN_i$, $i = 1, 2$. Il existe une unique application méromorphe $B(P_2, P_1, \delta, \nu)$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathscr{V}(\delta)$ telle que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:*

$$^tA(P_1, P_2, \delta, \nu) \circ j(P_1, \delta, \nu) = j(P_2, \delta, \nu) \circ B(P_2, P_1, \delta, \nu).$$

Démonstration. Compte tenu du Lemme 7, de la Proposition 3 et des Théorèmes 1 et 3, la démonstration de ce résultat est identique à celle de la Proposition 6.1 de [B3].

5.2. *Réduction au cas de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables σ-adjacents.*

On va maintenant s'attacher à prouver que le calcul des matrices B est un problème qui peut se réduire au cas particulier des paraboliques $\sigma\theta$-stables de "σ-rang" un.

Rappelons quelques faits sur les sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G. D'après [B3], tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est conjugué par un élément de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)(K \cap H)$ à un parabolique du type de ceux construits au §1.3.

Soit $P = MAN$ la σ-décomposition de Langlands (voir [B3, §2]) d'un tel parabolique. Bien que $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ ne soit pas nécessairement un système de racines, on peut néammoins définir de façon évidente la notion de racine simple (relativement à $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$) et celle de racine réduite. On voit facilement que $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ possède exactement $\dim \mathfrak{a} - \dim(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ racines simples, $\mathfrak{c}$ désignant le centre de $\mathfrak{g}$. Dans le cas des sous-groupes paraboliques écrits au §1.3, ces racines simples sont les restrictions à $\mathfrak{a}$ des éléments de $\Sigma \backslash \Theta$. En outre, une racine simple est réduite.

Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$, on notera $\mathfrak{n}^\alpha := \bigoplus_{t \in \mathbb{R}^{+*}} \mathfrak{g}^{t\alpha}$ où $\mathfrak{g}^{t\alpha}$ est le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ correspondant au poids $t\alpha$ de $\mathfrak{a}$. On dira que deux sous-groupes paraboliques P et P', associés et $\sigma\theta$-stables de G de σ-décompositions de Langlands $P = MAN$ et $P' = MAN'$ sont σ-adjacents s'ils sont distincts et si $\mathfrak{n} \cap \theta'(\mathfrak{n}') = \mathfrak{n}^\alpha$ où $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ est réduite. Il est facile de vérifier que, dans ce cas, α est $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$-simple.

Une chaîne σ-minimale de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de P à P' est une suite $P_0, ..., P_r$ de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables associés, telle que $P_0 = P$, $P_r = P'$, et (P_i, P_{i+1}) soient σ-adjacents pour $i = 0, ..., r-1$, et de longueur minimale parmi les chaînes vérifiant ces conditions. Il existe des chaînes σ-minimales de P à P'. La démonstration est analogue à celle du cas $\sigma = \theta$ (voir [Kn, p. 538]). Du résultat correspondant pour les opérateurs d'entrelacement qui résulte de [KSt, Corollaire 7.7], on déduit:

PROPOSITION 5. *Si P et P' sont deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G de σ-décomposition de Langlands $P = MAN$ et $P' = MAN'$, et $P_0, ..., P_r$ une chaîne σ-minimale de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G reliant P à P', on a l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:*

$$B(P', P, \delta, \nu) = B(P_r, P_{r-1}, \delta, \nu) \circ \cdots \circ B(P_1, P_0, \delta, \nu).$$

5.3. *Restriction à des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de σ-rang un*

La Proposition précédente permet de ramener l'étude des matrices B à celles d'entre elles qui sont associées à des couples de sous-groupes paraboliques σ-adjacents. Nous allons maintenant étudier ce cas plus en détail.

Soit α une racine $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$-simple. On définit $\bar{\mathfrak{n}}^\alpha := \theta(\mathfrak{n}^\alpha)$ et on note $\bar{N}^\alpha$ le sous-groupe analytique de $\bar{N} := \theta(N)$ d'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{n}}^\alpha$. Soit $G_1(\alpha)$ le centralisateur de $\operatorname{Ker} \alpha$ dans G. On notera $W(\alpha)$ l'image dans W du normalisateur dans $K \cap G_1(\alpha)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$, image qui contient évidemment W^M. Si $\mathcal{W}_M$ est un ensemble de représentants de $W_H \backslash W / W^M$, on notera $\mathcal{W}_M(\alpha)$ le sous-ensemble de $\mathcal{W}_M$ formé des représentants de l'image de $W(\alpha)$ dans $W_H \backslash W / W^M$.

LEMME 16. *Soit $P = MAN$ comme ci-dessus et α une racine simple de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$. L'ensemble $P\bar{N}^\alpha$ est contenu dans l'adhérence de: $\bigcup_{w \in \mathcal{W}_M(\alpha)} HwP$.*

Démonstration. On se ramène facilement au cas où $\mathcal{W}_M(\alpha) \subseteq W(\alpha)$. Alors la démonstration est identique à celle de [B3, Lemme 7.3], en utilisant les Lemmes 2(i) et 3(i). Noter que l'hypothèse de simplicité de α est utilisée pour s'assurer que $(\mathfrak{p} \oplus \bar{\mathfrak{n}}^\alpha)$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. ∎

Si $w \in W$ est fixé, le représentation $w\delta$ est un élément du dual unitaire de wMw^{-1}. On considère le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable wPw^{-1}. On remarque que $(\mathscr{W}_M)w^{-1}$ est un système de représentants de $W_H \backslash W / W_{wMw^{-1}}$. On note $\mathscr{V}(w\delta) := \bigoplus_{v \in \mathscr{W}_{Mw^{-1}}} \mathscr{V}(w\delta, v)$. Il est clair que, pour tout élément v de $\mathscr{W}_M$: $\mathscr{V}(\delta, v) = \mathscr{V}(w\delta, vw^{-1})$ (cf. (2.4.1)).

On notera $R(w, \delta)$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{V}(\delta)$ sur $\mathscr{V}(w\delta)$ qui envoie chaque $\mathscr{V}(\delta, v)$ sur $\mathscr{V}(w\delta, vw^{-1})$, où il se réduit, moyennant l'identification précédente, à l'identité de $\mathscr{V}(\delta, v)$.

On note $R'(w)$ la transposée de la translation à droite par w^{-1} dans $\mathscr{D}(G, V_\delta^*)$. On vérifie sans difficulté que $R'(w)$ définit un isomorphisme de G-modules entre $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)$ et $\mathscr{D}'(G, wPw^{-1}, w\delta, wv)$, c'est à dire, avec les notations du §2.3, entrelace $(\pi^P_{\delta, v})'$ et $(\pi^{wPw^{-1}}_{w\delta, wv})'$. La preuve du Lemme suivant est alors immédiate (voir [B3, Lemme 6.10]).

LEMME 17. (i) *On a l'égalité de fonctions méromorphes sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$R'(w) \circ j(P, \delta, v) = j(wPw^{-1}, w\delta, wv) \circ R(w, \delta).$$

(ii) *Si P' est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de σ-décomposition de Langlands $P' = MAN'$, on a l'égalité de fonctions méromorphes sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$R(w, \delta) \circ B(P', P, \delta, v) = B(wP'w^{-1}, wPw^{-1}, w\delta, wv) \circ R(w, \delta).$$

Si $w \in \mathscr{W}_M$ et $v \in W$, on notera $\widetilde{wv}$ le représentant dans $\mathscr{W}_M$ de $W_H wvW^M$.

LEMME 18. *Soit P' un sous-groupe parabolique σ-adjacent à P et α la racine simple de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ telle que $\mathfrak{n}^\alpha = \mathfrak{n} \cap \theta(\mathfrak{n}')$. Pour tout $w \in \mathscr{W}_M$, l'opérateur $B(P', P, \delta, v)$ laisse stable le sous-espace $\sum_{v \in W(\alpha)} \mathscr{V}(\delta, \widetilde{wv})$ de $\mathscr{V}(\delta)$.*

Démonstration. On remarque que:

$$\forall u, v \in W(\alpha), \qquad \widetilde{(\widetilde{wu})\, v} \in \{\widetilde{ws} \mid s \in W(\alpha)\}.$$

Il en résulte qu'il suffit de prouver que, pour tout $w \in \mathscr{W}_M$, $B(P', P, \delta, v)$ envoie $\mathscr{V}(\delta, w)$ dans $\sum_{v \in W(\alpha)} \mathscr{V}(\delta, \widetilde{wv})$. Grâce au Lemme 17, on réduit aisément la démonstration de ce point au cas $w = 1$ (quitte à remplacer P par wPw^{-1} et δ par $w\delta$). On conserve donc les mêmes notations en supposant $w = 1$. Alors, de (2.3.13) et du Lemme 16, on déduit que pour $\eta \in \mathscr{V}(\delta, 1)$ le support de ${}^t\!A(P, P', \delta, v)\, j(P, \delta, v, \eta)$ est contenu dans l'adhérence de $\bigcup_{u \in \mathscr{W}_M(\alpha)} HuP = \bigcup_{v \in W(\alpha)} H\tilde{v}P$. L'assertion désirée en résulte. ∎

Avec les notations du Lemme précédent, on définit:

$$\mathscr{V}_\alpha(\delta) := \sum_{v \in W(\alpha)} \mathscr{V}(\delta, \tilde{v}),$$

et on note $B_\alpha(P', P, \delta, \nu)$ la restriction à $\mathscr{V}_\alpha(\delta)$ de $B(P', P, \delta, \nu)$. D'après le Lemme 18, $B_\alpha(P', P, \delta, \nu)$ est un endomorphisme de $\mathscr{V}_\alpha(\delta)$.

Puisque $\operatorname{Ker}\alpha$ est central dans $\mathfrak{g}_1(\alpha) := \operatorname{Lie} G_1(\alpha)$, et contenu dans $\mathfrak{s}$, $G(\alpha) := (G_1(\alpha) \cap K) \exp(\mathfrak{g}_1(\alpha) \cap \mathfrak{s} \cap (\operatorname{Ker}\alpha)^\perp)$ est un sous-groupe réductif dans la classe de Harish Chandra qui vérifie la condition (1.2.2), car il en est ainsi de $G_1(\alpha)$ qui est isomorphe à $G(\alpha) \times (\operatorname{Ker}\alpha)$. De plus, $G(\alpha)$ est stable par σ et $H(\alpha) := H \cap G(\alpha)$ est un sous-groupe ouvert de $G(\alpha)^\sigma$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\alpha)$ de $G(\alpha)$ vérifie:

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \sum_{t \in \mathbb{R}^*} \mathfrak{g}^{t\alpha},$$

avec $\mathfrak{a}(\alpha) := \mathfrak{a} \cap (\operatorname{Ker}\alpha)^\perp$.

Soit $P(\alpha)$ le sous-groupe parabolique de $G(\alpha)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(\alpha) := \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}^\alpha$. C'est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de $G(\alpha)$ de σ-décomposition de Langlands $P(\alpha) = MA(\alpha) N^\alpha$. On fixe un ensemble $\mathscr{W}'_M(\alpha)$ de représentants de $W_{H(\alpha)} \backslash W(\alpha) / W^M$ dans $W(\alpha)$, où $W_{H(\alpha)}$ est l'analogue du groupe W_H pour $G(\alpha)$. Comme on considère que $W(\alpha)$ est un sous-groupe de W, on identifie $W_{H(\alpha)}$ au sous-groupe $W_H \cap W(\alpha)$. Il est facile de vérifier que $\mathscr{W}'_M(\alpha)$ est en bijection avec $\mathscr{W}_M(\alpha)$. On notera: $\mathscr{V}_\alpha(\delta) := \sum_{w \in \mathscr{W}'_M(\alpha)} \mathscr{V}(\delta, w)$.

On définit alors, pour $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}(\alpha)$, un endomorphisme $B(\bar{P}(\alpha), P(\alpha), \delta, \nu)$ de $\mathscr{V}_\alpha(\delta)$ (relativement au groupe $G(\alpha)$) où $\bar{P}(\alpha) := \theta(P(\alpha))$ est le sous-groupe parabolique de $G(\alpha)$ opposé à $P(\alpha)$.

PROPOSITION 6. *On suppose que $\mathscr{W}_M(\alpha) = \mathscr{W}'_M(\alpha)$. Pour tout élément $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\nu_\alpha := \nu_{|\mathfrak{a}(\alpha)}$ ne soit pas un pôle de $B(\bar{P}(\alpha), P(\alpha), \delta, \nu_\alpha)$, on a:*

$$B_\alpha(P', P, \delta, \nu) = B(\bar{P}(\alpha), P(\alpha), \delta, \nu_\alpha).$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de [B3 Lemme 7.4]. On remplace seulement l'utilisation du Corollaire 4.14 de [B3] par les Lemmes 6 et 7 et la Proposition 3 du présent article. ∎

Remarque 6. On peut toujours modifier le choix de $\mathscr{W}_M$ pour que: $\mathscr{W}_M(\alpha) = \mathscr{W}'_M(\alpha)$. L'effet sur les matrice B de ce changement est simple; on obtient une conjugaison par un isomorphisme (voir [B3, Lemme 6.4]).

LEMME 19. *Soient P et P' comme ci-dessus. La fonction $B(P', P, \delta, \nu)$ est une fonction méromorphe de la variable complexe $\langle \nu, \alpha \rangle$.*

Démonstration. Elle est similaire à celle de [B3, Lemme 9.4]. ∎

PROPOSITION 7. *La variété polaire de la fonction méromorphe $\nu \mapsto j(P, \delta, \nu)$ sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ est une union localement finie d'hyperplans de la forme $\langle \nu, \alpha \rangle = z_\alpha$, $z_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$.*

Démonstration. Elle est similaire à celle de [B3, Lemme 9.5]. ∎

Appendice A

A.1. *Quelques propriétés de* $\mathscr{D}(X, Y)$

Soit X une variété de classe C^∞, dénombrable à l'infini, et V un espace de Fréchet. Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathscr{D}^m(X, V)$ l'espace des fonctions de classe C^m sur X, à support compact et à valeurs dans V, et on choisira d'écrire $\mathscr{D}(X, V)$ plutôt que $\mathscr{D}^\infty(X, V)$. On munit cet espace de sa topologie naturelle. Si ω est un compact de X, on note $\mathscr{D}^m_\omega(X, V)$ le sous-espace de $\mathscr{D}^m(X, V)$ formé des fonctions à support dans ω, que l'on munit de la topologie induite par celle de $C^m(X, V)$. L'espace V étant un Fréchet, il en est de même de $\mathscr{D}^m_\omega(X, V)$. Fixons une suite croissante $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de X dont les intérieurs recouvrent X. On a alors:

Lemme A.1. (i) *L'espace vectoriel topologique* $\mathscr{D}^m(X, V)$ *est la limite inductive stricte de la suite d'espaces de Fréchet* $(\mathscr{D}^m_{\omega_n}(X, V))_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) *L'espace* $\mathscr{D}^m(X, V)$ *est tonnelé et, muni de la topologie forte, son dual topologique* $\mathscr{D}'^m(X, V)$ *est quasi-complet.*

(iii) *Une partie de* $\mathscr{D}^m(X, V)$ *est bornée si et seulement si il existe un compact* ω *de* X *tel que cette partie soit contenue dans* $\mathscr{D}^m_\omega(X, V)$ *et bornée dans cet espace.*

(iv) *Si* A (*resp.* B) *est une partie bornée de* $C^\infty(X)$ (*resp.* $\mathscr{D}^m(X, V)$) $AB := \{f\varphi \mid f \in A, \varphi \in B\}$ *est bornée dans* $\mathscr{D}^m(X, V)$.

(v) *Si* A *est une partie bornée de* $C^\infty(X)$ *et* C *une partie équicontinue du dual* $\mathscr{D}'^m(X, V)$ *de* $\mathscr{D}^m(X, V)$, $AC := \{f\tau \mid f \in A, \tau \in C\}$ *est une partie équicontinue de* $\mathscr{D}'^m(X, V)$.

(vi) *Si* $z \mapsto f_z$ *est une application continue* (*resp. holomorphe*) *d'un ouvert* Ω *d'un espace vectoriel réel* (*resp. complexe*) E *de dimension finie dans* $C^\infty(X)$ *et* τ *un élément de* $\mathscr{D}'^m(X, V)$, *l'application* $z \mapsto f_z\tau$ *est continue* (*resp. holomorphe*) *de* Ω *dans* $\mathscr{D}'^m(X, V)$.

(vii) *Si* $z \mapsto f_z$ (*resp.* $z \mapsto \tau_z$) *est une application holomorphe d'un ouvert* Ω *d'un espace vectoriel de dimension finie* E, *à valeurs dans* $C^\infty(X)$ (*resp.* $\mathscr{D}'(X, V)$ *muni de la topologie forte*), *l'application* $z \mapsto f_z\tau_z$ *de* Ω *dans* $\mathscr{D}'(X, V)$ *est holomorphe.*

(viii) *A tout couple* (τ, v) *formé d'un élément* $\tau \in \mathscr{D}'(X, V)$ *et d'un élément* $v \in V$, *on associe l'élément* $\tau_v \in \mathscr{D}'(X)$ *défini par la relation*:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(X), \qquad \langle \tau_v, \varphi \rangle = \langle \tau, \varphi \otimes v \rangle.$$

On a alors, pour tout opérateur différentiel D *sur* X: $D(\tau_v) = (D\tau)_v$. *De plus, si* $\tau \in \mathscr{D}'^m(X, V)$, *on a* $\tau_v \in \mathscr{D}'^m(X, V)$ *pour tout* $v \in V$.

(ix) *Si U est l'image d'une carte de la variété X contenant le point x_0, et m un entier naturel non nul, il existe une suite finie $s \mapsto (\varphi_s, D_s)$, $s = 1, ..., t$, où $\varphi_s \in \mathscr{D}^m(U)$ et D_s est un opérateur differentiel sur U, telle que:*

$$\sum_{s=1}^{t} D_s \varphi_s = \delta_{x_0}$$

dans $\mathscr{D}'(U)$, où δ_{x_0} est la mesure de Dirac en x_0 (on a utilisé ici une mesure de Lebesgue pour identifier les fonctions sur U à des distributions).

Démonstration. (i) résulte des définitions et du fait que tout compact de X est contenu dans l'un des ω_n.

Pour (ii), comme toute limite inductive stricte d'une suite d'espaces tonnelés est tonnelée [Boul, Ch. 3, §1, n° 2, Cor. 2 de la Prop. 2], et qu'un espace de Fréchet est tonnelé [Boul, Ch. 3, §1, n° 1, Cor. de la Prop. 1], l'espace $\mathscr{D}^m(X, V)$ est tonnelé. Son dual fort $\mathscr{D}'^m(X, V)$ est alors quasi-complet [Boul, Ch. 4, §3, n° 3, Prop. 3], ce qui achève de prouver (ii).

(iii) résulte alors de (i) et de [Boul, Ch. 3, §2, n° 4, Prop. 6].

L'assertion (iv) résulte alors immédiatement de (iii) et de la formule de Leibniz pour la dérivation d'un produit.

Prouvons (v). Comme $\mathscr{D}^m(X, V)$ est tonnelé d'après (ii), il suffit de vérifier (voir [Boul, Ch. 3, §3, n° 6, Th. 3]) que AC est simplement borné. Or, si $\varphi \in \mathscr{D}^m(X, V)$, on a:

$$\{\langle \tau, \varphi \rangle \mid \tau \in AC\} = \{\langle \tau, f\phi \rangle \mid \tau \in C, f \in A\}.$$

Mais, d'après (iv), $\{f\varphi \mid f \in A\}$ est borné dans $\mathscr{D}^m(X, V)$. L'équicontinuité de C implique alors que $\{\langle \tau, f\varphi \rangle \mid \tau \in C, f \in A\}$ est borné dans $\mathbb{C}$, c'est à dire que AC est simplement borné dans le dual de $\mathscr{D}^m(X, V)$. L'assertion (v) en résulte.

Prouvons (vi). Supposons $z \mapsto f_z$ continue de Ω dans $C^\infty(X)$, et considérons une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω convergeant vers un point z de Ω. Montrons que la suite $(f_{z_n}\tau)_{n \in \mathbb{N}}$ converges vers $f_z\tau$ dans $\mathscr{D}'(X, V)$. Soit B un borné de $\mathscr{D}^m(X, V)$ et ω un compact de X tel que B soit contenu dans $\mathscr{D}^m_\omega(X, V)$ et borné dans cet espace. La continuité de τ sur $\mathscr{D}^m_\omega(X, V)$ se traduit par l'existence d'une suite finie $D_1, ..., D_q$ d'opérateurs différentiels d'ordre borné sur X, et de seminormes $p_1, ..., p_q$ continues sur V, tels que:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}^m_\omega(X, V), \qquad |\langle \tau, \varphi \rangle| \leqslant \sum_{i=1}^{q} \operatorname*{Sup}_{x \in \omega} p_i((D_i \varphi)(x)).$$

Il existe donc deux familles finies D_j', D_j'', $j=1, \ldots, r$ d'opérateurs différentiels sur X telles que:

$$|\langle \tau, f\varphi \rangle| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant q,\, 1 \leqslant j \leqslant r} \operatorname{Sup}_{x \in \omega} |D_j' f(x)| \operatorname{Sup}_{x \in \omega} p_i(D_j'' \varphi(x)).$$

On en déduit que si f tend vers 0 dans $C^\infty(X)$, $\langle \tau, f\varphi \rangle$ tend vers 0 uniformément lorsque φ reste dans une partie bornée de $\mathscr{D}_\omega'''(X, V)$, ce qui prouve la première partie de (vi). Pour la seconde, il faut voir que si $z \mapsto f_z$ est holomorphe, il en va de même de $z \mapsto f_z \tau$. D'après [Bou1, §3.3.1], il suffit de voir que, pour tout h dans E et a dans Ω, l'application $t \mapsto f_{a+th}\tau$, définie sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}$ est holomorphe. On a donc ramené le problème au cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On va vérifier dans ce cas que l'application $z \mapsto f_z \tau$ est holomorphe car $\mathbb{C}$-dérivable, [Bou1, §3.3.1]. Notons $z \mapsto (d/dz) f_z$ la dérivée de la fonction holomorphe $z \mapsto f_z$. Alors, l'application F de Ω dans $C^\infty(X)$ définie par $F_z = (f_z - f_{z_0})(z - z_0)^{-1}$ si $z \neq z_0$, et $F_z = (d/dz) f_{z|z=z_0}$ si $z = z_0$, est continue de Ω dans $C^\infty(X)$. Mais, d'après la première partie, $z \mapsto F_z \tau$ est continue, ce qui implique la $\mathbb{C}$-dérivabilité de $z \mapsto f_z \tau$.

Prouvons (vii). Introduisons l'application $F: (z, z') \mapsto f_z \tau_{z'}$ de $\Omega \times \Omega$ dans $\mathscr{D}'^m(X, V)$. On va démontrer qu'elle est holomorphe. Pour z fixé dans Ω, l'application $z' \mapsto f_z \tau_{z'}$ est composée d'une application holomorphe et d'un opérateur linéaire $\tau \mapsto f_z \tau$ continu sur $\mathscr{D}'^m(X, V)$, donc holomorphe. De même, pour z' fixé dans Ω, l'application $z \mapsto f_z \tau_{z'}$ est holomorphe, d'après ce qui précède. Pour toute forme linéaire continue u sur $\mathscr{D}'^m(X, V)$, l'application $(z, z') \mapsto \langle u, f_z \tau_{z'} \rangle$ est séparément holomorphe, donc holomorphe sur le produit $\Omega \times \Omega$. L'espace $\mathscr{D}'^m(X, V)$ étant quasi-complet, l'application faiblement holomorphe F est holomorphe. On en déduit (vii) par restriction de F à la diagonale de $\Omega \times \Omega$.

L'assertion (viii) est évidente.

Pour (ix), on utilise le résultat classique sur $\mathbb{R}^n$ qui, pour tout entier naturel m et tout voisinage ouvert V de $y_0 \in \mathbb{R}^n$, assure l'existence d'une suite finie $s \mapsto (D_s, \varphi_s)$, $s = 1, \ldots, t$, où D_s est un opérateur différentiel sur V et φ_s une fonction de $\mathscr{D}^m(V)$ telle que:

$$\sum_{s=1}^{t} D_s \varphi_s = \delta_{y_0}$$

dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. ∎

Remarque A.1. On a adopté la définition suivante des opérateurs différentiels. Etant donné une variété X, on dira qu'un endomorphisme D de $C_c^\infty(X)$ est un opérateur différentiel sur X si, pour toute carte U de X, la restriction de D à $C_c^\infty(U)$ laisse stable $C_c^\infty(U)$ où elle définit un opérateur appartenant à l'algèbre d'opérateurs engendrée par les champs de vecteurs et les multiplications par les fonctions de $C^\infty(U)$. Ce point de vue n'est peut être pas très standard, mais il suffira à nos besoins.

A.2. *Rappels sur la thèse de Bruhat*

Soit Γ un groupe de Lie agissant à gauche de manière lisse sur une variété X de classe C^∞. On note $(g, x) \in \Gamma \times X \mapsto g \cdot x \in X$ cette action, et on suppose que X est réunion d'une famille finie de Γ-orbites. Pour des détails plus complets concernant ce qui suit, on pourra consulter la thèse [Bru] de Bruhat ou [War, §§5.2.3 et 5.2.4]. On définit par récurrence une suite $i \mapsto F_i$ de parties Γ-stables de X par $F_0 = X$ et, pour tout i entier, F_{i+1} est le complémentaire dans F_i de la réunion des Γ-orbites ouvertes dans F_i.

Les F_i, $i = 0, 1, \ldots$ forment une suite décroissante de sous-variétés fermées et Γ-invariantes de X telle que $F_i = \emptyset$ pour i assez grand. Etant donné une Γ-orbite Q dans X, il existe alors un unique entier $\alpha(Q)$ tel que Q soit un ouvert de $F_{\alpha(Q)}$. Dans ce cas

$$\Omega_Q = Q \cup (X \setminus F_{\alpha(Q)}) \tag{1}$$

est ouvert dans X et Q est fermé dans Ω_Q.

Etant donné un espace de Fréchet V et un sous-espace $\mathscr{T}$ de $\mathscr{D}'(X, V)$, on associe à toute Γ-orbite Q de X l'espace:

$$\mathscr{T}([Q]) = \{ T_{|\Omega_Q} \mid T \in \mathscr{T}, \operatorname{Supp} T \subseteq F_{\alpha(Q)} \}. \tag{2}$$

On sait alors [War, Lemme 5.2.2.4] que:

$$\dim \mathscr{T} \leqslant \sum_Q \dim \mathscr{T}([Q]). \tag{3}$$

On suppose que Γ agit sur V par une représentation lisse π. On fait agir Γ sur $\mathscr{D}'(X, V)$ par la contragrédiente $g \mapsto L'_g$ de la représentation régulière gauche de Γ dans $C_c^\infty(X, V)$. Soit

$$\mathscr{D}'(X, \pi) = \{ T \in \mathscr{D}'(X, V) \mid \forall g \in \Gamma, L'_g T = \pi'(g^{-1}) T \}$$

où π' est la représentation contragrédiente de π.

On fixe un entier naturel k et on note $\mathscr{D}'_k(X, V)$ le sous-espace de $\mathscr{D}'(X, V)$ formé des éléments d'ordre inférieur ou égal à k, et $\mathscr{D}'_k(X, \pi) = \mathscr{D}'_k(X, V) \cap \mathscr{D}'(X, \pi)$. Si on note

$$\mathscr{T} = \{ T \in \mathscr{D}'_k(X, \pi) \mid \operatorname{Supp} T \subseteq F_1 \}$$

la condition (2) implique:

$$\dim \mathscr{T} \leqslant \sum_{Q \in \Gamma \backslash X} \dim \mathscr{T}([Q]).$$

Toute Γ-orbite ouverte Q étant contenue dans $\Omega_Q = X \backslash F_1$, on a donc:

$$\dim \mathscr{T} \leqslant \sum_{Q \in \Gamma \backslash X,\, Q \text{ non ouverte}} \dim \mathscr{T}([Q]). \tag{4}$$

Mais

$$\mathscr{T}([Q]) \subseteq \{T \in \mathscr{D}'_k(\Omega_Q, V) \mid \forall g \in \Gamma,\, L'_g T = \pi'(g^{-1})\, T \text{ et Supp } T \subseteq Q\}. \tag{5}$$

La dimension du second membre de (4) est estimée par la théorie de Bruhat. Plus précisément, si Q est une Γ-orbite de X et $x_0 \in Q$, le stabilisateur Γ_{x_0} de x_0 agit sur l'espace tangent $T_{x_0}(X)$ (resp $T_{x_0}(Q)$) en x_0 à X (resp Q) et cette action passe au quotient à $T_{x_0}(X)/T_{x_0}(Q)$. Pour tout entier naturel n, on note $S_n^{x_0}$ la puissance symétrique de cette représentation agissant sur $E_n^{x_0} = S^n(T_{x_0}(X)/T_{x_0}(Q))$. Si δ_Γ (resp $\delta_{\Gamma_{x_0}}$) désigne la fonction modulaire du groupe Γ (resp Γ_{x_0}), on définit le caractère

$$\rho_{\Gamma_{x_0}} := \delta_{\Gamma_{x_0}} \times (\delta_\Gamma^{-1})_{|\Gamma_{x_0}}$$

et la représentation

$$\tilde{S}_n^{x_0} := \rho_{\Gamma_{x_0}}^{-1} S_n^{x_0}$$

du groupe Γ_{x_0} dans l'espace $E_n^{x_0}$.

Enfin $i(V, Q, n)$ désigne la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement continus entre les représentation $\pi_{|\Gamma_{x_0}}$ et $\tilde{S}_n^{x_0}$.

Tout élément T de $\mathscr{D}'_k(\Omega_Q, V)$ tel que Supp $T \subseteq Q$ et vérifiant:

$$\forall g \in \Gamma, \qquad L'_g T = \pi'(g^{-1})\, T$$

a un ordre transverse sur Q inférieur ou égal à k (cf. [Schw, preuve du Th. 36, Ch. 3]). Il résulte alors de (3) et de [War, §5.2.3] que:

$$\dim \mathscr{T}([Q]) \leqslant \sum_{n \leqslant k} i(V, Q, n).$$

On a donc, en tenant compte de (2):

$$\dim \mathscr{T} \leqslant \sum_{Q \in \Gamma \backslash X,\, Q \text{ non ouverte}} \; \sum_{n \leqslant k} i(V, Q, n). \tag{6}$$

A.3. *Un résultat de Bruhat relatif au cas unitaire*

La théorie de Bruhat pour le cas unitaire fournit un résultat plus précis [War, Th. 5.3.2.15] que nous énoncerons sous la forme suivante.

THÉORÈME A.1. *Soit* (ξ, V) *une représentation unitaire irréductible d'un sous-groupe fermé* H *de* G. *On suppose que* G *est réunion d'une famille au plus dénombrable de* (H, H) *double-classes. Pour* $x \in G$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on note* H^x *le groupe* $H \cap (x^{-1}Hx)$ *et* $\chi^x : H^x \to \mathbb{R}_+^*$ *le caractère de* H^x *défini par*:

$$\forall z \in H^x, \qquad \chi^x(z) = |\det \operatorname{Ad} z_{|\mathfrak{h} + \operatorname{Ad} x^{-1}\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}\mathfrak{h}}|^{-1/2},$$

où $\mathfrak{h} := \operatorname{Lie} H$. *On considère la représentation* S_1^x *de* H^x *dans le complexifié* E_1^x *de* $\mathfrak{g}/(\mathfrak{h} + \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{h}))$ *obtenue par passage au quotient de la représentation adjointe de* H^x *dans* $\mathfrak{g}$, *et* (S_n^x, E_n^x) *le produit tensoriel symétrique d'ordre* n *de la représentation* (S_1^x, E_1^x). *Soit* $I(\xi, x, n)$ *la dimension de l'espace des* H^x*-morphismes continus* $T : V^\infty \hat{\otimes} \bar{V}^\infty \to E_n^x$ *où* H^x *agit sur* E_n^x *par* $z \mapsto \tilde{S}_n^x(z) := \chi^x(z)\, S_n^x(z)$, *et sur le produit tensoriel complété* $V^\infty \hat{\otimes} \bar{V}^\infty$ *de l'espace* V^∞ *des vecteur* C^∞ *de la représentation* (ξ, V) *avec l'espace* $\bar{V}^\infty$ *des vecteurs* C^∞ *de sa représentation conjuguée* $(\bar{\xi}, \bar{V})$, *par* $z \mapsto (\xi \otimes (x^{-1}\bar{\xi}))(z) := \xi(z) \otimes \bar{\xi}(xzx^{-1})$.

On suppose qu'il existe un système de représentants $\mathscr{W}$ *des* (H, H) *double-classes dans* G *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathscr{W}$ *définissant une double-classe* HxH *distincte de* H, *on ait*:

$$I(\xi, x, n) = 0.$$

Alors, la représentation unitairement induite de H *à* G *par* (ξ, V) *est irréductible.*

APPENDICE B

B.1. *Enoncé d'un Théorème d'irréductibilité*

Pour montrer comment les techniques développées au §3 permettent d'appliquer la théorie de Bruhat au cas de paraboliques non minimaux, on démontre ici un résultat d'irréductibilité contenant comme cas particulier un résultat (Théorème B.1(ii)) mentionné dans une lettre de Harish Chandra à van Dijk.

On reprend les notations du §2.1 en supposant que $\sigma = \theta$ de telle sorte que $P = MAN$ est la décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique quelconque de G. Soit $L := P \cap \theta(P) = MA$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ la décomposition correspondante des algèbres de Lie. Comme précédemment $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{l}$ avec $\mathfrak{a}_m$ sous-espace de Cartan de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{l}$ et $\mathfrak{j}$

sous-algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{l}$ donc de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{j}_m := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}$ et, à la décomposition en somme directe $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_m + \mathfrak{a}$, correspond une décomposition $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{j}_m^* + \mathfrak{a}^*$ du dual. Enfin on note $\mathfrak{j}_{m,\mathbb{R}} := (\mathfrak{j}_m \cap \mathfrak{s}) + (i\mathfrak{j}_m \cap \mathfrak{k})$, et λ^I la partie imaginaire sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{j}_{m,\mathbb{R}} + \mathfrak{a}$ d'une forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$. Tout élément de W admet un représentant dans $N_K(\mathfrak{j})$. Nous supposerons désormais que les représentants des éléments de W sont choisis dans $N_K(\mathfrak{j})$. Plus précisément, nous fixerons une famille $\hat{\mathscr{U}}$ de représentants des éléments du complémentaire de W_M dans W.

Théorème B.1. *Soit ν un caractère unitaire de A (identifié à sa différentielle) et (δ, V_δ) une représentation unitaire irréductible du groupe M dont le caractère infinitésimal est défini, via l'homomorphisme de Harish Chandra, par une forme linéaire Λ sur le complexifié de $\mathfrak{j}_m$.*

La représentation unitairement induite de P à G par la représentation unitaire de P, $\delta_\nu : man \mapsto a^\nu \delta(m)$ $(m \in M,\ a \in A,\ n \in N)$, est irréductible dans les deux cas suivants:

(i) *La forme $\nu^I := -i\nu$ appartient au complémentaire dans $\mathfrak{a}^*$ d'une famille finie de sous-espaces affines de $\mathfrak{a}$, distinctes de $\mathfrak{a}$ et dont les directions* $\mathrm{Ker}(\eta \mapsto x\eta_{|\mathfrak{a}} - \eta_{|\mathfrak{a}})$, *$x \in \hat{\mathscr{U}}$, ne dépendent pas de Λ.*

(ii) *La forme Λ est réelle sur $\mathfrak{j}_{m,\mathbb{R}}$ et ν est régulier par rapport aux racines de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{j})$, c'est à dire que:*

$$\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{j}), \qquad (\alpha, \nu) \neq 0.$$

B.2. *Démonstration de Théorème*

Pour démontrer le Théorème B.1, on va appliquer le Théorème A.1 au cas $(\xi, V) = (\delta_\nu, V_\delta)$. Soit $W := N_K(\mathfrak{a}_m)/Z_K(\mathfrak{a}_m)$ (resp. $W_M := N_{K_L}(\mathfrak{a}_m)/Z_{K_L}(\mathfrak{a}_m)$) le groupe de Weyl associé à $\mathfrak{a}_m$. On sait (cf. [War, Prop. 1.2.1.10]) que l'application $x \mapsto PxP$ passe au quotient en une bijection de l'ensemble $W_M \backslash W / W_M$ des (W_M, W_M)-double-classes de W sur l'ensemble $P\backslash G/P$ des (P, P)-double-classes de G. L'ensemble $P\backslash G/P$ est donc fini.

Fixons un élément $x \in N_K(\mathfrak{a}_m)$ et notons $\rho : \mathfrak{a}_m \to \mathbb{R}$ la forme linéaire $X \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \operatorname{ad} X_{|\mathfrak{n}}$. On peut, sans changer de (P, P)-double classe, choisir $x \in N_K(\mathfrak{j})$, ce que nous ferons désormais. Comme au §2.1, l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}^x := \mathfrak{p} \cap (\operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{p}))$ du groupe $P^x := P \cap (x^{-1}Px)$ est somme de sous-espaces de poids λ de $\mathfrak{a}_m$ dans $\mathfrak{g}$ classés suivant le signe ou la nullité des nombres (λ, ρ) et $(\lambda, x^{-1}\rho)$. On en déduit une décomposition

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^x &= (\mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{l})) + (\operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{n}) + (\mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n})) + (\mathfrak{n} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n})), \\ &= \mathfrak{l}^x + \mathfrak{n}^x, \end{aligned}$$

où l'algèbre $\mathfrak{l}^x := \mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{l})$ est θ-stable, donc réductive dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}^x := (\mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n})) + (\operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{l}) \cap \mathfrak{n}) + (\mathfrak{n} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n}))$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{p}^x$ qui agit de manière nilpotente dans $\mathfrak{g}$ (démonstration analogue à celle du Lemme 8(*iii*)). De même si on définit:

$$\tilde{\mathfrak{n}}^x := \mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n}),$$

l'algèbre:

$$\tilde{\mathfrak{p}}^x := \mathfrak{l}^x + \tilde{\mathfrak{n}}^x,$$

est une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{l}$.

L'espace

$$\mathfrak{l} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\bar{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\bar{\mathfrak{n}}) + \bar{\mathfrak{n}} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{l}) + \bar{\mathfrak{n}} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{n})$$

étant un supplémentaire $\mathfrak{j}$-invariant de $\mathfrak{p} \cap \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{p})$ dans $\mathfrak{p} + \operatorname{Ad} x^{-1}(\mathfrak{p})$, la différentielle $\mu := d\chi^x$ de χ^x vérifie

$$\forall X \in \mathfrak{j}, \qquad \mu(X) = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha} n_\alpha \alpha$$

où $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \Delta(\mathfrak{p}, \mathfrak{j})$.

Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $I(\delta_v, x, n) \neq 0$, il existe un P^x-morphisme non nul de $V_\delta^\infty \hat{\otimes} \bar{V}_\delta^\infty$ dans E_n^x munis des représentations $\delta_v \otimes x^{-1} \bar{\delta}_v$ et $\tilde{S}_n^x$ respectivement (cf. Th. A.1 pour les notations). Il existe donc un sous-quotient P^x-irréductible F_n^x de E_n^x et un P^x-morphisme non nul de $V_\delta^\infty \hat{\otimes} \bar{V}_\delta^\infty$ dans F_n^x. La donnée d'un tel morphisme équivaut à la donnée d'une forme trilinéaire séparément continue et P^x-invariante sur $V_\delta^\infty \times \bar{V}_\delta^\infty \times (F_n^x)'$ pour les actions évidentes, et donc d'un P^x-morphisme continu non nul $T\colon V_\delta^\infty \to (\bar{V}_\delta^\infty)' \otimes F_n^x$. En effet, V_δ^∞ est un espace de Montel, donc réflexif, et dans ce cas, toute application à valeurs dans $(\bar{V}_\delta^\infty \otimes (F_n^x)')' \simeq (\bar{V}_\delta^\infty)' \otimes F_n^x$, qui est continue pour la topologie faible de $(\bar{V}_\delta^\infty)'$ est, après bitransposition, continue pour la topologie forte de $(\bar{V}_\delta^\infty)'$ (cf. [Boul, Ch. 4, §4, No. 2, Prop. 6]).

Comme la représentation $(x^{-1}\bar{\delta}_v, \bar{V}_\delta)$ est déjà la contragrédiente de la représentation unitaire $(x^{-1}\delta_v, V_\delta)$, l'espace $\bar{V}_\delta^{-\infty} := (\bar{V}_\delta^\infty)'$ des vecteurs distributions de cette représentation contient l'espace initial V_δ comme sous-espace. Le sous-espace $(V_\delta)_{(K_L)}$ des vecteurs K_L-finis de V_δ est contenu dans V_δ^∞ et dense dans celui-ci. La restriction à $(V_\delta)_{(K_L)}$ de T est donc non nulle.

L'action sur E_n^x de l'idéal nilpotent $\mathfrak{n}^x$ de $\mathfrak{p}^x$ est nilpotente, car obtenue par restriction, passage au quotient ou tensorisation à partir de l'action adjointe de $\mathfrak{n}^x$ dans $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{n}^x$ agit donc de manière triviale sur F_n^x.

L'action de tout $X \in \mathfrak{n}^x$ sur $\bar{V}_\delta^{-\infty} \otimes F_n^x$ est donc définie par l'opérateur $x^{-1}\bar{\delta}_\nu^{-\infty}(X) \otimes I$. On aura donc, pour tout $v \in (V_\delta)_{(K_L)}$ et tout $X \in \tilde{\mathfrak{n}}^x$:

$$\begin{aligned} T(\delta_\nu(X)\,v) &= (x^{-1}\bar{\delta}_\nu^{-\infty}(X) \otimes I)\; T(v), \\ &= (\delta_\nu(\mathrm{Ad}\,x(X)) \otimes I)\; T(v), \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\mathrm{Ad}\,x(X) \in \mathfrak{n}$ qui agit trivialement sur $\bar{V}_\delta^{-\infty}$.

Si $K^x := L^x \cap K$, l'opérateur T passe donc au quotient en un $(\mathfrak{l}^x, K^x)$-morphisme non nul $\hat{T}$ de $V := (V_\delta)_{(K_L)}/(\delta_\nu(\tilde{\mathfrak{n}}^x)(V_\delta)_{(K_L)})$ dans $\bar{V}_\delta^{-\infty} \otimes F_n^x$. Or V est $(\mathfrak{l}^x, K^x)$-module de Harish Chandra (cf. [HS, Prop. 2.24]) qui est somme finie de modules possédant un caractère infinitésimal généralisé. Plus précisément, ces caractères infinitésimaux sont définis, via l'homomorphisme de Harish Chandra, par les formes linéaires $z(\Lambda + \nu) + \tilde{\rho}^x$ ($z \in W_M$) où $\tilde{\rho}^x(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\, X_{|\tilde{\mathfrak{n}}^x}$ pour $X \in \mathfrak{j}$ (cf. [HS, Cor. 3.32]). L'existence du morphisme non nul $\hat{T}$ implique donc qu'il existe un poids commun aux deux représentations de l'algèbre $\mathrm{Ad}\,x^{-1}(\mathfrak{a})$, qui est centrale dans $\mathfrak{l}^x$, dans $(V_\delta)_{(K_L)}$ et $\bar{V}_\delta^{-\infty} \otimes F_n^x$ respectivement. Compte tenu de la remarque faite sur les poids de $\mathfrak{j}$ sous la représentation S_1^x, il existe donc un élément z de W_M et une forme linéaire μ' dans le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\frac{1}{2}\,\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, tels que:

$$(z(\Lambda + \nu))_{|\mathrm{Ad}\,x^{-1}(\mathfrak{a})} = (x^{-1}\nu + \mu')_{|\mathrm{Ad}\,x^{-1}(\mathfrak{a})}.$$

Par extraction de la partie imaginaire sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$, on en déduit que:

$$(xz(\Lambda' + \nu'))_{|\mathfrak{a}} = \nu'_{|\mathfrak{a}},$$

soit encore, puisque $z \in W_M$ stabilise ν:

$$(x\nu')_{|\mathfrak{a}} - \nu'_{|\mathfrak{a}} = -(xz\Lambda')_{|\mathfrak{a}}.$$

Montrons que si $x \notin Z_K(\mathfrak{a})$, l'endomorphisme $\eta \mapsto (x\eta - \eta)_{|\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}^*$ est non identiquement nul. Dans le cas contraire, on aurait

$$\forall \eta \in \mathfrak{a}^*, \qquad (x\eta)_{|\mathfrak{a}} = \eta,$$

et, pour des raisons de longueur:

$$\forall \eta \in \mathfrak{a}^*, \qquad x\eta = \eta.$$

Cela signifie que $x \in Z_K(\mathfrak{a})$, ce qui contredit notre hypothèse. Par suite, les solutions η de l'équation:

$$(x\eta)_{|\mathfrak{a}} - \eta_{|\mathfrak{a}} = -(xz\Lambda')_{|\mathfrak{a}},$$

forment une sous-variété affine $H_{x,z}$ de $\mathfrak{a}^*$ distincte de $\mathfrak{a}^*$. On peut remarquer en outre que cette variété ne dépend que des classes de x et z dans W et W_M respectivement. Si v' n'appartient à aucune variété $H_{x,z}$, $z \in W_M$, on a $I(\delta_v, x, n) = 0$. D'où, par application du Théorème A.1, l'assertion (i) du Théorème B.2.

Pour démontrer (ii), remarquons que, sous les hypothèses faites dans ce cas, $H_{x,z} = \{\eta \in \mathfrak{a}^* \mid x\eta = \eta\}$. La condition nécessaire pour la réductibilité trouvée précédemment implique donc que v' appartient à $H_{x,z}$ et donc que x stabilise v'. Il appartient donc au sous-groupe de W engendré par les réflexions associées à des racines $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ telles que $(\alpha, v') = 0$. Comme $v = iv'$ est régulier par rapport aux racines de $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{j})$, cela signifie que $x \in W_M$. Une contradiction qui achève de prouver (ii). ∎

Appendice C

C.1. *Rappel d'un résultat de J. Bernstein*

Soit G un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé de G tels que $X := G/H$ admette une mesure G-invariante dx. On fait agir unitairement G par translation à gauche sur l'espace $L^2(X, dx)$ des fonctions de carré sommable sur X.

Selon Bernstein (cf. [Be, §3.1]), un poids continu sur X est une fonction continue w sur X, strictement positive sur X et telle que, pour tout voisinage symétrique relativement compact B de l'élément neutre de G, il existe une constante $C = C(B, w)$ telle que, pour tout g dans B et tout x dans X, $w(gx) \leqslant Cw(x)$.

Un sous-ensemble N de X est appelé maillage ("net" dans [Be, §3.2]) s'il existe un voisinage symétrique relativement compact B de l'élément neutre de G tel que $BN = X$.

On dit que le poids continu w est sommable si, pour un maillage dénombrable N de X, il satisfait $\sum_{n \in N} (w(n))^{-1} < +\infty$.

Soit (π, V) une représentation unitaire de G et τ un vecteur distribution de (π, V), i.e., une forme linéaire continue sur l'espace V^∞ des vecteurs C^∞ de (π, V). Si τ est H-invariant, on lui associe un entrelacement continu de G-modules $\beta\colon V^\infty \to C^\infty(X)$ par:

$$\forall v \in V^\infty, \qquad \forall g \in G, \quad (\beta(v))(gH) = \langle \tau, \pi(g^{-1})\, v \rangle.$$

Remarquons que la donnée d'un tel β équivaut à celle de τ puisque $\langle \tau, v \rangle = (\beta(v))(eH)$.

On dit que τ (resp. β) est un vectuer distribution (resp. une forme) w-tempérée (S_w-temperée dans [Be, §3.5]) si et seulement si (cf. [Be, §3.1]) $\beta(V^{\infty}) \subseteq L^2(X, w^{-1}\,dx)$.

Supposons en outre G de type I, et écrivons

$$L^2(X) \simeq \int_{\hat{G}}^{\otimes} H_\pi \, d\mu(\pi),$$

où H_π est un multiple de (π, V_π). Le résultat principal de [Be] (cf. §3.2) permet alors d'affirmer que:

Pour μ-presque tout $\pi \in \hat{G}$, (π, V_π) admet un vecteur distribution (resp. une forme) H-invariant(e) w-tempéré(e) non nul(le).

C.2. *Application aux espaces symétriques*

On reprend, pour G et H, les hypothèses du corps de l'article (sans toutefois exiger la condition (1.2.2)). Notons σ_G la fonction classiquement notée σ, et définie sur G par $\sigma(k \exp(Y)) = \|Y\|$, si $k \in K$ et $Y \in \mathfrak{s}$. On définit une fonction σ_X sur X par $\sigma_X(gH) = \sigma_G(g\sigma(g^{-1}))$. Il est alors aisé de voir, grâce aux propriétés de σ (cf. [GV, Prop. 4.6.11(iv)]) que $w := (1 + \sigma_X)$ est un poids continu sur X.

Soit Z un sous-groupe fermé discret cocompact de $\mathfrak{a}_\emptyset$, i.e., un réseau au sens ordinaire de $\mathfrak{a}_\emptyset$. De la décomposition $G = KA_\emptyset H$, on déduit immédiatement que $\{gH \mid g \in \exp(Z)\}$ est un maillage dans X. Il est alors facile de voir que $(1 + \sigma_X)^d$ est un poids sommable sur X dès que $d > \dim \mathfrak{a}_\emptyset$. Posons $w_d = (1 + \sigma_X)^d$.

Etant donné une représentation unitaire (π, V) de G, on dira donc qu'un vecteur distribution H-invariant τ est H-tempéré, si la forme associée β vérifie $\beta(V^{\infty}) \subseteq L^2(X, w_d^{-1}\,dx)$ pour un réel $d > 0$ (cf. [Be, §3.5]).

Dans [De, §4.2], le deuxième auteur propose une autre définition (moins invariante, du moins à première vue) de vecteur distribution H-tempéré. Nous alons la rappeler afin de la comparer avec celle du paragraphe précédent. On note $\Delta_{\sigma\theta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ formée des éléments $\sigma\theta$-invariants de $\mathfrak{g}$. On se fixe une fois pour toutes un ensemble, noté en abrégé $\Delta_{\sigma\theta}^+$, de $\Delta_{\sigma\theta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$. On note $\mathscr{F}$ la famille des ensembles de racines positive de $\Delta_{\sigma\theta}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ contenant $\Delta_{\sigma\theta}^+$. Si $\mathscr{P}$ est un élément de $\mathscr{F}$, on note:

$$\mathfrak{a}_\emptyset^-(\mathscr{P}) = \{Y \in \mathfrak{a}_\emptyset \mid \forall \alpha \in \mathscr{P}, \alpha(Y) < 0\},$$

$$\mathscr{L}^+(\mathscr{P}) = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}_\emptyset^* \mid \exists n_i \in \mathbb{N}, \exists \alpha_i \in \mathscr{P}, \lambda = \sum_i n_i \alpha_i\right\},$$

$$\rho_{\mathscr{P}} = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathscr{P}} (\dim \mathfrak{g}^\alpha)\, \alpha.$$

Soit I un idéal de codimension finie de $Z(\mathfrak{g})$, Alors, il existe un sous-ensemble fini $X(I)$ de $(\mathfrak{a}_\emptyset^*)_{\mathbb{C}}$ possédant la propriété suivante:

Pour toute fonction C^∞ et K-finie F sur X, annulée par I, il existe des fonctions $(k, Y) \mapsto P_{\lambda, \mathscr{P}}(k, Y, F)$, où λ décrit $X(I) + \mathscr{L}^+(\mathscr{P})$, vérifiant:

$$\forall k \in K, \qquad \forall Y \in \mathfrak{a}_\emptyset^-(\mathscr{P}),$$

$$F(k \exp(Y)) = \sum_{\lambda \in X(I) + \mathscr{L}^+(\mathscr{P})} P_{\lambda, \mathscr{P}}(k, Y, F)\, e^{(\lambda + \rho_{\mathscr{P}})(Y)}.$$

Considérons alors une représentation unitaire irréductible (π, V) de G et un vecteur distribution H-invariant τ. Si $V_{(K)}$ est le sous-espace des vecteurs K-finis, il est évident que $\beta(V_{(K)})$ est annulé par le noyau I du caractère infinitésimal de π. On dit que τ est faiblement H-tempéré si, pour tout $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, tout $v \in V_{(K)}$, tout $\lambda \in X(I) + \mathscr{L}^+(\mathscr{P})$, on a $P_{\lambda, \mathscr{P}}(k, Y, \beta(v)) \equiv 0$ s'il existe $Y \in \mathfrak{a}_\emptyset^-(\mathscr{P})$ vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda(Y)) > 0$.

PROPOSITION C.1. *Si τ est H-tempéré, il est faiblement H-tempéré.*

On utilise à cette fin un Corollaire d'une Proposition de [CMi, Prop. A.2.1(iii)].

LEMME C.1. *Soit $\Phi_{s,m}$, $s \in \mathbb{C}$, $m \in I \subseteq \mathbb{Z}^+$, une famille finie de fonctions C^∞ sur $[0, 1[$ telles que $\Phi_{s,m}(0) \neq 0$. Posons, pour $x \in]0, 1[$, $\Phi(x) = \sum_{s,m} \Phi_{s,m}(x)\, x^s \log^m(x)$. Soit $\eta \in]0, 1[$. S'il existe $q > 0$ tel que $(1 + |\log x|)^{-q}\, \Phi \in L^2(]0, \eta], dx/x)$, on a $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ pour tout s.*

Démonstration. Si $\varepsilon > 0$, on a $x^\varepsilon \Phi \in L^2(]0, \eta], dx/x)$, car $x^\varepsilon \leqslant C(1 + |\log x|)^{-q}$ sur $]0, \eta[$. Alors, grâce à [CMi, Prop. A.1.2(iii)], on a $\operatorname{Re}(s + \varepsilon) > 0$ pour tout s et tout $\varepsilon > 0$. D'où le Lemme. ∎

Démonstration de la Proposition. La démonstration est similaire à celle du Théorème 6.4 de [B1] (voir aussi [CMi, Th. 7.5]) où il est montré que si l'on impose aux $P_{\lambda, \mathscr{P}}(k, Y, F)$ d'être nuls si il existe un élément $Y \in \mathfrak{a}_\emptyset^-(\mathscr{P})$ vérifiant $\operatorname{Re}(\lambda(Y)) \geqslant 0$, on a $F \in L^2(X, dx)$. On remplace seulement l'utilisation de la Prop. A.1.2(iii) de [CMi] par le Lemme ci-dessus.

Le résultat de Bernstein joint à la Proposition C.1 et au Théorème 2 de [De] montrent alors:

PROPOSITION C.2. *Soit μ la (classe de la) mesure de Plancherel de G/H. Pour μ-presque tout (π, V_π) dans $\hat{G}$, V_π est une sous-représentation d'une représentation unitairement induite à partir d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G. De plus, si $P = MAN$ est la σ-décomposition de Langlands de ce sous-groupe parabolique, on peut choisir l'induisante de la forme $man \mapsto a^\nu \delta(m)$ où $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ et δ une série discrète de $M/M \cap H$.*

Remarque C.1. Le deuxième auteur s'excuse pour les incorrections qui émaillent l'article [De], en particulier le Lemme 2. Celles ci ne remettent pas en cause l'énoncé du Théorème que nous utilisons ici. Il compte revenir sur ces incorrections dans un prochain article.

REFERENCES

[B1] E. VAN DEN BAN, Asymptotic behavior of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **90** (1987), 225–249.

[B2] E. VAN DEN BAN, Invariant differential operators for a reductive symmetric space and finite multiplicities, *Ark. Mat.* **25** (1987), 175–187.

[B3] E. VAN DEN BAN, The principal series for a reductive symmetric space, I, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21** (1988), 359–412.

[B4] E. VAN DEN BAN, The principal series for a reductive symmetric space, II, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.

[BD] E. VAN DEN BAN ET P. DELORME, Quelques propriétés des représentations sphériques pour les espaces symétriques réductifs, *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 284–307.

[Be] J. N. BERNSTEIN, On the support of the Plancherel measure, *J. Geom. Phys.* **5**, No. 4 (1988), 663–710.

[Bou1] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, *in* "Eléments de Mathématiques XVIII," Chaps. 3, 5, Hermann, Paris, 1967.

[Bou2] N. BOURBAKI, Variétés différentiables et analytiques, *in* "Fascicule de resultats, 1 à 7," Eléments de Mathématiques XXXIII, Hermann, Paris, 1967.

[BrD] J. L. BRYLINSKI ET P. DELORME, Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein, *Invent. Math.* **109** (1992), 619–664.

[Bru] F. BRUHAT, Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **54** (1956), 97–205.

[C] W. CASSELMAN, Canonical extensions of Harish Chandra modules to representations of G, *Canad. J. Math.* **41**, No. 3 (1989), 385–438.

[CMi] W. CASSELMAN ET D. MILICIC, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* **49** (1982), 869–930.

[De] P. DELORME, Injection de modules sphériques pour les espaces symétriques réductifs dans certains représentations induites, *in* "Lecture Notes in Math.," Vol. 1243, pp. 108–144, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1987.

[Di] J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier–Villars, Paris, 1974

[GV] R. GANGOLLI ET V. S. VARADARAJAN, Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups, *in* "Ergeb. Math. Grenzgeb.," Vol. 101, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1988.

[HS] H. HECHT ET W. SCHMID, Characters, asymptotics and $\mathfrak{n}$-homology of Harish Chandra modules, *Acta. Math.* **151** (1983), 49–151.

[Ko] B. KOSTANT, On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representations, *J. Funct. Anal.* **20** (1975), 257–285.

[Kn] A. KNAPP, "Representation Theory of Semisimple Groups," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.

[KSt] A. KNAPP ET E. STEIN, Intertwining operators for semisimple groups, II, *Invent. Math.* **60** (1980), 9–84.

[M] T. MATSUKI, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 331–387.

[Ol] G. OLAFSSON, Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space, *Invent. Math.* **90** (1987), 1–51.

[Schw] L. SCHWARTZ, "Théorie des Distributions," Hermann, Paris, 1966.

[R] W. ROSSMANN, The structure of semisimple symmetric spaces, *Canad. J. Math.* **31** (1979), 157–180.

[Vo] D. VOGAN, "Representations of Reductive Lie Groups," Birkhäuser, Boston, 1981.

[VW] D. VOGAN ET N. WALLACH, Intertwining operators for real reductive groups, *Adv. in Math.* **82** (1990), 203–243.

[W] N. WALLACH, "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces," Dekker, New York, 1973.

[War] G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, I," Springer-Verlag, New York, 1972.