Annals of Mathematics, **147** (1998), 417–452

Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs

Par Patrick Delorme

Introduction

Il nous semble utile de donner le plan d'ensemble de notre démonstration de la formule de Plancherel et de la situer par rapport à d'autres travaux.

Nous avons d'abord, en collaboration avec J. L. Brylinski [BD] (grâce aux D-modules) puis avec J. Carmona [CD1] (grâce aux foncteurs de translation et à la thèse de Bruhat), établi le prolongement méromorphe des intégrales d'Eisenstein. Dans le cas des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux, ces résultats sont dus à G. Olafsson [Ol] et E. van den Ban [B1], [B2]. Il faut aussi mentionner le travail de T. Oshima et J. Sekiguchi [OS] sur les espaces de type G/K_ε.

L'étape suivante a été la preuve de la tempérance et de majorations, sur l'axe imaginaire pur, du prolongement méromorphe des intégrales d'Eisenstein [D1] (cf. [B2] pour le cas des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux). Pour la tempérance, l'utilisation de la théorie des séries discrètes de T. Oshima et T. Matsuki [OM], initiée par M. Flensted-Jensen et basée sur l'importante dualité introduite par celui-ci [FJ], joue un role déterminant. Il en va de même d'un critère de tempérance de T. Oshima [O] et de l'utilisation des foncteurs de translation dans différentes situations (voir [V]). Les majorations sont déduites de la tempérance en utilisant une technique d'E. van den Ban [B2], qui s'adapte facilement à notre situation.

Dans [BCD], en collaboration avec E. van den Ban et J. Carmona, nous avons introduit la notion de fonction II'_{hol} (pour rappeler une terminologie de Harish-Chandra), formé les paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz et obtenu un critère pour qu'une fonction soit II'_{hol}. Les intégrales d'Eisenstein, multipliées par un polynôme convenable, sont des fonctions II'_{hol}. Cette partie est très proche d'une partie du travail [H-C1] de Harish-Chandra pour le cas des groupes. Ce développement a été rendu possible par la théorie du terme constant de J. Carmona [C].

Parvenu à ce point, outre l'utilisation cruciale du travail [Be] de J. Bernstein sur le support de la mesure de Plancherel (cf. [CD1], Appendice C et [CD2], paragraphe 9), c'est la troncature ou plus précisément l'évaluation asymptotique de produits scalaires tronqués (cf. [D2, théorème 1] et le présent article, Proposition 1) qui est la clef de la fin de notre preuve de la formule de Plancherel.

Ces évaluation asymptotiques ont été obtenues dans le cadre des fonctions II'_{hol} et largement influencées par le travail d'Arthur [A]. Elles ont fourni les résultats essentiels suivants:

(1) D'abord, les relations de Maass-Selberg ([D2, théorème 2]), qui impliquent l'holomorphie au voisinage de l'axe imaginaire pur des intégrales d'Eisenstein normalisées. Cette holomorphie est prouvée dans le travail avec J. Carmona ([CD2, théorème 2]) où l'on définit du même coup la transformation de Fourier normalisée, $\mathcal{F}^0$, sur l'espace de Schwartz des fonctions τ-sphériques ou K-finies. Dans ce même travail, les fonctions C sont introduites ainsi qu'un candidat, $\mathcal{I}^0$, à être l'inverse de la transformation de Fourier. Cela généralise, par des méthodes différentes, certains résultats d'E. van den Ban [B1], [B2], ainsi que d'E. van den Ban et H. Schlichtkrull [BS2] pour le cas des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux.

(2) Ensuite, la détermination de la transformée de Fourier normalisée des paquets d'ondes ([D2, théorème 4]). Il en résulte que $\mathcal{I}^0\mathcal{F}^0$ est un projecteur orthogonal, noté $\mathbb{P}$ dans cette introduction, qu'il s'agisse de fonctions τ-sphériques ou K-finies. De plus $\mathcal{F}^0\mathcal{I}^0$ est égal à l'identité (voir le Théorème 6 de l'article [CD2] avec J. Carmona). On rapprochera ces résultats de ceux d' E. van den Ban et H. Schlichtkrull [BS2], bien que là encore nos méthodes soient très différentes.

(3) Enfin une formule pour le produit scalaire (i.e. l'intégrale du produit) d'un paquet d'ondes avec une fonction tempérée $\mathbb{D}(G/H)$-finie τ-sphérique (Proposition 3 du présent article). Ici $\mathbb{D}(G/H)$ désigne l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par les translations à gauche par les éléments de G.

C'est ce dernier point qui permet d'achever la démonstration de la formule de Plancherel, c'est à dire de montrer que $\mathbb{P}$ est égal à l'identité. En effet avec J. Carmona dans [CD2, §9], nous avons établi un critère pour que $\mathbb{P}$ soit l'identité. Il repose sur le fait que toute fonction de carré intégrable sur G/H se désintègre en fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-finies tempérées (cf. l'appendice C.2 de [CD1], qui est comme on l'a déjà dit, une conséquence du travail de J. Bernstein). Ce critère nous dit essentiellement que $\mathbb{P}$ est l'identité si et seulement si toute fonction tempérée $\mathbb{D}(G/H)$-finie τ-sphérique orthogonale à l'image de $\mathbb{P}$ est nulle. Mais l'image de $\mathbb{P}$ est engendrée par des paquets d'ondes et la formule ci-dessus permet d'exprimer l'orthogonalité à l'image de $\mathbb{P}$. On conclut facilement que $\mathbb{P}$ est égal à l'identité. C'est notre première version de la formule de Plancherel (Théorème 1).

Les résultats sont ensuites explicités pour les fonctions τ-sphériques puis les fonctions K-finies: formule d'inversion de Fourier, image de l'espace de Schwartz correspondant (Théorèmes 2 et 3). Grâce à une étude des vecteurs distributions tempérés, menée à bien grâce au théorème de continuité automatique de W. Casselman et N. Wallach (voir [Cass1] ou [W]), on montre que le prolongement de la transformation de Fourier à l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G/H)$ est un morphisme de G-modules. On écrit aussi la formule d'inversion de Fourier pour les éléments de $\mathcal{C}(G/H)$ (Théorème 3).

Nous reformulons nos résultats en fonction des intégrales d'Eisenstein et des vecteurs distributions non normalisés. Des "facteurs de Plancherel", liés aux intégrales d'entrelacement, apparaisent. Nous montrons, au §3.5, comment leur calcul se réduit à la détermination d'une injection de chacune des séries discrètes dans une série principale.

Dans le cas des groupes, c'est à dire $G = G_1 \times G_1$ et σ est la permutation des facteurs, c'est de cette manière qu'est effectué le calcul des facteurs de Plancherel par A. Knapp et G. Zuckerman dans [KZ] à l'aide des noyaux de Szegö [KW], ce calcul étant originellement du à Harish-Chandra [H-C2]. Par ailleurs nos intégrales d'Eisenstein se comparent à celles de Harish-Chandra grâce aux intégrales d'entrelacement. Spécifié au cas des groupes, notre travail donne alors une autre démonstration de sa formule de Plancherel (mis à part le calcul des facteurs de Plancherel).

Dans le cas de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, la formule de Plancherel est due à Pascale Harinck [H2], Théorème 7.4. En utilisant le travail de H. Schlichtkrull [S] sur les paramètres de Langlands des séries discrètes et le comportement de celles-ci par les foncteurs de translation [V], on peut calculer les facteurs de Plancherel, car les séries discrètes sont des séries principales (Proposition 5). Ainsi on obtient une formule très similaire à celle de P. Harinck.

Le présent travail a été élaboré au cours de l'automne 1995. A la même période, E. van den Ban et H. Schlichtkrull ont établi le théorème de Paley-Wiener pour les espaces symétriques réductifs. Leur preuve, jointe à notre résultat avec J. Carmona sur l'holomorphie des intégrales d'Eisenstein normalisées (cf. (1) ci-dessus) implique également la formule de Plancherel.

Enfin, en réponse à l'annonce de notre résultat, T. Oshima nous a informé qu'il disposait d'une preuve depuis 1984.

Mentionnons qu'en 1989 nous avons bénéficié de conférences de W. Casselman sur la troncature pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (cf. [Cass2]) et pour les espaces riemanniens symétriques. Bien que le point de vue d'Arthur ait finalement prévalu, ces conférences ont eu une influence importante sur notre travail. Nous tenons aussi à remercier W. Casselman d'avoir porté à notre connaissance, à la même époque, le travail de J. Bernstein sur le support de la mesure

de Plancherel. C'est notre conviction que ce travail allait rendre la formule de Plancherel facile, ou du moins possible, à établir qui a été notre motivation initiale. Cette conviction se voit aujourd'hui confirmée.

0. Notations. Choix des mesures

Si E est un espace vectoriel, on note Id_E l'application identique de E, E^* son dual. S'il est réel $E_{\mathbb{C}}$ désigne son complexifié et $S(E)$ l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$. Le symbole $'$ indiquera soit le dual topologique d'un espace vectoriel topologique soit l'application transposée d'une application linéaire continue.

Si S est un groupe de Lie réel, S^0 désigne sa composante neutre, e ou e_S son élément neutre, $Z(S)$ son centre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ le centre de $\mathfrak{s}$, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$, $Z(\mathfrak{s})$ le centre de $U(\mathfrak{s})$, $\hat{S}$ son dual unitaire.

Soient G un groupe réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ. Soit $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous espace propre de la différentielle de θ (resp. σ) notée encore de même, pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note L_P ou L son sous-groupe de Levi stable par σ et θ, i.e. $L_P = P \cap \theta(P)$, dite composante de Levi, N_P son radical unipotent et $P = M_P A_P N_P$ sa σ-décomposition de Langlands. En particulier on note $G = M_G A_G$ la σ-décomposition de Langlands de G. Ici A_G est le sous-groupe de la composante déployée de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a) = a^{-1}$. On l'appelle composante σ-déployée de G. Clairement, si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, $(L_P, \sigma_{|L_P}, \theta_{|L_P}, H \cap L_P)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H), et de même en remplaçant L_P par M_P. Toutes les notations introduites pour (G, σ, θ, H) sont étendues aux quadruplets vérifiant les mêmes hypothèses.

On dispose d'une application H_G de G/H dans $\mathfrak{a}_G$ qui, à gH, associe $\log a \in \mathfrak{a}_G$ où $g = ma$ avec $m \in M_G$, $a \in A_G$. Notez que H est contenu dans M_G. De plus, on a:

(0.1) $(M_G/H) \times \mathfrak{a}_G$ *est difféomorphe à* G/H *par l'application* $(x, X) \mapsto (\exp X)x$.

On se fixe dans toute la suite de l'article un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}_\emptyset$. On note $L_\emptyset$ le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_\emptyset$. C'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal. Il admet pour σ-décomposition de Langlands $L_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset$ où $A_\emptyset = \exp \mathfrak{a}_\emptyset$. On a $G = KL_\emptyset H$.

Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $L_\emptyset$. Alors $L_\emptyset$ est contenu dans L $(= L_P)$ et A_L est contenu dans $A_\emptyset$. On note Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$. On peut aisément définir l'ensemble des racines réduites, Σ_P^r, ainsi que l'ensemble Δ_P des racines simples de Σ_P. On note $\mathfrak{a}_P^+ = \{X \in \mathfrak{a}_P \mid \alpha(X) > 0,\ \alpha \in \Delta_P\}$. Si Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G contenant P, on note Δ_P^Q l'ensemble des éléments de Δ_P qui sont des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_P^Q$ du radical unipotent du sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable $P \cap M_Q$ de M_Q.

On appelle σ-sous-groupe de Levi de G, toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $L_\emptyset$. Si L est un σ-sous-groupe de Levi de G, on note $\mathcal{L}(L)$ l'ensemble des σ-sous-groupes de Levi de G contenant L, $\mathcal{P}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi est égale à L, $\mathcal{F}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi contient L. Si $L = L_\emptyset$, on notera $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}(L_\emptyset)$, etc.

On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans K par son centralisateur. Soit $W_\emptyset^H$ (resp. $W_\emptyset^M$) l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ admettant un représentant dans l'intersection de H (resp. M) avec $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On fixe dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ un ensemble $\mathcal{W}_M$ (noté aussi $\mathcal{W}_L$) de représentants des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-double-classes. C'est, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G de sous-groupe de Lévi L, un ensemble de représentants des (H, Q)-doubles classes ouvertes de G.

On se fixe dans toute la suite de l'article un ensemble de racines positives, $\Sigma_{\sigma\theta}$, du système de racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$, formée des points fixes de $\sigma\theta$. On note $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ (st pour standard) le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé des $P \in \mathcal{P}$ tels que l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de P contienne $\Sigma_{\sigma\theta}$. Pour $L \in \mathcal{L}$, on note $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(L)$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(L)$) l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}(L)$ (resp. $\mathcal{F}(L)$) contenant un élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$. On ajoutera L en indice supérieur dans tout ce qui précède, si on remplace G par un élément L de $\mathcal{L}(L_\emptyset)$. Tous les ensembles ci-dessus sont finis, mais contrairement au cas des groupes, $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$ n'est pas nécessairement réduit à un élément. Si P est un élément de $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note $\mathcal{W}_P$ un ensemble, contenant e, de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de l'ensemble des éléments w de $W_\emptyset / W_\emptyset^{M_P}$ tel que wPw^{-1} soit standard.

On dit que deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, P et Q, sont σ-associés si $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_Q$ sont conjugués par un élément de K. On choisit un ensemble $\mathbb{F}$ de représentants des classes de σ-association de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, qui est contenu dans $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$. Un tel choix est possible (cf. [CD2, lemme 8]). Si P est un élément de $\mathbb{F}$, on choisit $\mathcal{W}_{M_P}$ égal à $\mathcal{W}_P$.

On se fixe une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$, $\operatorname{Ad} G$-invariante telle que la forme quadratique sur $\mathfrak{g}$, $X \mapsto \| X \|^2 := -B(X, \theta X)$, soit définie positive. On suppose en outre que B est invariante par σ et θ, coincide avec la forme de Killing sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est orthogonal à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Si $L \in \mathcal{L}$, on notera $\mathfrak{a}_L^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_L$ pour B. Si $P \in \mathcal{P}(L)$, on note δ_P la fonction sur $L/L\cap H$ définie par:

$$\delta_P(l) = e^{2\rho_P(H_L(l))},\ l \in L/L\cap H, \tag{0.2}$$

où $\rho_P \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$, comptées avec leurs multiplicités.

La forme B détermine un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_L$, $L \in \mathcal{L}$, ce qui détermine une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_L$. On munira $i\mathfrak{a}_L^*$ de la mesure duale. Précisons cette notion. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et dX une mesure de Haar sur E. Pour f élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(E)$, on définit sa transformée de Fourier relativement à dX, $\hat{f} \in \mathcal{S}(iE^*)$, où E^* est le dual de E, par: $\hat{f}(\lambda) = \int_E f(X)e^{-\langle\lambda,X\rangle}\,dX$, $\lambda \in iE^*$. On identifie $i(iE^*)^*$ à E en posant $\langle\langle X,\lambda\rangle\rangle = -\langle\lambda, X\rangle$, pour $X \in E$, $\lambda \in iE^*$ (car $i^2 = -1$). La mesure duale de dX est la mesure de Haar sur iE^*, $d\lambda$, telle que notant encore $\hat{}$ la transformée de Fourier relativement à $d\lambda$, de $\mathcal{S}(iE^*)$ dans $\mathcal{S}(E)$, on ait $(\hat{f})\hat{} = f$ pour $f \in \mathcal{S}(E)$. La transformée de Fourier s'étend naturellement aux distributions.

L'espace symétrique $M_\emptyset/M_\emptyset\cap H$ est compact et on le munit d'une mesure $M_\emptyset$-invariante de masse totale 1. Utilisant l'isomorphisme (0.1), en y remplaçant G par $L_\emptyset$ et notre choix de mesure sur $\mathfrak{a}_\emptyset$, on en déduit un choix de mesure invariante par $L_\emptyset$ sur $L_\emptyset/L_\emptyset\cap H$.

On note $H_\emptyset$ au lieu de $H_{L_\emptyset}$. Si $P_0 \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}$, on note:

$$(L_\emptyset/L_\emptyset\cap H)^+_{P_0} = \{l \in L_\emptyset \mid \alpha(H_\emptyset(l)) \geq 0,\ \alpha \in \Delta_{P_0}\}. \tag{0.3}$$

Si $\alpha \in \Sigma_{P_0}$, on note p_α sa multiplicité dans $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ et q_α sa multiplicité dans $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$. On définit une fonction D_{P_0} sur $L_\emptyset/L_\emptyset\cap H$ par:

$$D_{P_0}(l) = \prod_{\alpha\in\Sigma_{P_0}} |e^{\alpha(H_\emptyset(l))} - e^{-\alpha(H_\emptyset(l))}|^{p_\alpha}|e^{\alpha(H_\emptyset(l))} + e^{-\alpha(H_\emptyset(l))}|^{q_\alpha} \tag{0.4}$$

$$\text{si}\ \ l \in (L_\emptyset/L_\emptyset\cap H)^+_{P_0}\ \text{et}\ D_{P_0}(l) = 0\ \text{sinon}.$$

On choisit une mesure G-invariante sur G/H, dx, telle que:

$$\int_{G/H} f(x)\,dx = \sum_{P_0\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} \int_K \int_{L_\emptyset/L_\emptyset\cap H} D_{P_0}(l) f(klH)\,dk\,dl,\ f \in C_c(G/H). \tag{0.5}$$

Ici la mesure sur K a été normalisée à 1. Un tel choix est possible d'après [F-J, théorème 2.6]. On remarque que ce choix, joint à notre choix d'une mesure sur $\mathfrak{a}_G$, conduit à un choix de mesure sur $M_G/M_G\cap H$, grâce à l'isomorphisme (0.1).

On se fixe désormais une représentation unitaire de dimension finie de K, (τ, V). Si $L \in \mathcal{L}$ (resp. $P \in \mathcal{F}$), on notera τ_L, ou τ_M si $L = MA$ est sa σ-décomposition de Langlands, (resp. $\tau_{|P}$) la restriction de τ à $K\cap L$ (resp. $K\cap P$).

On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par les translations à gauche par les éléments de G. Dans ce paragraphe on note $(G/H,.)$ pour $(G/H,\tau)$ (resp. (G/H)). Soit $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,.)$ l'espace des fonctions C^∞, τ-sphériques (resp. K-finies à valeurs dans $\mathbb{C}$) sur G/H qui sont $\mathbb{D}(G/H)$-finies et tempérées (cf. [D2, (5.1)]).

Soit $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands d'un élément de $\mathcal{L}$. On rappelle (cf. [C1]) que le terme constant d'un élément Φ de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ le long d'un élément P de $\mathcal{P}(L)$ est l'élément Φ_P de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(L/L\cap H,\tau_L)$ caractérisé par:

$$(0.6)\quad \lim_{t\to+\infty} (\delta_P(\exp(tX)\ l)\Phi(\exp(tX)\ l) - \Phi_P(\exp(tX)\ l)) = 0,\ l \in L/L\cap H,$$

où $X \in \mathfrak{a}$ est strictement dominant pour les racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$.

On notera parfois G^1 au lieu de M_G. Si Φ est une fonction sur G/H, et $X \in \mathfrak{a}_G$, on note Φ^X la fonction sur G^1/H définie par $\Phi^X(g^1H) = \Phi((\exp\ X)g^1H)$, $g^1 \in G^1$. On note $\mathcal{A}_2(G/H,.)$ l'espace formé des éléments Φ de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,.)$ tels que pour tout $X \in \mathfrak{a}_G$, Φ^X est de carré intégrable sur G^1/H. Alors $\mathbb{D}(G/H)$ opère sur $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,.)$ et sur $\mathcal{A}_2(G/H,.)$ (cf. [D2, (5.2), (5.10)]).

On suppose jusqu'à nouvel ordre que $\mathfrak{a}_G = \{0\}$. Alors $\mathcal{A}_2(G/H,.)$ est un sous-espace de l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G/H,.)$ (cf. l.c. (5.11)). Le produit scalaire (resp. le produit) d'un élément de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,.)$ avec un élément (resp. le conjugué d'un élément) de l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G/H,.)$ des fonctions τ-sphériques (resp. K-finies à valeurs dans $\mathbb{C}$) est intégrable sur G/H. Cela détermine une forme sesquilinéaire sur le produit de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,.)$ avec $\mathcal{A}_2(G/H,.)$.

On ne suppose plus que $\mathfrak{a}_G = \{0\}$. On note $\mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}(G/H,\tau)$ l'espace formé des éléments Φ de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ tels que, pour tout $X \in \mathfrak{a}_G$, l'élément Φ^X de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G^1/H,\tau)$ est orthogonal au sous-espace $\mathcal{A}_2(G^1/H,\tau)$ de $\mathcal{C}(G^1/H,\tau)$ pour la forme sesquilinéaire ci-dessus (avec G^1 au lieu de G). On a alors:

$$(0.7)\qquad \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau) = \mathcal{A}_2(G/H,\tau) \oplus \mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}(G/H,\tau),$$

cette décomposition étant invariante par $\mathbb{D}(G/H)$ (cf. [D2, Lemme 5]).

En supposant à nouveau $\mathfrak{a}_G = \{0\}$, le produit scalaire L^2 sur $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$ s'étend en une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ en déclarant que la forme sesquilinéaire appliquée à un couple est nulle si l'un des éléments du couple est dans $\mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}(G/H,\tau)$. Soit $L = MA$ comme ci-dessus. Si $M/M\cap H$ admet des séries discrètes, on choisit un sous espace $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, stable sous σ et θ, abélien maximal dans $\mathfrak{s}^d := i(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})\oplus\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q}$ et dont l'intersection avec $\mathfrak{s}$ est égale à $\mathfrak{a}$. Un tel choix est possible d'après la théorie de la série discrète (cf. [OM]). On note $W(\mathfrak{a}^d)$ le groupe formé des restrictions à $\mathfrak{a}^d$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ préservant $\mathfrak{a}^d$. On note $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$ l'isomorphisme de Harish-Chandra entre $\mathbb{D}(G/H)$ et l'algèbre $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$ des invariants sous $W(\mathfrak{a}^d)$ de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a}^d)$ de $\mathfrak{a}^d_{\mathbb{C}}$.

Si f est une fonction C^∞ sur G/H et $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)_{\mathbb{C}}{}^*$, on dit que f est un vecteur propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ si et seulement si:

$$(D - \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\lambda))f = 0, \; D \in \mathbb{D}(G/H).$$

Soit Λ un élément du dual réel de $\mathfrak{a}^d_{\mathfrak{k}} := \mathfrak{a}^d \cap i\mathfrak{k}$, qui est régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d_k$ dans $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$. On définit alors les fonctions $II_{hol}(\Lambda)$ sur G/H comme dans [BCD, Définition 1]. Une telle fonction est une famille d'éléments de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H,.)$ indexée par $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, $F(\lambda)$, chaque $F(\lambda)$ étant propre pour la valeur propre $\Lambda+\lambda$. De plus, cette fonction, initialement définie sur $G/H \times i\mathfrak{a}^*$, admet un prolongement holomorphe dans la deuxième variable à $G/H \times i\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$, où $\mathfrak{a}^*_\varepsilon = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \|\mathrm{Re}\,\lambda\| < \varepsilon\}$. On dispose en outre de majorations pour ce prolongement ainsi que de ses dérivées sous les éléments de $U(\mathfrak{g})$. Les fonctions $II'_{hol}(\Lambda)$ sont les fonctions $II_{hol}(\Lambda)$ dont le terme constant le long de chaque sous groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P admet une décomposition simple à l'aide de fonctions II_{hol} pour l'espace symétrique $L_P/L_P \cap H$ (cf. [BCD, Définition 2]).

Pour L comme ci-dessus (i.e. $M/M \cap H$ possède des séries discrètes), on définit l'espace $II'_{hol}(G, L, \tau)$ comme l'espace des combinaisons linéaires des fonctions $II'_{hol}(\Lambda)$, τ-sphériques lorsque Λ varie. Si $M/M \cap H$ n'a pas de série discrète, on pose $II'_{hol}(G, L, \tau) = \{0\}$.

Pour L et L' éléments de $\mathcal{L}$, on note $W(\mathfrak{a}_L,\ \mathfrak{a}_{L'})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{a}_L$ dans $a_{L'}$ induites par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (ou bien par un élément de K; cf. [D2, Lemme 2]). On pose $W(\mathfrak{a}_L) = W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_L)$. Si λ est un élément de $(\mathfrak{a}^*_{L'})_{\mathbb{C}}$ et s un élément de $W(\mathfrak{a}_L, \mathfrak{a}_{L'})$, on note λ^s la composée de λ avec s. On remarque que $W_\emptyset$ est égal à $W(\mathfrak{a}_\emptyset)$.

Si $L \in \mathcal{L}$, on définit l'espace $\widetilde{II'}_{hol}(G, L, \tau)$ des familles de fonctions τ-sphériques sur G/H paramétrées par $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_L$, de la forme $F(\lambda) = \sum_{w \in W(\mathfrak{a}_\emptyset)} F_w(\lambda^{\overline{w}^{-1}})$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_L$, où F_w est un élément de $II'_{hol}(G, L^w, \tau)$. Ici L^w est égal à wLw^{-1} et $\overline{w}^{-1}$ est la restriction de w^{-1} à $\mathfrak{a}_{L^w}$, qui est un élément de $W(\mathfrak{a}_{L^w}, \mathfrak{a}_L)$. Nous ne nous intéressons pas à l'éventuelle unicité de cette écriture. Pour $F \in \widetilde{II'}_{hol}(G, L, \tau)$ et $Q \in \mathcal{F}$, on peut écrire

$$F_Q(\lambda) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_L)} F_{Q,s}(\lambda), \; \lambda \in i\mathfrak{a}^*_L \tag{0.8}$$

où $F_{Q,s}(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(L_Q/L_Q \cap H, \tau)$ qui se transforme sous A_Q par un caractère de différentielle λ^s. De plus pour tout $l \in L_Q/L_Q \cap H$, l'application $\lambda \mapsto F_{Q,s}(\lambda)(l)$ est continue sur $i\mathfrak{a}^*_M$. Une telle décompositon est unique (cf. [D2, (7.27) à (7.30)]), ce qui assure la linéarité de $F \mapsto F_{Q,s}$.

1. Produit scalaire tronqué d'une fonction tempérée $D(G/H)$ finie et d'une fonction $\widetilde{II}'_{hol}$

1.1. Soit $L \in \mathcal{L}$ et $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. On identifie les éléments de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$ à des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans $\mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M)$. Si $X \in \mathfrak{a}$ et $\psi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$, on note $\psi^X \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M)$ la valeur en X de celle-ci. Par ailleurs, si $\psi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, on notera ψ_λ l'élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(L/L \cap H, \tau_L)$ défini par:

$$\psi_\lambda((\exp\ X)m\ L \cap H) = e^{\lambda(X)}\psi^X(m\ M \cap H), \quad X \in \mathfrak{a},\ m \in M. \tag{1.1}$$

Si $\psi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(L/L \cap H, \tau_L)$, on a:

$$\psi = \sum_{\lambda \in i\mathfrak{a}^*} ({}^0\psi(\lambda))_\lambda, \tag{1.2}$$

où la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls et les ${}^0\psi(\lambda)$ sont des éléments de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$ bien définis par cette relation. On posera:

$$\psi(\lambda) := ({}^0\psi(\lambda))_\lambda. \tag{1.3}$$

Si ψ et ψ' sont des éléments de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M) \otimes S(\mathfrak{a}^*)$ et $Z \in \mathfrak{a}_G$, on notera $(\psi, \psi')^Z$ l'élément de $S((\mathfrak{a}^G)^*)$ (où $\mathfrak{a}^G := \mathfrak{a}_L^G$) défini par:

$$(\psi, \psi')^Z(X) = (\psi^{X+Z}, (\psi')^{X+Z}), \quad X \in \mathfrak{a}^G \tag{1.4}$$

où, dans le second membre, la forme sesquilinéaire utilisée sur $\mathcal{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H, \tau_M)$ est celle définie après (0.7).

1.2. Pour L élément de $\mathcal{L}$, on note Θ_L la fonction sur $L/L \cap H$ définie par:

$$\Theta_L(l(L \cap H)) = \Xi_L(l\sigma(l)^{-1}),\ l \in L,$$

où Ξ_L est la fonction de Harish-Chandra sur L. On définit également, pour $g \in G$, $p \in \mathbb{N}$, $N_p(gH) := (1 + \|X\|)^p$, si $g = k(\exp X)h$ avec $k \in K$, $h \in H$, $X \in \mathfrak{a}_\emptyset$. On remarquera que ces notations sont un peu abusives car elles ne tiennent pas compte de la dépendance par rapport à σ. Toutefois ces fonctions ne changent pas lorsque l'on remplace σ par les involutions σ_w (voir plus bas, 3.1).

LEMME 1. *Soit $Q \in \mathcal{F}$ et $P_0 \in \mathcal{P}_{\text{st}}$ avec P_0 contenu dans Q. Soit Φ un élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H,\tau)$.*

(i) *Il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que:*

$$\|\Phi_Q(l)\| \leq CN_k(l)\Theta_{L_Q}(l), \quad l \in L_Q/L_Q \cap H.$$

(ii) *Soit* $\delta > 0$. *Il existe* C, $\varepsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que*:

$$\|\delta_Q(l)^{\frac{1}{2}}\Phi(l) - \Phi_Q(l)\| \leq C\Theta_{L_Q}(l)e^{-\varepsilon\|H_\emptyset(l)\|},$$

pour tout $l \in (L_\emptyset/L_\emptyset \cap H)^+_{P_0}$ *vérifiant*:

$$\alpha(H_\emptyset(l)) \geq \delta\|H_\emptyset(l)\|, \quad \alpha \in \Delta_{P_0} \setminus \Delta^Q_{P_0}.$$

(iii) *Soit* $\delta > 0$. *On peut choisir* C, $\varepsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que*, *pour* l *comme dans* (ii), *on ait*:

$$\|D_{P_0}(l)^{\frac{1}{2}}\Phi(l) - D_{P_0\cap L_Q}(l)^{\frac{1}{2}}\Phi_Q(l)\| \leq CN_k(l)e^{-\varepsilon\|H_\emptyset(l)\|}.$$

(iv) *Il existe* $C > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *tels que*:

$$\|D_{P_0\cap L_Q}(l)\Phi_Q(l)\| \leq CN_k(l), \quad l \in L_\emptyset/L_\emptyset \cap H.$$

Démonstration. (i) résulte de la tempérance du terme constant et de la définition de la tempérance (voir [C, Définition 2 et Théorème 1]).

Montrons (ii). D'après [C, Prop. 7], il existe C, $\gamma > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout X dans l'adhérence de la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+_{P_0}$, on ait:

$$\begin{aligned}(1.5) \qquad &\|\delta_Q^{\frac{1}{2}}(\exp\ X)\Phi(\exp\ X) - \Phi_Q(\exp\ X)\| \\ &\leq C(1+\|X\|)^d\ e^{-(\rho_{P_0\cap L_Q}(X)+\gamma\beta_Q(X))},\end{aligned}$$

où $\beta_Q(X) = \mathrm{Inf}_{\alpha\in\Delta_{P_0}\setminus\Delta^Q_{P_0}}\ \alpha(X)$. Ici $P_0\cap L_Q$ est regardé comme un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal de L_Q. On prend $X = H_\emptyset(l)$ avec l comme dans (ii). Comme Φ est τ-sphérique, on a:

$$(1.6) \qquad \|\delta_Q(l)^{\frac{1}{2}}\Phi(l) - \Phi_Q(l)\| = \|\delta_Q(\exp\ X)^{\frac{1}{2}}\Phi(\exp\ X) - \Phi_Q(\exp\ X)\|.$$

De plus, les hypothèses faites sur l montrent que X satisfait (1.5) et que:

$$\beta_Q(X) \geq \delta\|H_\emptyset(X)\|.$$

On utilise alors la Proposition 17.2 de [B2] pour majorer $e^{-\rho_{P_0\cap L_Q}(X)}$ et trouver le résultat voulu.

Le passage de (ii) à (iii) se fait comme la démonstration du Corollaire du Lemme 3 de [D2]. De même (iv) résulte de (i) et [D2, (3.12)]. □

1.3. Soient L un élément de $\mathcal{L}$, MA sa σ-décomposition de Langlands et P un élément de $\mathcal{P}(L)$. On se fixe $\Lambda \in \mathfrak{a}^*_L$, nul sur $\mathfrak{a}_G$ et tel que $\mathrm{Re}\Lambda(\check{\alpha})$ soit strictement positif pour tout α élément de Δ_P. Soit Z élément de $\mathfrak{a}_G$. On note $(G/H)^Z$ l'ensemble des éléments x de G/H tels que $H_G(x) = Z$. On note:

$$\mathfrak{a}^Z_L := \{X + Z \mid X \in \mathfrak{a}^G_L\},$$

qui est un sous-espace affine de $\mathfrak{a}_L$, que l'on munit, ainsi que $\mathfrak{a}^G$, de la mesure de Lebesgue associée à la structure euclidienne de $\mathfrak{a}_L$. Alors $(L/L\cap H)\cap (G/H)^Z$ s'identifie, grâce à (0.1), avec L au lieu de G, à $(M/M\cap H)\times \mathfrak{a}_L^Z$. Par transport de structure et nos choix de mesures, on en déduit une mesure sur $(L/L\cap H)\cap (G/H)^Z$. Si $\lambda\in(\mathfrak{a}_L)^*_{\mathbb{C}}$ et $\psi\in C^\infty(L/L\cap H)$, on note ψ_λ la fonction C^∞ sur $L/L\cap H$ définie par:

$$\psi_\lambda(l)=e^{\lambda(H_L(l))}\psi(l), l\in L/L\cap H.$$

Cela est cohérent avec nos notations antérieures (cf. (1.1)), si l'on identifie les éléments de $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H,\tau_M)\otimes S(\mathfrak{a}^*)$ à des éléments de $C^\infty(L/L\cap H)$.

Soit T un élément de $\mathfrak{a}_\emptyset^G$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}$. Si Q est un élément de $\mathcal{P}$, on note T_Q l'unique conjugué de T par un élément de $W_\emptyset$ qui est dominant par rapport à Δ_Q. Si P est un élément de $\mathcal{P}(L)$, on note T_P la projection orthogonale de T_Q sur $\mathfrak{a}_P$, où Q est un élément de $\mathcal{P}$ contenu dans P, cette projection étant indépendante de Q.

Si $P\in\mathcal{P}(L)$, ψ, $\psi'\in\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H,\tau_M)\otimes S(\mathfrak{a}^*)$ et $Z\in\mathfrak{a}_G$, on note $(\psi,\psi')^Z$ le polynôme sur $\mathfrak{a}^G(=\mathfrak{a}_L^G)$ introduit en (1.4). On note $\hat{\Delta}_P$ la base de $(\mathfrak{a}_L^G)^*$ duale de la base de $\mathfrak{a}_L^G$ formée des coracines de Δ_P (cf. [D2, §2] pour la définition de ces dernières). On définit alors:

$$r_P^T(\psi_\Lambda,\psi')^Z:=\int_{\mathfrak{a}^G}(\psi,\psi')^Z(X)\varphi_P(X-T_P)e^{\Lambda(X)}\,dX, \psi,\psi'\in\mathcal{A}_2(M,\tau_M)$$

où φ_P désigne (la restriction à $\mathfrak{a}_M$ de) l'indicatrice de $\{X\in\mathfrak{a}_\emptyset\mid\omega(X)\leq 0,\omega\in\hat{\Delta}_P\}$. Cette fonction de Λ est bien définie et admet un prolongement méromorphe sur $(\mathfrak{a}_\emptyset^*)_{\mathbb{C}}$. Si ce prolongement est bien défini pour $\Lambda=0$, on note $r_P^T(\psi,\psi')^Z$ sa valeur en 0.

Si p est un polynôme sur $\mathfrak{a}^G$ on note $p(\partial)$ l'opérateur différentiel sur $i(\mathfrak{a}^G)^*$ à coefficients constants tel que, pour tout $\varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{a}^G)$ et $\lambda\in i(\mathfrak{a}^G)^*$ on ait:

$$\int_{\mathfrak{a}^G}p(X)\varphi(X)e^{\langle\lambda,X\rangle}\,dX=p(\partial)\left(\int_{\mathfrak{a}^G}\varphi(X)e^{\langle\lambda,X\rangle}\,dX\right). \tag{1.7}$$

Comme $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^G\oplus\mathfrak{a}_G$, on peut aussi regarder $p(\partial)$ comme un opérateur différentiel à coefficients constants sur $i\mathfrak{a}^*$. On note θ_P la fonction sur $(\mathfrak{a}^*)_{\mathbb{C}}$ définie par:

$$\theta_P(\lambda)=(c_P)^{-1}\prod_{\alpha\in\Delta_P}\lambda(\check{\alpha}), \lambda\in(\mathfrak{a}^*)_{\mathbb{C}}.$$

Ici c_P est la valeur absolue du déterminant de la matrice exprimant la base $\{\check{\alpha}\mid\alpha\in\Delta_P\}$ de $\mathfrak{a}^G$ dans une base orthonormée de cet espace. C'est aussi le volume du quotient de $\mathfrak{a}^G$ par le réseau engendré par les $\check{\alpha},\alpha\in\Delta_P$. Procédant comme dans [D2, preuve de (6.7)], on voit que:

(1.8) *$r_P^T(\psi_\lambda,\psi'_{\lambda'})^Z$ est bien défini dès que $(\lambda,\lambda')\in i\mathfrak{a}^*\times i\mathfrak{a}^*$ est tel que $\lambda-\lambda'$ soit Δ_P-régulier.*

De plus, lorsque cette condition est satisfaite par (λ, λ'), on a:

$$(1.9)\qquad r_P^T(\psi_\lambda, \psi'_{\lambda'})^Z = (((\psi,\psi')^Z(\partial))(e^{\langle .,Z+T_P\rangle}\theta_P(.)))(\lambda-\lambda').$$

Le second membre de (1.9)) a le sens suivant : on applique l'opérateur différentiel $(\psi,\psi')^Z(\partial)$ (voir (1.7)) à la fonction $\nu \mapsto e^{\langle \nu,Z+T_P\rangle}\theta_P(\nu)$ et on évalue le tout au point $\lambda - \lambda'$.

1.4. On considère maintenant $F \in \widetilde{II}'_{hol}(G,L,\tau)$ et $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$. Si $P \in \mathcal{F}$ on note $\mathcal{E}_P(\Phi)$ l'ensemble des $\mu \in i\mathfrak{a}_P^*$ tels que $\Phi_P(\mu)$ soit non nul (voir (1.2) et (1.3)). C'est un ensemble fini. Si $P \in \mathcal{F}$ est tel que $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}$ soient conjugués sous K, on note $\mathcal{H}_P$ le complémentaire dans $i\mathfrak{a}^*$ de l'ensemble $\mathcal{H}_P^c$ formé des éléments λ de $i\mathfrak{a}^*$ tels que, pour tout $\mu \in \mathcal{E}_P(\Phi)$ et tout $s \in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a})$, $\lambda^s - \mu$ soit Δ_P-régulier. Si $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}$ ne sont pas conjugués sous K, on pose $\mathcal{H}_P = \emptyset$. Dans tous les cas, $\mathcal{H}_P$ est réunion d'une famille finie (éventuellement vide) d'hyperplans de $i\mathfrak{a}^*$. On note $\mathcal{H} = \bigcup_{P\in\mathcal{F}} \mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}^c$ son complémentaire dans $i\mathfrak{a}^*$. Avec les notations précédentes, on a immédiatement l'analogue du Lemme 7 de [D2]:

LEMME 2. *Soit $Z \in \mathfrak{a}_G$, $P \in \mathcal{F}$ et T comme en* 1.3.

(i) *Si $\mathfrak{a}_P$ n'est pas conjugué sous K à $\mathfrak{a}$, $r_P^T(F_P(\lambda),\Phi_P)^Z$ est bien défini et nul pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$.*

(ii) *Si $\mathfrak{a}_P$ est conjugué sous K à $\mathfrak{a}$, pour tout $\lambda \in \mathcal{H}_P^c$, $r_P^T(F_P(\lambda),\Phi_P)^Z$ est bien défini et égal à la somme sur $s \in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a})$, $\mu \in \mathcal{E}_P(\Phi)$ de*

$$((F_{P,s}(\lambda)^0, {}^0\Phi(\mu))^Z(\partial)e^{\langle .,Z+T_P\rangle}\theta_P(.))(\lambda^s-\mu).$$

On définit, grâce au lemme précédent, une fonction sur $\mathcal{H}^c$ par:

$$(1.10)\qquad \omega_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}^T(F,\Phi,\lambda)^Z = \sum\nolimits_{P\in\mathcal{P}_{\mathrm{st}}} r_P^T(F(\lambda),\Phi)^Z, \quad \lambda \in \mathcal{H}^c,$$

qui est égal à la somme sur $P \in \mathcal{F}_{\mathrm{st}}$, avec $\mathfrak{a}_P$ conjugué sous K à $\mathfrak{a}$, sur $s \in W(\mathfrak{a}_P,\mathfrak{a})$ et $\mu \in \mathcal{E}_P(\Phi)$ (ou bien $\mu \in i\mathfrak{a}_P^*$) de

$$(1.11)\qquad ((F_{P,s}(\lambda)^0, {}^0\Phi(\mu))^Z(\partial)e^{\langle .,Z+T_P\rangle}\theta_P(.))(\lambda^s-\mu).$$

On note $u(.,T)$ l'indicatrice de la partie de G/H formée des éléments de la forme $k(\exp X)H$ où k est un élément de K, X un élément de l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de T sous $W(\mathfrak{a}_\emptyset)$ modulo $\mathfrak{a}_G$. On définit l'analogue de [D2, (7.4)]:

$$(1.12)\qquad \Omega_{\mathcal{P}_{\mathrm{st}}}^T(F,\Phi,\lambda)^Z = \int_{(G/H)^Z} ((F(\lambda)(x),\Phi(x))u(x,T)\,dx.$$

Soit:

$$d(T) = \inf\{\alpha(T_Q) \mid Q \in \mathcal{P}, \alpha \in \Delta_Q\}.$$

On a l'analogue du Théorème 1 de [D2]:

PROPOSITION 1. *On utilise les notations ci-dessus.*

(i) *La fonction sur* $\mathcal{H}^c$, $\omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,\Phi,\lambda)^Z$ *s'étend en une fonction analytique sur* $i\mathfrak{a}^*$ *que l'on note de la même façon.*

(ii) *Soit* $\delta > 0$. *Il existe des constantes* C, $\varepsilon > 0$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *telles que la différence:*

$$\Delta^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,\Phi,\lambda)^Z := \Omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,\Phi,\lambda)^Z - \omega^T_{\mathcal{P}_{\rm st}}(F,\Phi,\lambda)^Z$$

soit majorée en module par:

$$CN_k(\lambda)(1+\|z\|)^k e^{-\varepsilon\|T\|}$$

pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, $Z \in \mathfrak{a}_G$ *et* T *vérifiant* $d(T) \geq \delta\|T\|$.

Démonstration. La preuve est essentiellement identique à celle du Théorème 1 de [D2] et de son corollaire, où l'on remplace F' par Φ. Ici il n'y a qu'un seul paramètre λ au lieu de deux (λ et λ'). On commence par supposer F élément de $II'_{hol}(G,L,\tau)$. On procède par récurrence comme dans [D2]. L'analogue du Lemme 8 de [D2] est établi sans difficulté, en remplaçant les estimées sur F' et ses termes constants, données dans [D2] (Lemme 3 et son corollaire, équation (3.14)) par le Lemme 1 du présent article.

Passons à l'analogue du Lemme 9 de [D2]. On rappelle que si a est un élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$ et $x \in G/H$, l'intégrale:

$$F_a(x) := \int_{i\mathfrak{a}^*} a(\lambda)(F(\lambda))(x)\,d\lambda$$

est bien définie et la fonction F_a sur G/H (paquet d'ondes) est un élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G/H,\tau)$. L'application $a \mapsto F_a$ est linéaire et continue de $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$ dans $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ (cf. [BCD, Théorème 1 et Remarque 1]).

On définit une distribution T_Φ sur $i\mathfrak{a}^*$ en posant:

$$T_\Phi(a) = \int_{G/H} (F_a(x),\Phi(x))\,dx, \quad a \in C^\infty_c(i\mathfrak{a}^*).$$

LEMME 3. *Le support de* T_Φ *est un ensemble fini* $\mathcal{S}$.

Démonstration. Par linéarité, on se ramène au cas où F est $II'_{hol}(\Lambda)$. La fonction Φ étant $\mathbb{D}(G/H)$-finie est annulée par un idéal de codimension finie de $\mathbb{D}(G/H)$, I. Soit I^* l'idéal de codimension finie de $\mathbb{D}(G/H)$ formé des D^*, $D \in I$. Procédant comme dans la preuve du Lemme 9 de [D2], on voit que le support de T_Φ est contenu dans l'ensemble des zéros communs aux fonctions polynomiales sur $i\mathfrak{a}^*$, $\lambda \mapsto \gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\lambda+\Lambda)$, où D décrit I^*. Mais cet ensemble est fini, puisque I^* est de codimension finie. □

Fin de la démonstration de la Proposition 1. On opère une réduction au cas où $\mathfrak{a}_G = \{0\}$. D'abord par linéarité, on se ramène au cas où $\Phi = \Phi(\mu_0)$ pour un élément μ_0 de $i\mathfrak{a}^*_G$. Ici on a utilisé les notations de (1.2) et (1.3) en y remplaçant L par G. On remarque alors que l'expression de (ii) dont on veut majorer le module, multipliée par $e^{(-\lambda+\mu_0)(Z)}$ est polynomiale en Z. De plus les coefficients de cette expression polynomiale sont des expressions de même nature, mais relativement à $G^1 = M_G$. Ceci implique immédiatement que l'ont peut se réduire au cas où $\mathfrak{a}_G = \{0\}$, ce que l'on suppose dans la suite de la preuve. On introduit ici $\mathcal{F}_* = \mathcal{H}^c \setminus \mathcal{S}$. On poursuit comme dans [D2], fin de la démonstration du Théorème 1. L'extension au cas où $F \in \widetilde{II}'_{hol}(G, L, \tau)$ est immédiate. $\square$

2. Produit scalaire d'un paquet d'ondes et d'une fonction tempérée

2.1. On conserve les notations précédentes. Soit $\Lambda \in \mathfrak{a}^*$, régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. Pour P élément de $\mathcal{P}(L)$ on notera ψ_P^Λ l'indicatrice de:

$$C_P^\Lambda = \{X \in \mathfrak{a}_L^G \mid \omega_\alpha(X)\Lambda(\check{\alpha}) > 0, \alpha \in \Delta_P\},$$

que l'on regarde comme une mesure sur $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_L$ portée par $\mathfrak{a}^G = \mathfrak{a}_L^G$, grâce à notre choix de mesure sur $\mathfrak{a}^G$. Soit β_P^Λ le nombre d'éléments α de Δ_P tels que $\Lambda(\check{\alpha}) < 0$. On démontre la proposition suivante comme le Théorème 3 de [D2].

Proposition 2. *On reprend les notations et hypothèses de la Proposition 1. On fixe $\Lambda \in \mathfrak{a}^*$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. La fonction analytique sur $i\mathfrak{a}^*$, $\omega_{\mathcal{P}_{\rm st}}^T(F,\Phi,\lambda)^Z$, est égale à la somme sur*

(a) *les éléments Q de $\mathcal{F}_{\rm st}$, tels que $\mathfrak{a}_Q$ est conjugué sous K à $\mathfrak{a}$,*

(b) *les éléments s de $W(\mathfrak{a}_Q,\mathfrak{a})$,*

(c) *les éléments μ de $\mathcal{E}_Q(\Phi)$ (ou $i\mathfrak{a}_Q^*$) de:*

$$(((F_{Q,s}(\lambda)^0,{}^0\Phi_Q(\mu))^Z \circ s^{-1})(\partial)(-1)^{\beta_{Q^s}^\Lambda}(\psi_{Q^s,T_{Q^s}+Z}^\Lambda)^\wedge)(\lambda - \mu^{s^{-1}}),$$

où $\psi_{Q^s,T_{Q^s}+Z}^\Lambda$ est l'indicatrice, dans $\mathfrak{a}$, de $C_{Q^s}^\Lambda - T_{Q^s} - Z$ (translaté de $C_{Q^s}^\Lambda$ par $-(T_{Q^s} + Z)$).

2.2. On démontre la proposition suivante comme le Théorème 4 de [D2].

Proposition 3. *On retient les notations de la Proposition 2. On choisit $P \in \mathcal{P}_{\rm st}(L)$ et $\Lambda \in \mathfrak{a}^*$ strictement Δ_P-dominant. Si a est élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$, l'expression:*

$$(F_a,\Phi) = \int_{G/H} (F_a(x),\Phi(x))\, dx$$

est égale à:

$$\sum\nolimits_{w\in\mathcal{W}_P,\lambda\in i\mathfrak{a}^*} (((F_{P^w,w^{-1}}(\lambda)^0,{}^0\Phi_{P^w}(\lambda^{w^{-1}}))^0 \circ w)(\partial)a)(\lambda).$$

3. Formule de Plancherel

3.1. *Transformation de Fourier pour les fonctions τ-sphériques.* Pour w élément de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, on définit l'involution σ_w de G par $\sigma_w(g) = w^{-1}\sigma(wgw^{-1})w$, $g \in G$. Le quadruplet $(G, \sigma_w, \theta, w^{-1}Hw)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H) et on lui applique les notations déjà introduites pour de tels quadruplets. Soit L un élément de $\mathcal{L}$ et $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. On définit:

$$\mathcal{A}_2(M, \tau) := \oplus_{w \in \mathcal{W}_M} \mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M) \tag{3.1}$$

où $\mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$ est l'espace des fonctions C^∞, τ_M-sphériques sur $M/M \cap w^{-1}Hw$, qui sont de carré intégrable et $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$-finies. Ces espaces sont de dimension finie (cf. [14, Proposition 1]).

On définit maintenant les intégrales d'Eisenstein. Soit P un élément de $\mathcal{P}(L)$. Soit λ un élément du dual complexe $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A, tel que $(\mathrm{Re}\,\lambda - \rho_P)$ (où ρ_P est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$) soit strictement dominant (pour ces mêmes racines). A tout $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathcal{W}_M} \in \mathcal{A}_2(M, \tau)$ on associe la fonction Ψ_λ définie pour $x \in G/H$ par:

$$\Psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w \in \mathcal{W}_M} Pw^{-1}H \\ a^{-\lambda+\rho_P}\psi_w(m) & \text{si } x = namw^{-1}H, n \in N_P, a \in A, \\ & \quad m \in M,\ w \in \mathcal{W}_M. \end{cases}$$

L'intégrale d'Eisenstein $E(P, \psi, \lambda)$ est définie pour $x \in G/H$ par:

$$E(P, \psi, \lambda)(x) := \int_K \tau(k^{-1})\Psi_\lambda(kx)\, dk. \tag{3.2}$$

Cette intégrale converge et définit une fonction de classe C^∞, τ-sphérique et $\mathbb{D}(G/H)$-finie. De plus $E(P, \psi, \lambda)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [CD2, §3]). Alors, si Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable tel que $L_Q = L$, il existe (cf. [CD2, Th. 1]) une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, à valeurs dans $\mathrm{End}\,\mathcal{A}_2(M, \tau)$, $\lambda \mapsto C_{Q|P}(s, \lambda)$, telle que, pour $w \in \mathcal{W}_M$, $l \in L$, $\psi \in \mathcal{A}_2(M, \tau)$, $a \in A$ et λ dans un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$, on ait:

$$\tau(w^{-1})E(P, \psi, \lambda)_{Q^w}(wlaw^{-1}) = \sum\nolimits_{s \in W(\mathfrak{a})} (C_{Q|P}(s, \lambda)\psi)_w(l)a^{-s\lambda}. \tag{3.3}$$

Ici Q^w désigne wQw^{-1}.

Les fonctions C sont génériquement des opérateurs inversibles ce qui permet de définir les intégrales d'Eisenstein normalisées par:

$$E^0(P, \psi, \lambda) = E(P, C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}\psi, \lambda). \tag{3.4}$$

On dispose alors des fonctions C normalisées, définies en remplaçant E par E^0 et notées C^0. En particulier, on a:

$$C^0_{P|P}(1, \lambda) \equiv \mathrm{Id}_{\mathcal{A}_2(M,\tau)}. \tag{3.5}$$

L'application $\lambda \mapsto E^0(P, \psi, -\lambda)$ est une fonction $\widetilde{II}'_{hol}(G, L, \tau)$ (cf. [CD2, Th. 3], dit théorème de régularité des intégrales d'Eisenstein normalisées).

Par ailleurs, on dispose des paquets d'ondes. Si Ψ est un élément de $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathcal{A}_2(M, \tau)$, où $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$ est l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur $i\mathfrak{a}^*$, la relation:

$$\mathcal{J}_P^0\Psi(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P, \Psi(\lambda), \lambda)(x)\, d\lambda, \quad x \in G/H, \tag{3.6}$$

définit un élément $\mathcal{J}_P^0\Psi$ de l'espace de Schwartz des fonctions τ-sphériques, $\mathcal{C}(G/H, \tau)$ (cf. [CD2, Prop. 7]). Soit f un élément de $\mathcal{C}(G/H, \tau)$. Si $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, il existe, par représentation de Riesz, un unique élément $(\mathcal{F}_P^0 f)(\lambda)$ de $\mathcal{A}_2(M, \tau)$ tel que, pour tout $\psi \in \mathcal{A}_2(M, \tau)$:

$$(\mathcal{F}_P^0 f(\lambda), \psi) = \int_{G/H} (f(x), E^0(P, \psi, \lambda)(x))\, dx. \tag{3.7}$$

De plus $\mathcal{F}_P^0 f$ est un élément de $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathcal{A}_2(M, \tau)$ (cf. [CD2, Th. 4]). Alors la transformée de Fourier normalisée de f, $\mathcal{F}^0 f$ est l'élément $((\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_P^0 f)_{P\in\mathbb{F}}$ de $\oplus_{P\in\mathcal{F}}\mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*) \otimes \mathcal{A}_2(M_P, \tau)$. On notera $\mathcal{S}_P^1(\tau) := \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*) \otimes \mathcal{A}_2(M_P, \tau)$. Pour $P \in \mathbb{F}$ et $s \in W(\mathfrak{a}_P)$, on définit (cf. [CD2, Th. 2 et Lemme 7]) un opérateur de $\mathcal{S}_P^1(\tau)$ dans lui-même, $U_{P,\tau}(s)$, isométrique pour le produit scalaire naturel, par:

$$(U_{P,\tau}(s)\Psi)(\lambda) = C_{P|P}^0(s, s^{-1}\lambda)\Psi(s^{-1}\lambda), \quad \Psi \in \mathcal{S}_P^1(\tau),\ \lambda \in i\mathfrak{a}_P^*. \tag{3.8}$$

Alors $U_{P,\tau}$ est une représentation de $W(\mathfrak{a}_P)$ dans $\mathcal{S}_P^1(\tau)$ (cf. l.c., Prop. 5) et $\mathcal{S}_P^0(\tau)$ est, par définition, l'espace des éléments invariants de $\mathcal{S}_P^1(\tau)$ sous cette action de $W(\mathfrak{a}_P)$. L'image de $\mathcal{F}_P^0$ est égale à $\mathcal{S}_P^0(\tau)$ (cf. l.c. Th. 5).

On note $\mathcal{H}_P^1(\tau)$ l'espace $L^2(i\mathfrak{a}_P^*) \otimes \mathcal{A}_2(M_P, \tau)$ muni du produit scalaire naturel. L'adhérence de $\mathcal{S}_P^0(\tau)$ dans $\mathcal{H}_P^1(\tau)$ sera notée $\mathcal{H}_P^0(\tau)$. On dispose, par prolongement par continuité, d'une représentation unitaire de $W(\mathfrak{a}_P)$, notée $\bar{U}_{P,\tau}$ dans $\mathcal{H}_P^1(\tau)$ et on a:

$$\mathcal{H}_P^0(\tau) = (\mathcal{H}_P^1(\tau))^{W(\mathfrak{a}_P)}. \tag{3.9}$$

On désigne par $\mathcal{S}^\bullet(\tau)$ (resp. $\mathcal{H}^\bullet(\tau)$) la somme directe (resp. la somme directe orthogonale) des $\mathcal{S}_P^\bullet(\tau)$ (resp. $\mathcal{H}_P^\bullet(\tau)$) pour $P \in \mathbb{F}$. Ici $\bullet$ vaut pour 0 ou 1.

Enfin, $\mathcal{J}^0$ est l'application linéaire définie sur $\mathcal{S}^1(\tau)$ à valeurs dans $\mathcal{C}(G/H, \tau)$, qui associe à tout $\Psi \in \mathcal{S}_P^1(\tau)$ et $P \in \mathbb{F}$, $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}_P^0\Psi$.

On note $\mathbb{P}_\tau := \mathcal{J}^0\mathcal{F}^0$ qui est un projecteur orthogonal de l'espace $\mathcal{C}(G/H, \tau)$ (cf. l.c. Th. 6).

3.2. *Enoncé et démonstration du Théorème* 1. On introduit le sous-ensemble $\mathbb{F}$ de $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ et $\mathcal{W}_P$ pour P élément de $\mathbb{F}$ comme dans le paragraphe 0. On note $\tilde{\mathbb{F}} = \{Q^w \mid P \in \mathbb{F},\ Q \in \mathcal{P}(L_P),\ w \in \mathcal{W}_P\}$. Alors, tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est conjugué à un élément de $\tilde{\mathbb{F}}$ par un élément de $K \cap H$ (cf. [CD2, Lemme 8]).

LEMME 4. (i) *Si* $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ *est tel que, pour tout* $P \in \tilde{\mathbb{F}}$ *avec* $P \neq G$, $\Phi_P = 0$, *alors* $\Phi \in \mathcal{A}_2(G/H,\tau)$.

(ii) *Si* $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ *est tel que* $\Phi_P \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp},c}(G/H,\tau)$ *pour tout* $P \in \tilde{\mathbb{F}}$, *alors* Φ *est nul.*

Démonstration. (i) Soit Φ comme en (i). Montrons que $\Phi \in \mathcal{A}_2(G/H,\tau)$. Soit $X \in \mathfrak{a}_G$. On note $G^1 := M_G$. On voit facilement que pour tout $P \in \mathcal{F}$:

$$(\Phi^X)_{P\cap G^1}(l\ L_P \cap G^1 \cap H) = \Phi_P((\exp\ X)l\ L_P \cap H), \quad l \in L_P \cap G^1.$$

Donc $(\Phi^X)_{P\cap G^1} = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{a}_G$ et tout $P \in \tilde{\mathbb{F}}$ avec $P \neq G$. Tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est conjugué à un élément de $\tilde{\mathbb{F}}$ par un élément de $K \cap H$. D'autre part, si $k \in K \cap H$, $P \in \mathcal{F}$ et $\psi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G^1/H,\tau)$, on a:

$$\psi_{P^k\cap G^1}(klk^{-1}) = \tau(k)\psi_{P\cap G^1}(l), \quad l \in L_P \cap G^1.$$

En particulier, si $\psi_{P\cap G^1} = 0$, on a aussi $\psi_{P^k\cap G^1} = 0$. Alors, utilisant la Proposition 6 de [C], on voit que, pour tout $X \in \mathfrak{a}_G$, Φ^X est un élément de $\mathcal{A}_2(G^1/H,\tau)$. Finalement, Φ est un élément de $\mathcal{A}_2(G/H,\tau)$, ce qui prouve (i).

Soit maintenant Φ comme dans l'énoncé de (ii). Supposons Φ non nul. Comme tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable est conjugué sous $K \cap H$ à un élément de $\tilde{\mathbb{F}}$, on déduit de la relation simple entre Φ_P, $P \in \mathcal{F}$ avec Φ_{P^k}, $k \in K \cap H$, que $\Phi_P \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp,c}}(L_P/L_P \cap H,\tau_{|P})$ pour tout $P \in \mathcal{F}$. Soit $P \in \mathcal{F}$ minimal parmi les éléments Q de $\mathcal{F}$ tels que Φ_Q soit non nul. D'après (i), on voit que $\Phi_P \in \mathcal{A}_2(L_P/L_P \cap H,\tau_{|P})$. Alors Φ_P est non nul et appartient à l'intersection de $\mathcal{A}_2(L_P/L_P\cap H,\tau_{|P})$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{temp,c}}(L_P/L_P\cap H,\tau_{|P})$. Une contradiction qui prouve (ii). □

THÉORÈME 1. *Pour toute représentation unitaire de dimension finie* τ *de* K, *le projecteur* $\mathbb{P}_\tau$ *de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ *est égal à l'identité.*

Démonstration. On introduit le projecteur $\mathbb{P}$ de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ comme dans [CD2, Th. 7 (iv)] (voir plus loin, §3.4, pour le rappel de la définition de $\mathbb{P}$).

D'après [CD2, Lemme 10], il suffit de prouver que $\mathbb{P}$ est égal à l'identité. On raisonne par l'absurde et on suppose $\mathbb{P}$ différent de l'identité. Alors, d'après l.c., Lemme 11, il existe une représentation unitaire de dimension finie de K, (τ, V_τ) et $\Phi \in \mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ non nulle, se transformant sous A_G par un caractère unitaire et orthogonale à l'image de $\mathbb{P}_\tau$. En particulier, Φ est orthogonale à l'image de $\mathcal{J}^0_P\mathcal{F}^0_P$, $P \in \mathbb{F}$, d'après la définition de $\mathbb{P}_\tau$. Pour $P \in \mathcal{F}$ et $Q \in \mathcal{P}(L_P)$, l'image de $\mathcal{J}^0_P\mathcal{F}^0_P$ est égale à celle de $\mathcal{J}^0_Q\mathcal{F}^0_Q$, elle-même égale à l'image de $\mathcal{J}^0_Q$ (cf. l.c. Th. 5 (i) et (iii)). Donc Φ est orthogonale à l'image de $\mathcal{J}^0_Q$. Soit MA la σ-décomposition de Langlands de $L = L_P$. On construit les intégrales d'Eisenstein pour Q grâce au choix de $\mathcal{W}_M = \mathcal{W}_P$ (voir §0). Soit $\psi = (\psi_w)_{w\in\mathcal{W}_M} \in \mathcal{A}_2(M,\tau)$ et $a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$. On note $\Psi = a \otimes \psi$. Alors

$\mathcal{J}_Q^0\Psi$ est bien défini. On va écrire la valeur de l'intégrale:

$$I := \int_{G/H} (\mathcal{J}_Q^0\Psi(x), \Phi(x))\, dx$$

grâce à la Proposition 3. On fait un choix auxilliaire d'un ensemble de sous-groupes paraboliques standards $\mathcal{F}'_{\text{st}}$ tel que Q soit standard pour la nouvelle notion, ce qui permet de définir un ensemble $\mathcal{W}'_Q$ de représentants de $W_\emptyset^H \backslash W_\emptyset / W_\emptyset^M$ dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ à partir de $\mathcal{F}'_{\text{st}}$. Alors la Proposition 3 montre que I est égale à:

$$\sum\nolimits_{w\in\mathcal{W}'_Q, \lambda\in i\mathfrak{a}^*} (((E^0(Q,\psi,\lambda)_{Q^w,w^{-1}})^0, {}^0\Phi_{Q^w}(-\lambda^{w^{-1}}))^0 \circ w)(\partial)a)(\lambda).$$

Tenant compte du fait que $\mathcal{W}_P$ et $\mathcal{W}'_Q$ sont deux ensembles de représentants de $W_\emptyset^H \backslash W_\emptyset / W_\emptyset^M$ dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ et de la relation simple (du type de celle utilisée dans la démonstration du Lemme 4 (i), avec G au lieu de G^1) entre le terme constant d'une fonction le long de deux éléments de $\mathcal{F}$ conjugés par un élément de $K \cap H$, on voit que l'on peut remplacer, dans l'expression ci-dessus, la somme sur $w \in \mathcal{W}'_Q$ par la somme sur $\mathcal{W}_P$. Tenant compte de la définition des fonctions C^0 et de leurs propriétés ([CD2, (5.1) et (5.3)]) on voit que I est égal à:

$$\sum\nolimits_{w\in\mathcal{W}_P, \lambda\in i\mathfrak{a}^*} ((((\psi_w, {}^0\Phi_{Q^w}(-\lambda^{w^{-1}}))^0 \circ w)(\partial))(a))(\lambda).$$

D'après l'orthogonalité de Φ à l'image de $\mathcal{J}_Q^0$, ceci est nul pour tout $\psi \in \mathcal{A}_2(M,\tau)$ et $a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$. Noter que la somme porte sur un ensemble fini $\mathcal{E}_1$ d'éléments de $i\mathfrak{a}^*$, à savoir ceux pour lesquels ${}^0\Phi_{Q^w}(-\lambda^{w^{-1}})$ est non nul pour au moins un élément w de $\mathcal{W}_P$.

On fixe $\lambda_0 \in \mathcal{E}_1$ et $w \in \mathcal{W}_P$. En choisissant a telle que son support ne rencontre $\mathcal{E}_1$ qu'en λ_0, on conclut facilement, en faisant varier a et ψ, que ${}^0\Phi_{Q^w}(-\lambda_0^{w^{-1}}) \in \mathcal{A}_{\text{temp},c}(L_{Q^w}/L_{Q^w} \cap H, \tau_{|Q^w})$ et ceci pour tout $\lambda_0 \in \mathcal{E}_1$ (ou bien $i\mathfrak{a}^*$) et $w \in \mathcal{W}_P$. On en déduit alors que Φ est nulle grâce au lemme précédent. □

3.3. *Formule de Plancherel pour les fonctions τ-sphériques.* On conserve les notations de 3.1. On note $L^2(G/H,\tau)$ l'espace de Hilbert des fonctions τ-sphériques sur G/H, f, telles que:

$$\int_{G/H} (f(x), f(x))\, dx \ < +\infty.$$

Nous allons maintenant expliciter les conséquences du Théorème 1, grâce aux propriétés de $\mathbb{P}_\tau$ (cf. [CD2, Ths. 5 et 6]).

THÉORÈME 2. (i) *Si P est élément de $\mathbb{F}$, on désigne par $\mathcal{C}(G/H,\tau)^{(P)}$ l'intersection des noyaux des applications $\mathcal{F}_Q^0$ où Q décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}$ distincts de P. Alors cet espace est égal à l'image de $\mathcal{J}_P^0$. De* *plus,* $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ *est la somme directe orthogonale, pour le produit scalaire* L^2, *des espaces* $\mathcal{C}(G/H,\tau)^{(P)}$, $P \in \mathbb{F}$. *On note* $f^{(P)}$ *la projection orthogonale d'un élément* f *de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ *sur* $\mathcal{C}(G/H,\tau)^{(P)}$.

(ii) *La transformation de Fourier normalisée,* $\mathcal{F}^0$, *est un isomorphisme isométrique de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ *sur* $\mathcal{S}^0(\tau)$. *Par restriction, elle définit un isomorphisme isométrique de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)^{(P)}$, $P \in \mathbb{F}$, *sur* $\mathcal{S}_P^0(\tau)$. *Cet isomorphisme est la restriction de* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_P^0$ *et son inverse est égal à* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}_P^0$.

(iii) *Si* f *est un élément de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)$, $f^{(P)}$ *est égal à* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\mathcal{J}_P^0\mathcal{F}_P^0 f$, *soit encore:*

$$f^{(P)}(x) = (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\int_{i\mathfrak{a}_P^*} E^0(P,(\mathcal{F}_P^0 f)(\lambda),\lambda)(x)\,d\lambda, \quad x \in G/H.$$

En outre:

$$f = \sum\nolimits_{P\in\mathbb{F}} f^{(P)}.$$

(iv) *L'application* $\mathcal{F}^0$ *se prolonge en un opérateur unitaire* $\bar{\mathcal{F}}^0$ *entre* $L^2(G/H,\tau)$ *et* $\mathcal{H}^0(\tau)$. *Sa restriction à l'adhérence* $L^2(G/H,\tau)^{(P)}$, $P \in \mathbb{F}$, *de* $\mathcal{C}(G/H,\tau)^{(P)}$ *dans* $L^2(G/H,\tau)$ *est un opérateur unitaire noté* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathcal{F}}_P^0$ *entre* $L^2(G/H,\tau)^{(P)}$ *et* $\mathcal{H}_P^0(\tau)$. *De même* $\mathcal{J}_P^0$ *se prolonge en une application linéaire continue* $\bar{\mathcal{J}}_P^0$ *de* $\mathcal{H}_P^1$ *vers* $L^2(G/H,\tau)^{(P)}$. *La restriction à* $\mathcal{H}_P^0$ *de* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\bar{\mathcal{J}}_P^0$ *est égale à l'inverse de* $\bar{\mathcal{F}}_P^0$.

Démonstration. Les points (i), (ii) et (iii) résultent du Théorème 1 et des propriétés de $\mathbb{P}_\tau$ (cf. Théorèmes 5 et 6 de [CD2]). Pour (iv), l'existence des opérateurs unitaires $\bar{\mathcal{F}}^0$ et $\bar{\mathcal{F}}_P^0$ résulte des points précédents. Par ailleurs, on définit une application linéaire de $\mathcal{S}_P^1(\tau)$ dans $\mathcal{S}_P^0(\tau)$, $\Psi \mapsto \Psi^0$ en posant:

$$M_{P,\tau}\Psi = (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\sum\nolimits_{s\in W(\mathfrak{a}_P)} U_{P,\tau}(s)\Psi. \tag{3.10}$$

Comme les opérateurs $U_{P,\tau}(s)$ sont isométriques, cette application $M_{P,\tau}$ se prolonge en une application linéaire continue $\bar{M}_{P,\tau}$ de $\mathcal{H}_P^1(\tau)$ dans $\mathcal{H}_P^0(\tau)$. On a vu, au cours de la démonstration du Théorème 5 de [CD2], que:

$$\mathcal{J}_P^0\Psi = \mathcal{J}_P^0 M_{P,\tau}\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{S}_P^1(\tau).$$

Soit encore, grâce à (ii):

$$\mathcal{J}_P^0 = (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}(\mathcal{F}_P^0)^{-1} \circ M_{P,\tau}. \tag{3.11}$$

D'où l'on déduit l'existence d'un prolongement continu $\bar{\mathcal{J}}_P^0$ de $\mathcal{J}_P^0$, car $\mathcal{F}_P^0$ est un multiple d'une isométrie, d'après (ii). Le reste est immédiat. □

On va introduire la transformée de Fourier (non normalisée). Si $f \in \mathcal{C}(G/H,\tau)$, $P \in \mathbb{F}$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$, on pose, lorsque cela a un sens:

$$(\mathcal{F}_P f)(\lambda) = C_{P|P}(1,\lambda)^*(\mathcal{F}_P^0 f(\lambda)). \tag{3.12}$$

D'après la détermination des fonctions $C_{P|P}(1, \lambda)$ ([CD2, Prop. 2]) et les propriétés des matrices B ([CD1, Prop. 7]), on voit que $\mathcal{F}_P f(\lambda)$ est définie pour λ élément du complémentaire d'une famille localement finie d'hyperplans affines de $i\mathfrak{a}_P^*$ d'équations $(\lambda, \alpha) = it_\alpha$, où $t_\alpha \in \mathbb{R}$ et α est une racine de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{g}$. Alors, elle est caractérisée par:

$$(3.13) \qquad (\mathcal{F}_P f(\lambda), \psi) = \int_{G/H} (f(x), E(P, \psi, \lambda)(x))\, dx, \quad \psi \in \mathcal{A}_2(M_P, \tau).$$

Cela résulte immédiatement de la définition de E^0. On déduit aisément de la définition de E^0, $\mathcal{F}^0$ et de (3.13), l'égalité:

$$(3.14) \qquad E^0(P, \mathcal{F}_P^0 f(\lambda), \lambda) = E(P, C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}(C_{P|P}(1, \lambda)^{-1})^* \mathcal{F}_P f(\lambda), \lambda).$$

Ceci permet de reformuler (iii) à l'aide des intégrales d'Eisenstein. A noter que l'opérateur $C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}(C_{P|P}(1, \lambda)^{-1})^*$ se diagonalise. En effet, nous allons voir que sur chaque espace $\mathcal{A}_2(M_P, \tau)^\delta$, $\delta \in \hat{M}_P$ (cf. [CD2, (2.10)] pour la définition de cet espace), il est égal à l'homothétie de rapport $\mu_P(\delta, \lambda)$ (voir le paragraphe 3.4 pour la définition de cette fonction, ainsi que pour celle des matrices B). En effet, partant de la Proposition 2 de [CD2] qui donne une expression de $C_{P|P}(1, \lambda)$ à l'aide de la matrice B et utilisant la formule pour l'adjoint de celle-ci (loc. cit. Théorème 2 (iv)), on déduit le résultat de loc. cit., (3.11).

3.4. *Formule de Plancherel pour les fonctions K-finies.* Soit $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands d'un élément L de $\mathcal{L}$, P un élément de $\mathcal{P}(L)$, (δ, V_δ) un élément du dual unitaire de M, et λ un élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On note $(\pi_{\delta,\lambda}^P, I_{\delta,\lambda}^P)$ la série principale généralisée correspondante. Ici $I_{\delta,\lambda}^P$ est l'espace des fonctions C^∞, φ: $G \to V_\delta^\infty$ vérifiant $\varphi(gman) = \delta(m^{-1})a^{-\lambda-\rho_P}\varphi(g), g \in G, m \in M, a \in A, n \in N$, et le groupe G agit par repésentation régulière gauche. La restriction des fonctions à K induit un isomorphisme de $I_{\delta,\lambda}^P$ sur l'espace noté $C^\infty(K, \delta)$, ou I_δ, des fonctions C^∞, φ: $K \to V_\delta^\infty$ vérifiant $\varphi(km) = \delta(m^{-1})\varphi(k), k \in K, m \in M \cap K$. On note $\overline{\pi}_{\delta,\lambda}^P$ la représentation de G dans I_δ déduite de $\pi_{\delta,\lambda}^P$ par transport de structure. Soit w un élément de $\mathcal{W}_M$. On note $\mathcal{V}(\delta, w) := (V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M \cap w^{-1}Hw}$, où le second membre désigne l'espace des vecteurs distributions η de (δ, V_δ), invariants par $M \cap w^{-1}Hw$ et tels que, pour tout $v \in V_\delta^\infty$, la fonction $m \mapsto \langle \delta'(m)\eta, v \rangle$ soit de carré intégrable sur $M/M \cap w^{-1}Hw$. Le produit scalaire L^2 permet de définir un produit scalaire naturel sur cet espace (cf. [CD2, (1.6)]). On note $\mathcal{V}(\delta)$ la somme directe orthogonale des $\mathcal{V}(\delta, w)$ pour $w \in \mathcal{W}_M$.

On suppose que $\mathrm{Re}(\lambda - \rho_P)$ est strictement Δ_P-dominant. Soit $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$. On dispose d'une fonction continue sur G à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$, $j(P, \delta, \lambda, \eta)$, H-invariante à gauche valant η_w pour $w \in \mathcal{W}_P$ et se transformant par $a^{\lambda-\rho_P}\delta'(m^{-1})$ par translation à droite par man, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P$.

Ces propriétés sont caractéristiques de cette fonction qui détermine un vecteur distribution H-invariant de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ (cf. [CD1, (2.4.6)]). On notera $\overline{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ la forme linéaire continue correspondante sur $C^\infty(K,\delta)$. L'application $\lambda \mapsto \overline{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans le dual topologique de $C^\infty(K,\delta)$, qu'on note de même.

Pour φ élément de $C^\infty(K,\delta)$, on définit les "intégrales d'Eisenstein" en posant:

$$E(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)(gH) := \langle \overline{\pi}'^P_{\delta,\lambda}(g)\overline{j}(P,\delta,\lambda,\eta),\varphi\rangle,\ \eta\in\mathcal{V}(\delta),\ g\in G. \tag{3.15}$$

Soit Q un autre élément de $\mathcal{P}(L)$. On note $\lambda\mapsto A(P,Q,\delta,\lambda)$ le prolongement des intégrales d'entrelacement qui envoie $I^Q_{\delta,\lambda}$ dans $I^P_{\delta,\lambda}$. On note $\overline{A}(P,Q,\delta,\lambda)$ l'opérateur correspondant dans la réalisation compacte. Alors $\lambda\mapsto B(Q,P,\delta,\lambda)$ est l'application méromorphe de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans l'espace des endomorphismes de $\mathcal{V}(\delta)$ telle que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (cf. [D1, Th. 2]):

$$A'(P,Q,\delta,\lambda)j(P,\delta,\lambda,\eta) = j(Q,\delta,B(Q,P,\delta,\lambda)\eta). \tag{3.16}$$

Par ailleurs, il existe (cf. [H-C2, Th. 25.1]; voir aussi [W, Th. 10.5.8] et [CD2, après (3.10)] pour une autre démonstration) une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, non identiquement nulle, holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$, $\mu_P(\delta,\lambda)$, telle que l'on ait l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$\overline{A}(P,\overline{P},\delta,\lambda)\overline{A}(\overline{P},P,\delta,\lambda) = \mu_P(\delta,\lambda)^{-1}\mathrm{Id}_{C^\infty(K,\delta)}. \tag{3.17}$$

Ici $\overline{P}$ désigne le sous-groupe parabolique opposé à P. En outre $\mu_P(\delta,\lambda)$ est holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ et positive ou nulle sur $i\mathfrak{a}^*$.

On définit les vecteurs distributions H-invariants normalisés:

$$j^0(P,\delta,\lambda,\eta) := (\overline{A}(P,\overline{P},\delta,\lambda)^{-1})'j(\overline{P},\delta,\lambda,\eta). \tag{3.18}$$

On définit les "intégrales d'Eisenstein" normalisées, $E^0(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)$, en changeant j en j^0 dans la définition des "intégrales d'Eisenstein" (cf. [CD1, 3.4]). Ce sont des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et holomorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\varepsilon}$, pour un $\varepsilon>0$ (cf. [CD2, Prop. 8 (i)]).

Soit $f\in\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ et $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$. Il existe un unique vecteur $(\mathcal{F}^0_P f)(\delta,\lambda)$ de $(I_\delta)_{(K)}\otimes\mathcal{V}(\delta)$ tel que:

$$((\mathcal{F}^0_P f)(\delta,\lambda),\varphi\otimes\eta) = \int_{G/H} f(x)\overline{E^0(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)(x)}\,dx, \qquad \varphi\in(I_\delta)_{(K)},\eta\in\mathcal{V}(\delta). \tag{3.19}$$

On définit l'espace:

$$(\mathcal{S}^1_P)_{(K)} = \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes(\oplus_{\delta\in\hat{M}}((I_\delta)_{(K)}\otimes\mathcal{V}(\delta))) \tag{3.20}$$

sur lequel K opère par représentation régulière sur le premier facteur de chaque terme de la somme (i.e. sur $(I_\delta)_{(K)}$). On note $\mathcal{H}^1_P$ le complété de $(\mathcal{S}^1_P)_{(K)}$ pour le produit scalaire qui, sur chacun des termes de la somme, correspond au produit scalaire naturel sur le produit tensoriel, l'espace $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$ étant muni du produit scalaire L^2, avec notre normalisation des mesures. Le groupe K agit unitairement sur $\mathcal{H}_P^1$. On définit une représentation π_P de $\mathfrak{g}$ dans $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$ en posant:

$$(3.21) \qquad (\pi_P(X)(a \otimes \varphi \otimes \eta))(\lambda) = a(\lambda)(\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}(X)\varphi) \otimes \eta,$$
$$X \in \mathfrak{g},\ \lambda \in i\mathfrak{a}^*,\ a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*), \delta \in \hat{M},\ \varphi \in (I_\delta)_{(K)},\ \eta \in \mathcal{V}(\delta).$$

Alors, $(\mathcal{S}_P^1)_(K)$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module. On définit de manière similaire une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}_P^1$. On remarque que cette représentation de G est unitairement équivalente à la représentation:

$$(3.22) \qquad \hat{\bigoplus}_{\delta \in \hat{M}_P} \int_{i\mathfrak{a}_P^*}^{\oplus} \bar{\pi}^P_{\delta,\lambda} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{V}(\delta)}\, d\lambda$$

dans l'espace:

$$(3.23) \qquad \hat{\bigoplus}_{\delta \in \hat{M}_P} \int_{i\mathfrak{a}_P^*}^{\oplus} I_\delta^2 \otimes \mathcal{V}(\delta)\, d\lambda.$$

Ici $\hat{\bigoplus}$ désigne la somme directe hilbertienne.

On note $\mathcal{F}_P^0$ l'application linéaire de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ dans $(\mathcal{S}_P^1)_(K)$ dont la composante de type δ, $\delta \in \hat{M}$, est l'application $f \mapsto (\mathcal{F}_P^0 f)(\delta, .)$ précédemment définie. C'est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ dans $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$ (cf. [CD2, Prop. 8]).

Avec les notations ci-dessus, il existe une unique application linéaire $\mathcal{J}_P^0$ de $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$ dans $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ telle que, pour tout $\delta \in \hat{M}$, $a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$, $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$ et $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$ on ait:

$$(3.24) \qquad \mathcal{J}_P^0(a \otimes \varphi \otimes \eta)(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} a(\lambda) E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)(x)\, d\lambda.$$

On utilise les notations de [CD2, (8.14)]. On définit, pour $s \in W(\mathfrak{a}_P)$ et $\tilde{s}$ un représentant de s dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, un endomorphisme linéaire $U_P(\tilde{s})$ de $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$ vérifiant, pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$, tout $\delta \in \hat{M}_P$ et $\Psi \in (\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$:

$$(3.25) \quad (U_P(\tilde{s})\Psi)(\delta, \lambda) = \bar{\bar{R}}(\delta^{\tilde{s}^{-1}}, \tilde{s})(A(P^{s^{-1}}, P, \delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda)$$
$$\otimes B(\bar{P}, \bar{P}^{s^{-1}}, \delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda)^{-1})\Psi(\delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda).$$

Soit V_τ un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(K)$, invariant par les translations à gauche et à droite de K. On note τ la représentation régulière droite de K dans V_τ. Si (π, H_π) est une représentation de K, on notera $(H_\pi)_{V_\tau}$ la somme des composantes isotypiques de type $\gamma \in \hat{K}$, où γ est contenu dans la représentation régulière gauche de K dans V_τ. On note $(H_\pi)_{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis de H_π. On regarde l'action régulière gauche de K dans

$C^\infty(G/H)$. A toute fonction $f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}$, on associe l'application de classe C^∞, f_τ de G/H dans V_τ telle que: $(f_\tau(x))(k) = f(kx)$, $k \in K$, $x \in G/H$. Alors $f_\tau \in C^\infty(G/H,\tau)$. Notons l_τ la forme linéaire sur V_τ définie par l'évaluation en l'élément neutre de K. On définit, pour $f \in C^\infty(G/H,\tau)$ une fonction f^τ, de classe C^∞ sur G/H par: $f^\tau(x) = \langle f(x), l_\tau\rangle, x \in G/H$.

L'application $f \mapsto f_\tau$ définit un isomorphisme linéaire de $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ sur $C^\infty(G/H,\tau)$ car: $(f^\tau)_\tau = f, f \in C^\infty(G/H,\tau)$ et $(f_\tau)^\tau = f, f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ (cf. l.c. §8.1). On définit de façon similaire Ψ_τ pour $\Psi \in (\mathcal{S}_P^1)_{V_\tau}$, de même qu'une opération inverse (cf. l.c., (8.13)). En conservant les notations de (3.8), on voit facilement que:

$$U_P(\tilde{s})\Psi = (U_{P,\tau}(s)\Psi_\tau)^\tau, \Psi \in (\mathcal{S}_P^1)_{V_\tau}. \tag{3.26}$$

En particulier $U_P(\tilde{s})$ ne dépend que de s et sera noté $U_P(s)$ par la suite. Le caractère isométrique de $U_P(s)$ résulte de l.c. (8.11) et ce qui suit, joint au fait que $U_{P,\tau}(s)$ est isométrique (voir §3.1, (3.8)). On voit de même que U_P est une représentation de $W(\mathfrak{a}_P)$ dans $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$. On note $(\mathcal{S}_P^0)_{(K)}$ l'espace des invariants sous $W(\mathfrak{a}_P)$ par la représentation U_P.

On note $\mathcal{H}_P^0$ l'adhérence de $(\mathcal{S}_P^0)_{(K)}$ dans $\mathcal{H}_P^1$. Par prolongement continu, on dispose d'une représentation unitaire de $W(\mathfrak{a}_P)$ dans $\mathcal{H}_P^1$. On la note $\bar{U}_P$ et, pour cette action de $W(\mathfrak{a}_P)$, on a:

$$\mathcal{H}_P^0 = (\mathcal{H}_P^1)^{W(\mathfrak{a}_P)}. \tag{3.27}$$

On note $\mathcal{S}_{(K)}^\bullet = \oplus_{P\in\mathbb{F}} (\mathcal{S}_P^\bullet)_{(K)}$, $\mathcal{H}^\bullet = \oplus_{P\in\mathbb{F}} \mathcal{H}_P^\bullet$, où $\bullet$ vaut pour 0 ou 1. Pour $f \in \mathcal{C}(G/H)_{(K)}$, $\mathcal{F}^0 f$ désigne l'élément $((\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_P^0 f)_{P\in\mathbb{F}}$ de $\mathcal{S}_{(K)}^0$.

Soit $\mathcal{J}^0$ l'application linéaire de $\mathcal{S}_{(K)}^0$ dans $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ dont la restriction à $(\mathcal{S}_P^0)_{(K)}$, $P \in \mathcal{F}$, est égale à $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}_P^0$. Alors $\mathcal{J}^0$ et $\mathcal{F}^0$ sont des morphismes de $(\mathfrak{g}, K)$-modules et $\mathcal{J}^0\mathcal{F}^0$ est le projecteur orthogonal $\mathbb{P}$ mentionné dans la preuve du Théorème 1. En fait c'est l'identité d'après ce dernier et le Lemme 10 de [CD2].

THÉORÈME 3. (i) *Si P est un élément de $\mathbb{F}$, on note $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}^{(P)}$ l'intersection des noyaux des applications $\mathcal{F}_Q^0$ où Q décrit les éléments de $\mathbb{F}$ distincts de P. Cette intersection est égale à l'image de $\mathcal{J}_P^0$. En outre $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ est la somme directe orthogonale (pour le produit scalaire L^2) des $(\mathfrak{g},K)$-modules $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}^{(P)}$. On note $f^{(P)}$ la projection orthogonale de l'élément f de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ sur $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}^{(P)}$.*

(ii) *La transformation de Fourier normalisée $\mathcal{F}^0$ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ sur $\mathcal{S}_{(K)}^0$. Par restriction, elle définit un isomorphisme isométrique de $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}^{(P)}$ sur $(\mathcal{S}_P^0)_{(K)}$. Cet isomorphisme est la restriction de $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_P^0$ et son inverse est égal à $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}_P^0$.*

(iii) *L'application* $\mathcal{F}^0$ *se prolonge en un opérateur unitaire* $\bar{\mathcal{F}}^0$ *entre* $L^2(G/H)$ *et* $\mathcal{H}^0$. *La restriction de* $\bar{\mathcal{F}}^0$ *à l'adhérence* $L^2(G/H)^{(P)}$, $P \in \mathbb{F}$, *de* $\mathcal{C}(G/H)^{(P)}_{(K)}$ *dans* $L^2(G/H)$ *est un opérateur unitaire noté* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\bar{\mathcal{F}}^0_P$ *entre* $L^2(G/H)^{(P)}$ *et* $\mathcal{H}^0_P$ *qui prolonge* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}^0_P$. *De même,* $\mathcal{J}^0_P$ *se prolonge en une application linéaire continue* $\bar{\mathcal{J}}^0_P$ *de* $\mathcal{H}^1_P$ *dans* $L^2(G/H)^{(P)}$. *La restriction à* $\mathcal{H}^0_P$ *de* $(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1}\bar{\mathcal{J}}^0_P$ *est égale à l'inverse de* $\bar{\mathcal{F}}^0_P$.

(iv) *On a l'égalité:*

$$\bar{\mathcal{F}}^0_P f(\delta,\lambda) = \sum_{i=1}^{\dim\ \mathcal{V}(\delta)} (\pi^P_{\delta,\lambda})^*(f) j^0(P,\delta,\lambda,\eta_i)^* \otimes \eta_i\ ,$$
$$f \in \mathcal{C}(G/H),\ \delta \in \hat{M}_P,\ \lambda \in i\mathfrak{a}^*_P.$$

Ici, (η_i) *est une base orthonormée de* $\mathcal{V}(\delta)$. *Pour la signification des* $*$, *voir plus loin le paragraphe* 5, (5.1) *et* (5.2) *en particulier.*

En outre $\bar{\mathcal{F}}^0_P$ *et* $\bar{\mathcal{J}}^0_P$ *sont des morphismes de G-modules.*

(v) *Soit* δ_{eH} *la mesure de Dirac en* eH *sur* G/H. *On a l'égalité de vecteurs distributions sur* $\mathcal{H}^1_P$:

$$\delta_{eH} \circ \bar{\mathcal{J}}^0_{P|(\mathcal{H}^1_P)^\infty} = \sum_{P\in\mathbb{F},\delta\in\hat{M}_P} \sum_{i=1}^{\dim\ \mathcal{V}(\delta)} \int^{\oplus}_{i\mathfrak{a}^*_P} j^0(P,\delta,\lambda,\eta_i) \otimes \eta_i\, d\lambda$$

où il fait partie de l'assertion que le membre de droite définit un vecteur distribution sur $\mathcal{H}^1_P$. *Ici on regarde* η_i *comme une forme linéaire sur* $\mathcal{V}(\delta)$ *grâce au produit scalaire.*

(vi) *Pour* $f \in \mathcal{C}(G/H)$ *on a:*

$$f(e) = \sum_{P\in\mathbb{F},\delta\in\hat{M}_P} \sum_{i=1}^{\dim\ \mathcal{V}(\delta)} (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \int_{i\mathfrak{a}^*_P} {}^0_P\Theta^{\eta_i,\eta_i}_{\delta,\lambda}(f)\, d\lambda$$

où (η_i) *est une base orthonormée de* $\mathcal{V}(\delta)$ *et* ${}^0_P\Theta^{\eta_i,\eta_i}_{\delta,\lambda}$ *est la distribution (tempérée) sur* G/H *qui, avec les notations du* §5.1, *est définie par:*

$$ {}^0_P\Theta^{\eta_i,\eta_i}_{\delta,\lambda}(f) = ((\pi^P_{\delta,\lambda})^*(f) j^0(P,\delta,\lambda,\eta_i)^*,\ j^0(P,\delta,\lambda,\eta_i))\ ,$$
$$f\ \in \mathcal{C}(G/H),\ \delta \in \hat{M}_P,\ \ \lambda \in i\mathfrak{a}^*_P.$$

Démonstration. Les points (i) à (iii) se démontrent comme les points correspondants du Théorème 2.

La formule du point (iv) est immédiate lorsque $f \in C^\infty_c(G/H)_{(K)}$, grâce à la définition de $\mathcal{F}^0_P$ (cf. (3.19)) et des "intégrales d'Eisenstein" (cf. (3.15)). Mais d'après (iii), le premier membre de cette formule est continu en $f \in \mathcal{C}(G/H)$. Par ailleurs, l'holomorphie de j^0 et sa tempérance faible pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ ([CD2, Th. 3 et son corollaire]), jointe au Lemme 5 (voir plus loin, §5) montre qu'il en va de même du second membre. L'égalité voulue en résulte par densité.

Le fait que la restriction de $\bar{\mathcal{F}}^0_P$ à $\mathcal{C}(G/H)$ est un morphisme de G-modules résulte immédiatement de cette formule. Par densité et continuité, on en déduit que $\bar{\mathcal{F}}_P^0$ est un morphisme de G-modules. Soit

$$\bar{M}_P = (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_P)} \bar{U}_P(s)$$

qu'on regarde comme un opérateur linéaire continu de $\mathcal{H}_P^1$ dans $\mathcal{H}_P^0$. On vérifie aisément sur la définition de U_P (cf. (3.25)) et $\bar{U}_P$, que $\bar{U}_P$ commute avec l'action de G sur $\mathcal{H}_P^1$. Donc $\bar{M}_P$ est un entrelacement de G-modules. De plus, tenant compte de (3.26), de la formule précédent (3.11) et de l.c. Proposition 9 (ii), on voit facilement que:

$$\bar{\mathcal{J}}_P^0 = \bar{\mathcal{J}}_P^0 \circ \bar{M}_P. \tag{3.28}$$

On déduit alors de (iii) que:

$$\bar{\mathcal{J}}_P^0 = (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1} (\bar{\mathcal{F}}_P^0)^{-1} \circ \bar{M}_P. \tag{3.29}$$

L'équivariance sous G de $\bar{\mathcal{J}}_P^0$ résulte alors des propriétés analogues de $\bar{M}_P$ et $\bar{\mathcal{F}}_P^0$. Cela achève de prouver (iv).

(v) Il est bon de noter qu'on déduit aisément de la théorie de la série discrète que les éléments δ de $\hat{M}_P$ pour lesquels $\mathcal{V}(\delta)$ n'est pas nul forment un sous-ensemble dénombrable de $\hat{M}$ (où $M = M_P$), qu'on notera $\hat{M}_{H,d}$. Alors, le second membre de l'égalité de (v) définit un champ mesurable sur $\hat{M}_{H,d} \times i\mathfrak{a}_P^*$ de vecteurs distributions de l'intégrale hilbertienne (3.22) de représentations de G. On note ce champ $\xi(\delta, \lambda)$. On note par ailleurs $\hat{\bigoplus}_{\delta \in \hat{M}_{H,d}} \int_{i\mathfrak{a}_P^*}^{\oplus} \xi^1(\delta, \lambda)\, d\lambda$ la désintégration en vecteurs distributions de $\delta_{eH} \circ \bar{\mathcal{J}}^0_{P|(\mathcal{H}_P^1)^\infty} \in (\mathcal{H}_P^1)^{-\infty}$. Pour tout $\delta \in \hat{M}$ (ou $\hat{M}_{H,d}$), $a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*)$, $v \in (I_\delta)_{(K)}$ et $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$, la formule (3.24) montre que l'on a l'égalité:

$$(\delta_{eH} \circ \mathcal{J}_P^0)(a \otimes v \otimes \eta) = \int_{i\mathfrak{a}_P^*} a(\lambda) \langle \xi(\delta, \lambda), v \otimes \eta \rangle \, d\lambda,$$

l'intégrale dans le second membre étant absolument convergente. Il en résulte la convergence absolue et la nullité de l'intégrale:

$$\int_{i\mathfrak{a}_P^*} a(\lambda) \langle \xi(\delta, \lambda) - \xi^1(\delta, \lambda), v \otimes \eta \rangle \, d\lambda$$

pour $\delta \in \hat{M}$, $a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*)$, $v \in (I_\delta)_{(K)}$ et $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$. L'intégrabilité locale de la fonction $\lambda \mapsto \langle \xi(\delta, \lambda) - \xi^1(\delta, \lambda), v \otimes \eta \rangle$ en résulte facilement ainsi que sa nullité presque partout. On en déduit facilement que les champs ξ et ξ^1 sont égaux presque partout. Alors (v) en résulte.

Démontrons (vi). Partant de (iii), on a l'égalité de fonctions C^∞:

$$f = \sum_{P \in \mathbb{F}} (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \bar{\mathcal{J}}_P^0 \bar{\mathcal{F}}_P^0(f)$$

pour $f \in \mathcal{C}(G/H)$, car $f \in L^2(G/H)^\infty$. Utilisant (iv) et (v) on obtient le résultat voulu. □

On peut introduire les analogues non normalisés des distributions ${}_P^0\Theta_{\delta,\lambda}^{\eta_i,\eta_j}$. Plus précisément, pour $P \in \mathbb{F}$, $\delta \in \hat{M}_P$, $\eta, \eta' \in \mathcal{V}(\delta)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$, on pose, lorsque $j(P,\delta,\lambda,\eta)$, $j(P,\delta,\lambda,\eta')$ sont bien définis:

$$ {}_P\Theta_{\delta,\lambda}^{\eta,\eta'}(f) = ((\pi_{\delta,\lambda}^P)^*(f)j(P,\delta,\lambda,\eta')^*, j(P,\delta,\lambda,\eta)), \qquad f \in \mathcal{C}(G/H). $$

On a alors:

Corollaire du Théorème 3. *Pour $f \in \mathcal{C}(G/H)$ on a:*

$$ f(eH) = \sum\nolimits_{P\in\mathbb{F}} \sum\nolimits_{\delta\in\hat{M}_P} \sum\nolimits_{i=1}^{\dim \mathcal{V}(\delta)} (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} {}_P\Theta_{\delta,\lambda}^{\eta_i,\eta_i}(f)\ \mu_P(\delta,\lambda)\ d\lambda. $$

Ici les intégrales sont absolument convergentes.

Démonstration. Utilisant la formule (3.14) de [CD2], on exprime ${}_P^0\Theta$ à l'aide de ${}_P\Theta$. On conclut grâce à l'égalité de fonctions méromorphes en λ:

$$ (B(\bar{P},P,\delta,\lambda)^{-1})^* B(\bar{P},P,\delta,\lambda)^{-1} = \mu_P(\delta,\lambda)\mathrm{Id}_{\mathcal{V}_\delta} $$

égalité qui résulte de l.c. (3.11) et Théorème 2 (iv). □

3.5. *Action de $\mathbb{D}(G/H)$.* Pour $P \in \mathbb{F}$, on va définir sur $\mathcal{S}_P^1(\tau)$ (resp. $(\mathcal{S}_P^1)_{(K)}$) une action de $\mathbb{D}(G/H)$ telle que $\mathcal{F}_P^0$ entrelace l'action de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ (resp. $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$) avec celle-ci. On note L au lieu de L_P (etc.). Pour $w \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, on introduit le morphisme $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}^w$ de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L/L\cap w^{-1}Hw)$ comme suit. On note $L^w := wLw^{-1}$, $\mathfrak{l}^w = \mathrm{Ad}\, w(\mathfrak{l})$. Alors on introduit $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}^w}$ l'homomorphisme de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L^w/L^w\cap H)$ défini par exemple dans [D1, (2.1.2)]. Alors $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}^w$ est la composée de $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}^w}$ et de $\mathrm{Ad}\, w^{-1}$ qui envoie $\mathbb{D}(L^w/L^w\cap H)$ sur $\mathbb{D}(L/L\cap w^{-1}Hw)$. Soit $\lambda \in i\mathfrak{a}_P^*$ et $D \in \mathbb{D}(G/H)$. On définit un endomorphisme, $\omega_\tau(D)(\lambda)$, de $\mathcal{A}_2(M,\tau)$ par:

$$ ((\omega_\tau(D))(\lambda)\psi)_w = \omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}^w(D)(\lambda)\psi_w, \qquad \psi \in \mathcal{A}_2(M,\tau). \tag{3.30} $$

Alors on a:

$$ DE(P,\psi,\lambda) = E(P,\omega_\tau(D)(-\lambda)\psi,\lambda), \qquad \psi \in \mathcal{A}_2(M,\tau). \tag{3.31} $$

En effet, par linéarité, on peut (avec les notations de [CD2, (2.6), (2.12)]) se ramener à ψ de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$. Dans ce cas, cela résulte de [CD2, (3.4)], d'après le résultat correspondant pour les "intégrales d'Eisenstein" (cf. [D1, (2.1.3), Prop. 3 et démonstration du Lemme 19]) et en utilisant [CD2, éq. (3.3) et (3.4)].

On définit alors une action notée $\check{\omega}_\tau$ de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathcal{S}^1(\tau) := \oplus_{P\in\mathbb{F}} \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*) \otimes \mathcal{A}_2(M_P,\tau)$ définie par:

$$ (\check{\omega}_\tau(D)(a\otimes\psi))(\lambda) = a(\lambda)\omega_\tau(D)(-\lambda)\psi, \qquad D \in \mathbb{D}(G/H), \tag{3.32} $$
$$ P \in \mathbb{F},\ a \in \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*),\ \psi \in \mathcal{A}_2(M_P,\tau). $$

On va définir de façon similaire une action de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $(\mathcal{S}^1_P)_{(K)}$. D'abord, si $P \in \mathbb{F}$, $\delta \in \hat{M}_P$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_P$, on définit une action linéaire de $\mathbb{D}(G/H)$, $\omega_{\delta,\lambda}$, sur $\mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}_P}$ par:

$$(3.33) \qquad (\omega_{\delta,\lambda}(D)\eta)_w = \omega^w_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(D)(\lambda)\eta_w, \qquad \eta \in \mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}_P},\ \lambda \in i\mathfrak{a}^*_P,\ w \in \mathcal{W}_P.$$

On définit alors une action linéaire, notée $\check{\omega}$, de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $\mathcal{S}^1_{(K)} := \oplus_{P\in\mathbb{F},\delta\in\hat{M}_P} \mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*_P) \otimes (I_\delta)_{(K)} \otimes \mathcal{V}(\delta)_{\mathcal{W}_P}$ en posant:

$$(3.34) \qquad (\check{\omega}(D)(a \otimes \varphi \otimes \eta))(\lambda) = a(\lambda)\varphi \otimes \omega_{\delta,-\lambda}(D)\eta.$$

PROPOSITION 4. *$\mathcal{F}^0$ entrelace l'action naturelle de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $\mathcal{C}(G/H,\tau)$ (resp. $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$) avec l'action $\check{\omega}_\tau$ (resp. $\check{\omega}$) sur $\mathcal{S}^1(\tau)$ (resp. $\mathcal{S}^1_{(K)}$).*

Démonstration. On déduit de la définition de $\mathcal{F}^0_P$, $P \in \mathbb{F}$ et de (3.31) que, pour $f \in \mathcal{C}(G/H,\tau)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*_P$, $D \in \mathbb{D}(G/H)$:

$$(3.35) \qquad (\mathcal{F}^0_P(Df))(\lambda) = (\omega_\tau(D^*)(-\lambda))^*(\mathcal{F}^0_P f)(\lambda).$$

Il nous faut déterminer $(\omega_\tau(D^*)(-\lambda))^*$. D'après la formule (3.30), il suffit de calculer $(\omega^w_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(D^*)(-\lambda))^*$. Pour $w = 1$, en utilisant le Lemme 4 de [D2], et (2.1.3) de [D1], on voit que $(\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(D^*)(-\lambda))^* = \omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(D)(-\lambda)$. On étend facilement le résultat pour w quelconque et l'on en déduit que:

$$(3.36) \qquad (\omega_\tau(D^*)(-\lambda))^* = \omega_\tau(D)(-\lambda).$$

Joint à (3.35), cela donne le résultat pour $\mathcal{C}(G/H,\tau)$. Le résultat pour $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ s'en déduit en utilisant la relation (8.10) de [CD2] et le fait que, avec les notations de 3.5, on a:

$$(Df)_\tau \;=\; D(f_\tau), \quad D \in \mathbb{D}(G/H),\ f \in \mathcal{C}(G/H)_{V_\tau}. \qquad \square$$

4. Compléments

4.1. *Sur les facteurs de Plancherel.* Quitte à changer d'involution σ, on est amené à déterminer $\mu_P(\delta,\lambda)$ lorsque δ est une série discrète de $M/M\cap H$, où P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable et $M = M_P$. Pour cela, il suffit de plonger δ dans une série principale correspondant à un sous-groupe parabolique minimal de M (dite série principale minimale). En effet, les facteurs de Plancherel sont connus pour ces séries (par réduction aux groupes de rang un) et les facteurs $\mu_P(\delta,\lambda)$ s'obtiennent par réduction (cf. [KSt, Prop. 10.2]). On peut, pour résoudre ce problème de plongement, supposer que $M = G$, ce que nous ferons désormais. Comme H/H^0 est fini, les séries discrètes de G/H sont des séries discrètes de G/H^0 et l'on peut se réduire à H connexe, ce que l'on suppose par la suite. Soit δ une série discrète de G/H. Alors, par restriction des fonctions de G/H à G^0/H, on obtient un morphisme de G^0-modules entre δ et une série discrète δ^0 de G^0/H. Par réciprocité de Frobenius, cela donne un morphisme de G-modules entre δ et l'induite unitaire de G^0 à G de la représentation δ^0. L'induction par étages nous permet alors de réduire notre problème de plongement au cas où G est connexe. Enfin, on se ramène facilement au cas où G est de centre fini.

Ce qui précède montre que la détermination des facteurs de Plancherel se réduit à la détermination d'une injection d'une série discrète de G/H, avec G et H connexes, G de centre fini, dans une série principale minimale de G.

4.2. *Le cas de $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.* On va étudier le cas où G est un groupe réductif complexe connexe et σ la conjugaison par rapport à une forme réelle. La formule d'inversion de Fourier est due dans ce cas à P. Harinck [H2, Th. 7.4].

On va expliciter les éléments de notre formule. Les deux propositions qui suivent, jointes au corollaire du Théorème 3, conduisent à une formule très similaire à celle de P. Harinck, la comparaison des vecteurs distributions H-invariants restant à compléter.

D'abord on va voir que les séries discrètes sont des séries principales minimales unitaires. On se ramène à H connexe et G semi-simple, ce que l'on suppose dans la suite. Dans ce cas, d'après [OM], G/H admet des séries discrètes si et seulement si l'algèbre de Lie de H est une forme réelle déployée de $\mathfrak{g}$, ce que l'on suppose désormais. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t} = i\mathfrak{a}$. Soit T (resp. A) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ (resp. $\mathfrak{a}$) et $P = TAN$ un sous-groupe parabolique minimal de G contenant TA. Il est σ-stable. On note W le groupe de Weyl du système de racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$ qui s'identifie à celui de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathbb{D}(G/H)$ s'identifie à $S(\mathfrak{t})^W$. Pour $\Lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}}$, on note V_Λ l'adhérence dans $L^2(G/H)$ de l'espace $(V_\Lambda)_{(K)}$ des fonctions C^∞ et de carré intégrable sur G/H, K-finies et propres sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre Λ. On peut se ramener au cas où la partie imaginaire de Λ, identifiée à un élément de $\mathfrak{a}^*$, est P-dominante, ce que l'on fait désormais. Alors, il résulte de [OM] que si V_Λ est non nul, on a:

(4.1) *Λ est élément du réseau engendré par les plus hauts poids des représentations irréductibles de K ayant un vecteur invariant non nul sous $K \cap H$*

et

(4.2) *Λ est régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}$.*

PROPOSITION 5. *Si Λ vérifie* (4.1) *et* (4.2), *V_Λ est isomorphe à la série principale unitairement induite par le caractère de P trivial sur AN et dont la restriction à T admet Λ pour différentielle.*

Démonstration. On va utiliser la Proposition 8 de [D1] en y prenant $M = G$. On remarque que dans la démonstration de celle-ci on ne se sert que des propriétés (4.1) et (4.2) de Λ. On en déduit que si Λ est comme dans l'énoncé et $\tilde{\Lambda}$ comme dans la Proposition 8 de [D1], on a, avec les notations de celle-ci:

$$p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F_1) = V_{\Lambda}^{\infty}. \tag{4.3}$$

Mais en prenant n assez grand dans l.c. (ii), on voit, grâce à [S, Th. 6.1], que $V_{\tilde{\Lambda}}$ est de la forme annoncée. En effet on peut prendre G^d égal à G et H^d égal à nouveau à H. Les orbites fermées de H^d dans G^d/P correspondent à des orbites de sous-groupes paraboliques minimaux σ-stables. Ceux-ci sont tous conjugués entre eux sous H^d. Il n'y a donc qu'une seule orbite fermée de H^d dans G^d/P. Alors, tenant compte de [OM] et [V], on voit que si $V_{\tilde{\Lambda}}$ (ou V_Λ) est non nul, c'est une représentation irréductible de G. Par ailleurs, on note que dans [S, §4], $\rho - 2\rho_c$ est nul. Enfin, pour n assez grand, $\tilde{\Lambda}$ satisfait la condition (6.1) du Théorème 6.1 de [S] d'où l'on déduit le résultat voulu pour $V_{\tilde{\Lambda}}$. Mais V_Λ est irréductible ou nul, d'après ce qui précède. Par ailleurs, grâce à (4.3) et en utilisant une P-filtration de F_1, on voit que V_Λ est non nul et contient la série principale voulue. La proposition en résulte. □

On revient à la situation du début du paragraphe mais on suppose G semi-simple, complexe, connexe, simplement connexe. Si $P \in \mathbb{F}$ donne une contribution non nulle à la formule de Plancherel, il existe $w_0 \in \mathcal{W}_P$ tel que $M_P/M_P \cap w_0^{-1}Hw_0$ possède des séries discrètes. Notant $Q := w_0 P w_0^{-1}$, ce dernier est un élément de $\mathcal{F}$ tel que $M_Q/M_Q \cap H$ possède des séries discrètes. On veut déterminer $\mathcal{V}(\delta)$ pour δ élément de $\hat{M}_P$. Par transport de structure on se ramène à faire le travail en remplaçant M_P par M_Q. On note M au lieu de M_Q dans la suite.

Précisons les notations. L'espace $\mathfrak{a}_\emptyset$ est égal à $i\mathfrak{t}_f$, où $\mathfrak{t}_f$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$. On complète $\mathfrak{t}_f$ en une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{j}_f = \mathfrak{t}_f \oplus \mathfrak{a}_f$, où $\mathfrak{a}_f$ est contenu dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$.

Le fait que $M/M \cap H$ possède des séries discrètes se traduit par le fait qu'il existe une sous-algèbre de Cartan θ-stable de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{j}_0$, telle que, notant $\mathfrak{a}_0$ (resp. $\mathfrak{t}_0$) son intersection avec $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{k}$), on ait $\mathfrak{a}_Q$ égal à $i\mathfrak{t}_0$. On note $W_G(\mathfrak{j}_0)$ le quotient du normalisateur dans G de $\mathfrak{j}_0$, $N_G(\mathfrak{j}_0)$ par son centralisateur $Z_G(\mathfrak{j}_0)$. On a des notations similaires en remplaçant G par un sous-groupe et $\mathfrak{j}_0$ par un autre sous-espace de $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 6. *On note $\mathcal{W}_M^0$ l'ensemble formé des éléments w de $\mathcal{W}_M$ tels que $M/M \cap w^{-1}Hw$ possède des séries discrètes.*

(i) *Si w est un élément de $\mathcal{W}_M^0$, il existe un élément x de $N_G(\mathfrak{j}_0) \cap Z_G(\mathfrak{a}_0)$ tel que HwP soit égal à HxP.*

Cette correspondance détermine par passage au quotient une bijection entre $\mathcal{W}_M^0$ et $W_H(\mathfrak{j}_0) \setminus W_G(\mathfrak{j}_0)$.

(ii) *Si* δ *est un élément de* $\hat{M}$, *on a* $\mathcal{V}(\delta,w) = 0$ *pour tout* $w \notin \mathcal{W}_M^0$. *De plus on a, ou bien, pour tout* $w \in \mathcal{W}_M^0$, $\mathcal{V}(\delta,w) = 0$, *ou bien pour tout* $w \in \mathcal{W}_M^0$, $\mathcal{V}(\delta,w) \approx \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}_1$ le sous-espace de $\mathfrak{a}_0$ tel que le centre de $\mathfrak{m}$ ($= \mathfrak{m}_Q$) soit égal à $(\mathfrak{a}_1)_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_0$. Soit $w \in \mathcal{W}_M^0$. Alors $M/M \cap w^{-1}Hw$ a des séries discrètes. Ceci équivaut aux deux conditions suivantes:

(1) Notant M_{der} le sous groupe dérivé de M, $M_{\text{der}}/M_{\text{der}} \cap w^{-1}Hw$ est une forme réelle déployée de M_{der}.

(2) Le quotient du centre de M par son intersection avec $w^{-1}Hw$ est compact.

Traduisons d'abord cette dernière condition. Comme $\mathfrak{t}_0$ est inclus dans $\mathfrak{t}_f$, l'involution σ_w (cf. le début de 3.1) fixe les éléments de $\mathfrak{t}_0$ et laisse donc invariante $\mathfrak{m}$ et le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$. L'algèbre de Lie de $Z(M) \cap w^{-1}Hw$ est l'ensemble des points fixes par σ_w de $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})^{\sigma_w}$. Elle est également stable par θ. La condition (2) implique que $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})^{\sigma_w}$ contient un supplémentaire dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$ de $i\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{t}_0$, qui est l'algèbre de Lie du plus grand sous-groupe compact connexe du centre de M. La stabilité de $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})^{\sigma_w}$ sous θ implique que ce supplémentaire peut être choisi θ-stable, donc égal à $\mathfrak{a}_1$. On vient donc de voir que les éléments de $\mathfrak{a}_1$ sont fixés par σ_w, c'est à dire que Ad w $(\mathfrak{a}_1)$ est inclus dans $\mathfrak{h}$.

Revenons à la condition (2). Soit $u \in M_{\text{der}}$ qui conjugue les deux formes réelles déployées de M_{der}, $M_{\text{der}} \cap H$ et $M_{\text{der}} \cap w^{-1}Hw$. Soit $\mathfrak{a}_1^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{a}_0$, pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}_1^{\perp}$ (resp. $u(\mathfrak{a}_1^{\perp})$) est une sous-algèbre de Cartan déployée de l'algèbre de Lie de $M_{\text{der}} \cap H$ (resp. $M_{\text{der}} \cap w^{-1}Hw$). On en déduit que (Ad $wu)(\mathfrak{a}_1^{\perp})$ est contenu dans $\mathfrak{h}$. Par ailleurs Ad w $(\mathfrak{t}_f)$ est inclus dans $\mathfrak{t}_f$ puisque w normalise $\mathfrak{a}_\emptyset$. Donc Ad w $(\mathfrak{t}_0)$ est inclus dans $\mathfrak{h}$.

Enfin, comme u est élément de M_{der}, il fixe les éléments de $\mathfrak{t}_0$ et de $\mathfrak{a}_1$. Joint à ce qui précède, cela implique que (Ad $wu)(\mathfrak{j}_0)$ est contenu dans $\mathfrak{h}$. C'est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ conjuguée à $\mathfrak{j}_0$ par un élément de G, donc aussi par un élément de H, d'après les propriétés des sous-algèbres de Cartan. On vient de prouver l'existence de $v \in H$ tel que (Ad $vwu)(\mathfrak{j}_0) = \mathfrak{j}_0$. Notant $x_1 = vwu$, on a $x_1 \in N_G(\mathfrak{j}_0)$ et $HwQ = Hx_1Q$.

On note L_1 le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_0$, $Z_G(\mathfrak{a}_0)$. On sait que l'application naturelle de $W_{L_1}(\mathfrak{j}_0)$ dans $W_H(\mathfrak{j}_0) \setminus W_G(\mathfrak{j}_0)$ détermine par passage au quotient une bijection de source $W_{L_1 \cap H}(\mathfrak{j}_0) \setminus W_{L_1}(\mathfrak{j}_0)$ (cf. [H1, §1.4]). Ceci permet de remplacer x_1 par un élément x de $N_{L_1}(\mathfrak{j}_0)$ qui satisfait $HwQ = HxQ$. D'où l'on déduit la correspondance annoncée dans (i).

On va montrer l'injectivité de l'application qu'on en déduit de $\mathcal{W}_M^0$ dans $W_H(\mathfrak{j}_0) \setminus W_G(\mathfrak{j}_0)$. Pour cela il suffit de voir que si $x, y \in N_{L_1}(\mathfrak{j}_0)$ sont tels que

$HxQ = HyQ$, alors xy^{-1} détermine un élément de $W_H(\mathfrak{j}_0)$. Cela prouvera aussi que l'image de x dans $W_H(\mathfrak{j}_0) \setminus W_G(\mathfrak{j}_0)$ est complètement déterminée par HxQ, et donc, avec les notations ci-dessus, ne dépend pas du choix de x tel que $HwQ = HxQ$. Quitte à changer Q en yQy^{-1}, on se ramène à $y = e$.

Si α est une racine imaginaire non compacte de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$, on note H_α la coracine de α et on choisit un vecteur de poids α (resp. $-\alpha$), X_α (resp. $X_{-\alpha}$) de sorte que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $\sigma(X_\alpha) = X_{-\alpha}$. On pose $g_\alpha = \exp\ \frac{\pi}{2}(X_\alpha - X_{-\alpha})$. Alors Ad g_α induit sur $\mathfrak{j}_0$ la réflexion par rapport à α et $\sigma(g_\alpha)^{-1}g_\alpha = g_\alpha^2 = \exp\ i\pi H_\alpha$. Alors, d'après [H1, Lemme 1.6], il existe un élément h de $N_{L_1 \cap H}(\mathfrak{j}_0)$, un élément l de $Z_G(\mathfrak{j}_0)$ et un ensemble de racines imaginaires non compactes, ψ, deux à deux fortement orthogonales tels que $x = hg_\psi l$, où g_ψ est égal au produit des g_α, $\alpha \in \psi$. On remarque que ces derniers commutent deux à deux. Mais alors on voit que g_ψ vérifie les mêmes hypothèses que x et que l'on peut prendre x égal à g_ψ, ce que l'on fait dans la suite.

Il résulte de ce qui précède que $\sigma(x)^{-1}x$ est égal au produit des $\exp\ i\pi H_\alpha$, $\alpha \in \psi$, donc c'est un élément de H qui centralise $\mathfrak{j}_0$. On note L le centralisateur dans G de $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_Q$. Par ailleurs, comme x appartient à HQ, on peut écrire $x = hm(\exp\ X)n$ où $h \in H$, $m \in M$, $X \in i\mathfrak{t}_0$, $n \in N_Q$. Alors $\sigma(x)^{-1}x$ est égal à $\sigma(n)^{-1}\sigma(m)^{-1}m\ \exp\ 2X\ n$. Comme c'est un élément de $L \cap H$ et que l'application de $\theta(N_Q) \times L \times N_Q$ dans G, qui à (u, l, n) associe uln, est un difféomorphisme sur son image, on a $n = e$ puis $X = 0$. Donc $x = hm$. Comme $x = g_\psi$, il centralise $\mathfrak{a}_0$. Alors Ad $m(\mathfrak{a}_0)$ est égal à Ad $h^{-1}(\mathfrak{a}_0)$, et est donc contenu dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ (car c'est le cas de $\mathfrak{a}_0$) qui est conjuguée de $\mathfrak{a}_0$ par l'élément m de M, donc aussi par un élément m' de $M \cap H$. Alors $m'^{-1}m$ est un élément de M qui induit un élément du groupe de Weyl de $\mathfrak{a}_0$ dans $\mathfrak{m}$. Celui-ci peut être induit par un élément de $M \cap H$. Donc, quitte à changer m' dans $M \cap H$, on peut supposer que $\mathrm{Ad}(m'^{-1}m)$ est trivial sur $\mathfrak{a}_0$. Comme $x = hm'm'^{-1}m$ et que $m'^{-1}m$ centralise $\mathfrak{t}_0$ comme élément de $M \cap H$, l'élément hm' de H induit sur $\mathfrak{j}_0$ la même action que x. Ce que l'on voulait démontrer.

Notre application est bien injective. Montons qu'elle est surjective. Grâce à [H1, 1.4 et Lemme 1.5], on est ramené à démontrer que tout élément x de $W_G(\mathfrak{j}_0)$ induit par un élément de la forme g_ψ, où ψ est un ensemble de racines imaginaires non compactes deux à deux fortement orthogonales, est un élément de l'image de notre application. A l'aide de transformations de Cayley, on peut construire c élément de L, qui conjugue les sous-algèbres de Cartan $(\mathfrak{j}_f)_\mathbb{C}$ et $(\mathfrak{j}_0)_\mathbb{C}$, qui envoie l'orthogonal de $\mathfrak{t}_0$ dans $(\mathfrak{j}_f)_\mathbb{C}$ sur $(\mathfrak{a}_0)_\mathbb{C}$ et qui induit l'identité sur $\mathfrak{t}_0$. Alors $\tilde{g}_\psi := c^{-1}g_\psi c$ est un élément de G qui induit l'identité sur l'orthogonal de $\mathfrak{t}_0$ dans $(\mathfrak{j}_f)_\mathbb{C}$ et coincide avec g_ψ sur $\mathfrak{t}_0$. Alors $\tilde{g}_\psi$ normalise $\mathfrak{t}_f$. De plus $\tilde{g}_\psi g_\psi^{-1}$ est un élément de L, et l'on a $H\tilde{g}_\psi Q = Hg_\psi Q$. On note w_1 la restriction de Ad $\tilde{g}_\psi$ à $\mathfrak{a}_\emptyset = i\mathfrak{t}_f$. Soit w l'élément $\mathcal{W}_M$ qui représente la

$(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-double classe contenant w_1. En utilisant la définition de w, il est facile de voir que l' espace symétrique $M/M \cap w^{-1}Hw$ est conjugué par un élément de M à $M/M \cap \tilde{g}_\psi^{-1}H\tilde{g}_\psi$, puis que ce dernier est conjugué par $\tilde{g}_\psi$ à $M/M \cap H$, car $\tilde{g}_\psi$ normalise $\mathfrak{t}_0$ donc M. Donc $M/M \cap w^{-1}Hw$ a des séries discrètes comme $M/M \cap H$, w est un élément de $\mathcal{W}_L^0$ et x est égal à l'image de w par notre application. Notre application est donc bijective.

Montrons (ii). Soit $w \in \mathcal{W}_M^0$. D'après ce qui précède, on peut choisir ψ tel que, comme ci-dessus, w représente la restriction w_1 de Ad $\tilde{g}_\psi$ à $\mathfrak{a}_\emptyset$. Soit δ un élément de $\hat{M}$. Il faut voir que c'est une série discrète de $M/M \cap w^{-1}Hw$ si et seulement si c'est une série discrète de $M/M \cap H$. Par transport de structure, il suffit de voir que $\tilde{g}_\psi\delta$ est une série discrète de $M/M \cap H$ si et seulement si δ vérifie la même propriété. Supposons d'abord que δ soit une série discrète de $M/M \cap H$. Comme $\tilde{g}_\psi g_\psi^{-1}$ est un élément de L, $\tilde{g}_\psi\delta$ est équivalente à $g_\psi\delta$. On va montrer que cette dernière est équivalente à δ. La restriction de δ à M_{der} est, d'après la proposition précédente, équivalente à une série principale induite à partir d'un sous-groupe parabolique minimal σ-stable dont le sous-groupe de Levi admet $(\mathfrak{a}_1^\perp)_\mathbb{C}$ comme algèbre de Lie. Comme Ad g_ψ agit trivialement sur $\mathfrak{a}_0$, on en déduit aisément que cette restriction à M_{der} est invariante par g_ψ. Pour les mêmes raisons, la restriction de δ au sous-groupe analytique de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap (\mathfrak{a}_0)_\mathbb{C}$ est invariante par g_ψ. Le sous-groupe analytique de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_0$ est contenu dans l'intersection de H et du centre de M. La restriction de δ à ce sous-groupe est donc triviale. Elle est donc aussi invariante par g_ψ. Finalement on a bien montré que δ est invariante par g_ψ; par conséquent $\tilde{g}_\psi\delta$ est une série discrète de $M/M \cap H$.

Réciproquement si $\tilde{g}_\psi\delta$ est une série discrète de $M/M \cap H$, d'aprés ce qui précède $\tilde{g}_\psi^2\delta$ vérifie la même propriété. Comme $\tilde{g}_\psi^2$ est élément de L, cette dernière représentation de M est équivalente à δ. Alors δ est une série discrète de $M/M \cap H$ comme désiré. L'assertion sur la dimension des $\mathcal{V}(\delta, w)$ résulte de la proposition précédente. □

5. Un résultat auxiliaire sur les vecteurs distributions H-invariants tempérés

5.1. Nous devons maintenant tenir compte de notre définition des vecteurs distributions d'une représentation comme formes linéaires (et non antilinéaires) continues sur l'espace des vecteurs C^∞. Si V est un espace vectoriel complexe, localement convexe séparé, on note V^c l'espace vectoriel conjugué de V et $(V^c)'$ l'espace vectoriel des formes antilinéaires continues sur V qui s'identifie antilinéairement au dual topologique V' de V par l'application $\nu \mapsto \nu^*$ définie par:

$$\nu^*(v) = \overline{\nu(v)}. \tag{5.1}$$

On notera parfois (ν, v) au lieu de $\nu(v)$ pour $\nu \in (V^c)'$ et $v \in V$. Si V est muni d'une représentation continue, π, l'espace $(V^c)'$ est muni d'une représentation de G, π^*, telle que:

$$\pi^*(g)\nu^* = (\pi'(g)\nu)^*, \quad \nu \in V',\ g \in G. \tag{5.2}$$

Si V est l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire π de G, l'espace V s'identifie à un sous espace de $(V^c)'$ grâce au produit scalaire. De plus:

(5.3) *Pour tout $\nu \in (V^c)'$ (resp. $((V^c)')^H$) et tout $f \in C_c^\infty(G)$ (resp. $C_c^\infty(G/H)$), $\pi^*(f)\nu$ est élément de V.*

5.2. Maintenant (π, H_π) est une représentation unitaire de longueur finie de G et ξ un vecteur distribution H-invariant. On note β le morphisme continu de G-modules de H_π^∞ dans $C^\infty(G/H)$ défini par:

$$\beta(v)(gH) = \langle \pi'(g)\xi, v\rangle, \quad g \in G,\ v \in H_\pi^\infty. \tag{5.4}$$

On rappelle que, suivant la terminologie de [CD1, App. C], ξ est faiblement H-tempéré si $\beta(H_\pi)_{(K)}$ est contenu dans l'espace $\mathcal{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)$ des fonctions K-finies, $\mathbb{D}(G/H)$ finies et tempérées sur G/H. Pour $d \in \mathbb{R}$, on introduit comme dans [CD1], la fonction w_d sur G/H définie par:

$$w_d(x) = (N_1(x))^d. \tag{5.5}$$

Alors, pour $d \geq 0$, w_d est un poids continu (cf. l.c. Appendice C) et on dispose d'une représentation continue de G dans $L^2(G/H, w_d\, dx)$, par action régulière gauche. Sa représentation contragrédiente s'identifie à l'action régulière gauche de G dans $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)$.

LEMME 5. *On suppose que ξ est un vecteur distribution faiblement H-tempéré.*

(i) *Il existe $d > 0$ tel que β soit un morphisme continu de G-modules entre H_π^∞ et $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)^\infty$; i.e. ξ est un vecteur distribution H-tempéré au sens de* [CD1, *App.* C].

(ii) *Il existe une semi-norme continue sur $\mathcal{C}(G/H)$, p, et une semi-norme continue sur H_π^∞, q, telles que, pour $f \in \mathcal{C}(G/H)$ et $v \in H_\pi^\infty$ l'intégrale:*

$$\int_{G/H} f(gH)\overline{\langle \pi'(g)\xi, v\rangle}\, d\dot{g}$$

soit absolument convergente et majorée en module par $p(f)q(v)$. Pour f fixé elle définit une forme antilinéaire continue sur H_π^∞ qui est élément de H_π^∞ avec l'identification du §4.1. Lorsque $f \in C_c^\infty(G/H)$, cet élément est égal à $\pi^*(f)\xi^*$. On conserve cette notation si $f \in \mathcal{C}(G/H)$.

(iii) *L'application $f \mapsto \pi^*(f)\xi^*$ est continue de $\mathcal{C}(G/H)$ dans H_π^∞.*

Démonstration. On montre d'abord que tout élément de $(H_\pi)_{(K)}$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $\pi(f)v$ où $v \in (H_\pi)_{(K)}$ et $f \in C_c^\infty(G)$ est K-finie à gauche. En effet, lorsque v décrit $(H_\pi)_{(K)}$, et f décrit les éléments de $C_c^\infty(G)$ se transformant à gauche sous un K-type donné, ces vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel dense de la composante isotypique correspondante. Comme celle-ci est de dimension finie, puisque π est de longueur finie, on a le résultat voulu. On peut alors choisir $f_1, \dots, f_n \in C_c^\infty(G)$, K-finies à gauche, $v_1, \dots, v_n \in (H_\pi)_{(K)}$ tels que les vecteurs $w_i := \pi(f_i)v_i$, $i = 1, \dots, n$, engendrent le $U(\mathfrak{g})$-module $(H_\pi)_{(K)}$. D'après la propriété de tempérance faible de ξ, il existe $d > 0$ tel que $\beta(v_i) \in L^2(G/H, w_{-d}\, dx)$ pour tout i. Mais $\beta(\pi(f_i)v_i) = f_i * \beta(v_i)$. Donc $\beta(w_i)$ appartient à $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)^\infty$. Il en va de même de $\beta(v)$ pour tout $v \in (H_\pi)_{(K)}$. Alors, tenant compte du fait que $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)^\infty$ est un G-module à croissance modérée comme espace des vecteurs C^∞ d'une représentation hilbertienne (cf. [W, Lemme 11.5.1]), on voit que la restriction de β à $(H_\pi)_{(K)}$ se prolonge en un morphisme continu de G-modules entre H_π^∞ et $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)^\infty$ (cf. [W, Th. 11.6.7] et [D1, Prop. 1]). La continuité de β de H_π^∞ dans $C^\infty(G/H)$ ainsi que celle de l'injection naturelle de $L^2(G/H, w_{-d}\, dx)^\infty$ dans $C^\infty(G/H)$ (qui résulte des inégalités de Sobolev) montre que ce prolongement coïncide avec β. D'où (i)

Démontrons (ii). D'après (i), il existe une semi-norme continue, p, sur H_π^∞ telle que:

$$\left(\int_{G/H} |\beta(v)(x)|^2 w_{-d}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq p(v).$$

Par ailleurs, il résulte facilement de la définition de $\mathcal{C}(G/H)$ qu'il existe une semi-norme continue q sur $\mathcal{C}(G/H)$ telle que:

$$\left(\int_{G/H} |f(x)|^2 w_d(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq q(f).$$

Alors p et q vérifient les propriétés voulues grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le reste de l'assertion résulte des définitions, mis à part le fait que $\pi^*(f)\xi^*$ est élément de H_π^∞ pour tout $f \in \mathcal{C}(G/H)$. Mais $\mathcal{C}(G/H)$ est un G-module différentiable dans un espace de Fréchet. D'après [DiMa, Th. 3.3], tout élément de $\mathcal{C}(G/H)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de la forme $l * l'$ où $l' \in \mathcal{C}(G/H)$ et $l \in C_c^\infty(G)$. Alors, on vérifie facilement, grâce au Théorème de Fubini, que:

$$\pi^*(l * l')\xi^* = \pi^*(l)(\pi^*(l')\xi^*).$$

D'où l'assertion.

(iii) Comme H_π^∞ et $\mathcal{C}(G/H)$ sont des espaces de Fréchet, il suffit de vérifier que le graphe de l'application linéaire considérée est fermé. Soit (f_n) une suite convergeant vers 0 dans $\mathcal{C}(G/H)$. D'après (ii), on voit que pour tout $v \in H_\pi^\infty$, $(\pi^*(f_n)\xi^*)(v)$ converge vers 0. Si $\pi^*(f_n)\xi$ converge vers $v_0 \in H_\pi^\infty$, on en déduit que $(v_0, v) = 0$ pour tout $v \in H_\pi^\infty$, donc $v_0 = 0$. Alors (iii) en résulte. □

Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 du CNRS, 163 Avenue de Luminy, Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France
E-mail address: delorme@iml.univ-mrs.fr

Bibliographie

[A] J. Arthur, A local trace formula, Pub. Math. I.H.E.S. **73** (1991), 5–96.

[B1] E. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space I, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. **21** (1988), 359–412.

[B2] ———, The principal series for a reductive symmetric space II, J. Funct. Analysis **109** (1992), 331–441.

[BCD] E. van den Ban, J. Carmona, and P. Delorme, Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, J. Funct. Analysis **139** (1996), 225–243.

[BS1] E. van den Ban and H. Schlichtkrull, Fourier transform on a semisimple symmetric space, Inv. Math. **130** (1997), 517–574.

[BS2] ———, The most continuous part of the Plancherel decomposition for a reductive symmetric space, Ann. of Math. **145** (1997), 267–364.

[Be] J. N. Bernstein, On the support of the Plancherel measure, J. Geom. Phys. **5** (1988), 663–710.

[BrD] J. L. Brylinski and P. Delorme, Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein, Inv. Math. **109** (1992), 619–664.

[C] J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, J. Reine Angew. Math. **491** (1997), 17–63.

[CD1] J. Carmona et P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs, J. Funct. Analysis **122** (1994), 152–221.

[CD2] ———, Transformation de Fourier pour les espaces symétriques réductifs, à paraître dans Inv. Math.

[Cass1] W. Casselman, Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G, Canad. J. Math. **41** (1989), 385–438.

[Cass2] ———, Extended automorphic forms on the upper half plane, Math. Ann. **296** (1993), 755–762.

[D1] P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs. Tempérance. Majorations. Petite matrice B, J. Funct. Analysis **136** (1996), 422–509.

[D2] ———, Troncature pour les espaces symétriques réductifs, Acta Math. **179** (1997), 41–77.

[DiMa] J. Dixmier et P. Malliavin, Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, Bull. Sc. Math. **102** (1978), 307–330.

[F-J] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. **111** (1980), 253–311.

[H1] P. Harnick, Correspondance de distributions sphériques entre deux espaces symétriques du type $G_\mathbb{C}/G_\mathbb{R}$, J. Funct. Analysis **124** (1994), 427–474.

[H2] ———, Fonctions orbitales sur $G_\mathbb{C}/G_\mathbb{R}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, à paraître dans J. Funct. Analysis.

[H-C1] HARISH-CHANDRA, Harmonic analysis on real reductive groups II, Inv. Math. **36** (1976), 1–35.

[H-C2] ———, Harmonic analysis on real reductive groups III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math. **104** (1976), 117–201.

[KSt] A. KNAPP and E. STEIN, Intertwining operators for semisimple groups II, Inv. Math. **60** (1980), 9–84.

[KW] A. KNAPP and N. WALLACH, Szegő kernels associated with discrete series, Inv. Math. **34** (1976), 163–200 et **62** (1980), 341–346.

[KZ] A. KNAPP and G. ZUCKERMAN, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups I, Ann. of Math. **116** (1982), 389–455.

[Ol] G. OLAFSSON, Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space, Inv. Math. **90** (1987), 1–51.

[O] T. OSHIMA, Asymptotic behaviour of spherical functions on semisimple symmetric spaces, Adv. Studies in Pure Math. **14** (1988), 561–601.

[OM] T. OSHIMA and T. MATSUKI, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, Adv. Studies in Pure Math. **4** (1984), 331–390.

[OS] T. OSHIMA and J. SEKIGUCHI, Eigenspaces of invariant differential operators on a semisimple symmetric space, Inv. Math. **57** (1980), 1–81.

[S] H. SCHLICHTKRULL, The Langlands parameter of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetric spaces, J. Funct. Analysis **50** (1983), 133–150.

[V] D. VOGAN, Irreducibility of discrete series representation for semisimple symmetric spaces, Adv. Studies in Pure Math. **14** (1988), 191–221.

[W] N. WALLACH, *Real Reductive Groups* II, Academic Press, Inc., Boston (1992).

(Received October 4, 1996)