Journal of Algebra **246,** 97–174 (2001)
doi:10.1006/jabr.2001.8887, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Classification des triples de Manin pour les algèbres de Lie réductives complexes

Patrick Delorme

Avec un appendice de Guillaume Macey

Institut de Mathématiques de Luminy, U.P.R. 9016 du CNRS, Université de la Méditerrannée, 163 Avenue de Luminy, Case 907, 13288, Marseille Cedex 09, France
E-mail: delorme@iml.univ-mrs.fr

Communicated by Laurent Clozel

Received February 5, 2000

We study real and complex Manin triples for a complex reductive Lie algebra $\mathfrak{g}$. First, we generalize results of E. Karolinsky (1996, *Math. Phys. Anal. Geom* **3**, 545–563; 1999, Preprint math.QA.9901073) on the classification of Lagrangian subalgebras. Then we show that, if $\mathfrak{g}$ is noncommutative, one can attach to each Manin triple in $\mathfrak{g}$ another one for a strictly smaller reductive complex Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$. This gives a powerful tool for induction. Then we classify complex Manin triples in terms of what we call generalized Belavin–Drinfeld data. This generalizes, by other methods, the classification of A. Belavin and V. G. Drinfeld of certain r-matrices, i.e., the solutions of modified triangle equations for constants (cf. A. Belavin and V. G. Drinfeld, "Triangle Equations and Simple Lie Algebras," Mathematical Physics Reviews, Vol. 4, pp. 93–165, Harwood Academic, Chur, 1984, Theorem 6.1). We get also results for real Manin triples. In passing, we retrieve a result of A. Panov (1999, Preprint math.QA.9904156) which classifies certain Lie bialgebra structures on a real simple Lie algebra.

Key Words: reductive Lie algebra; Manin triple; Lie bialgebra.

INTRODUCTION

Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional complex, reductive Lie algebra. One says that a symmetric, $\mathfrak{g}$-invariant, $\mathbb{R}$ (resp., $\mathbb{C}$-) bilinear form on $\mathfrak{g}$ is a **Manin form** if and only if its signature is $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g})$ (resp., if it is nondegenerate).

Recall that a real (resp., complex) **Manin triple** in $\mathfrak{g}$ is a triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, where B is a real (resp., complex) Manin form and where $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ are real (resp. complex) Lie subalgebras of $\mathfrak{g}$, isotropic for B, and such that

0021-8693/01 $35.00

$\mathfrak{i} + \mathfrak{i}' = \mathfrak{g}$. Then this is a direct sum and $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ are of real dimension equal to the complex dimension of $\mathfrak{g}$.

Our goal is to classify all Manin triples of $\mathfrak{g}$, up to conjugacy under the action on $\mathfrak{g}$ of the connected, simply connected Lie group G with Lie algebra $\mathfrak{g}$, by induction on the rank of the derived algebra of $\mathfrak{g}$.

One calls **af-involution (resp. f-involution)** of a complex semisimple Lie algebra $\mathfrak{m}$, an $\mathbb{R}$- (resp., $\mathbb{C}$-) linear involutive automorphism of $\mathfrak{m}$, σ, such that its restriction to every stable simple ideal of $\mathfrak{m}$ is antilinear (resp., such that $\mathfrak{m}$ has no simple ideal left stable by σ).

The following theorem generalizes previous results of Karolinsky (cf. [K2, Theorem 1(i)] and [K1] for the proof; see also [K3, Proposition 3.1]), as we do not make any restriction on the Manin form. If we are dealing with the $\mathbb{R}$- (resp., $\mathbb{C}$-) bilinear Manin form, Manin triple will mean a real (resp., complex) Manin triple.

THEOREM 1. *Let B be an $\mathbb{R}$- (resp., $\mathbb{C}$)-bilinear Manin form and let $\mathfrak{i}$ be a* **Lagrangian subalgebra** *of $\mathfrak{g}$ for B, i.e., a real (resp., complex) Lie subalgebra of $\mathfrak{g}$ whose real dimension is equal to the complex dimension of $\mathfrak{g}$ and which is isotropic for B. Then:*

(a) *If we denote by $\mathfrak{p}$ the normalizer in $\mathfrak{g}$ of the nilpotent radical, $\mathfrak{n}$, of $\mathfrak{i}$, then $\mathfrak{p}$ is a parabolic subalgebra of $\mathfrak{g}$, with nilpotent radical equal to $\mathfrak{n}$.*

(b) *Let $\mathfrak{l}$ be a Levi subalgebra of $\mathfrak{p}$ (i.e., $\mathfrak{l}$ is a reductive Lie subalgebra of $\mathfrak{p}$ with $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$), and denote by $\mathfrak{m}$ its derived ideal and by $\mathfrak{a}$ its center. Then the intersection, $\mathfrak{h}$, of $\mathfrak{i}$ and $\mathfrak{m}$ is the fixed point set of an af-involution (resp., an f-involution) of $\mathfrak{m}$, which is isotropic for B.*

(c) *The intersection of $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, is isotropic for B, and its real dimension equals the complex dimension of $\mathfrak{a}$.*

(d) *One has $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$.*

Reciprocally, any real (resp., complex) Lie subalgebra, $\mathfrak{i}$, of $\mathfrak{g}$ which is of this form is Lagrangian for B.

Then, one says that **$\mathfrak{i}$ is under $\mathfrak{p}$**.

One chooses a Cartan subalgebra $\mathfrak{j}_0$ of $\mathfrak{g}$ and a Borel subalgebra of $\mathfrak{g}$ containing $\mathfrak{j}_0$, $\mathfrak{b}_0$. Then, from Theorem 1 and the Bruhat decomposition, one sees (cf. Proposition 1) that every Manin triple is conjugated, under G, to a Manin triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ such that $\mathfrak{i}$ is under $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{i}'$ is under $\mathfrak{p}'$, with $\mathfrak{p}$ containing $\mathfrak{b}_0$ and $\mathfrak{p}'$ containing the opposite Borel subalgebra to $\mathfrak{b}_0$, with respect to $\mathfrak{j}_0$. A Manin triple satisfying these conditions will be called **standard**, under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

Let $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ be given as above, and let B be a Manin form on $\mathfrak{g}$.

THEOREM 2. *If $\mathfrak{g}$ is nonabelian and if there exists a standard Manin triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, then $\mathfrak{p}$ or $\mathfrak{p}'$ is different from $\mathfrak{g}$.*

THEOREM 3. *Let $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ be a real (resp., complex) standard Manin triple under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. Let $p^{\mathfrak{n}'}$ be the projection of $\mathfrak{g}$ on the $\mathfrak{j}_0$-invariant supplementary subspace of the nilpotent radical $\mathfrak{n}'$ of $\mathfrak{p}'$, with kernel $\mathfrak{n}'$. Let $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ be the Langlands decomposition of $\mathfrak{p}$, such that $\mathfrak{l}$ contains $\mathfrak{j}_0$. Set $\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, where $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. One defines similarly $\mathfrak{i}'_1$.*

Then $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1$ are contained in $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Moreover, if B_1 denotes the restriction of B to $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ is a real (resp., complex) Manin triple for $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. We set $\mathfrak{g}_1 := \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

We will use freely the notation of Theorem 1 for $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, which is called the **predecessor of the standard Manin triple** $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$.

If $\mathfrak{r}$ is a real subalgebra of $\mathfrak{g}$, we denote by R the analytic subgroup of G with Lie algebra $\mathfrak{r}$.

THEOREM 4 (cf. Thèorème 4 et Proposition 6). *Every real (resp., complex) Manin triple under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ is conjugate, by an element of $P \cap P'$, to a real (resp., complex) Manin triple under $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, such that all the successive predecessors, $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1), (B_2, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}'_2), \ldots,$ are standard Manin triples in $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{g}_2, \ldots,$ with respect to the intersection of $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}'_0$, with $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots,$ and such that the intersection $\mathfrak{f}_0$ (resp., $\mathfrak{f}'_0$) of $\mathfrak{j}_0$ with $\mathfrak{i}$ (resp. $\mathfrak{i}'$) is a fundamental Cartan subalgebra of $\mathfrak{i}$ (resp. $\mathfrak{i}'$), contained in $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$ (resp., $\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{i}'_2, \ldots$).*

Such a Manin triple will be called **strongly standard**. *The smallest integer, k, such that $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{j}_0$ is called the* **height** *of the strongly standard Manin triple. Two Manin triples which are conjugate under G have the same height.*

Now, we assume that B is $\mathbb{C}$-bilinear. One defines $\mathbb{C}^+ := \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid Re\, \lambda < 0,$ *or* $Re\, \lambda = 0$ *et* $Im\, \lambda > 0\}$, $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{C}^+$. If B is a complex Manin form on $\mathfrak{g}$, one denotes by $\mathfrak{g}_+$ (resp., $\mathfrak{g}_-$) the sum of the simple ideals of $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_i$, for which the restriction of B to $\mathfrak{g}_i$ is equal to $\lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}$, where $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$ (resp., $\mathbb{C}^-$) and $K_{\mathfrak{g}_i}$ is the Killing form of $\mathfrak{g}_i$. Then $\mathfrak{g}_+$ and $\mathfrak{g}_-$ are commuting ideals of $\mathfrak{g}$ and $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. Then $\mathfrak{g}_+$ (resp., $\mathfrak{g}_-$) has $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{g}_+$ (resp., $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{g}_-$) as a Cartan subalgebra and $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{g}_+$ (resp., $\mathfrak{b}'_0 \cap \mathfrak{g}_-$: the use of $\mathfrak{b}'_0$ instead of $\mathfrak{b}_0$ is important) as Borel subalgebras. Let us denote by Σ_+ (resp., Σ_-) the set of simple roots of $\mathfrak{g}_\pm$ with respect to these Borel and Cartan subalgebras. These roots can be viewed as roots of $\mathfrak{j}_0$ in $\mathfrak{g}$.

For $\alpha \in \Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, let $H_\alpha \in \mathfrak{j}_0$ be the coroot of α. Let $\mathscr{W} = (H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ be a Weyl system of generators of $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, where $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$. More precisely, for all $\alpha, \beta \in \Sigma$, one has

$$[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\beta$$

$$[H_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_\beta$$

$$[H_\alpha, Y_\beta] = -N_{\alpha\beta} Y_\beta$$

where

$$N_{\alpha\beta} = \beta(H_\alpha) = 2K_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\beta)/K_{\mathfrak{g}}(H_\beta, H_\beta).$$

Note that $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma_\pm}$ is a Weyl system of generators of $\mathfrak{g}_\pm$. Moreover, as $\mathfrak{g}_+$ and $\mathfrak{g}_-$ commute, if $\alpha \in \Sigma_+$ and $\beta \in \Sigma_-$ one has $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0$.

DEFINITION. One calls $(A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ generalized Belavin–Drinfeld data with respect to B when the following five conditions are satisfied:

(1) A is a bijection from a subset Γ_+ of Σ_+ on a subset Γ_- of Σ_-, such that

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_\alpha, H_\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma_+.$$

(2) A' is a bijection from a subset Γ'_+ of Σ_+ on a subset Γ'_- of Σ_-, such that

$$B(H_{A'\alpha}, H_{A'\beta}) = -B(H_\alpha, H_\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma'_+.$$

(3) If $C = "A^{-1}A'"$ is the map defined on $dom\, C = \{\alpha \in \Gamma'_+ | A'\alpha \in \Gamma_+\}$ by $C\alpha = A^{-1}A'\alpha$, $\alpha \in dom\, C$, then C satisfies:
For all $\alpha \in dom\, C$, there exists $n \in \mathbb{N}^*$ such that $\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in dom\, C$ and $C^n\alpha \notin dom\, C$.

(4) $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ (resp., $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$) is a complex vector subspace of $\mathfrak{j}_0$, included and Lagrangian in the orthogonal, $\mathfrak{a}$ (resp., $\mathfrak{a}'$), for the Killing form of $\mathfrak{g}$ (or for B) to the subspace generated by H_α, $\alpha \in \Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (resp., $\Gamma' := \Gamma'_+ \cup \Gamma'_-$).

(5) If $\mathfrak{f}$ is the subspace of $\mathfrak{j}_0$ generated by the family $H_\alpha + H_{A\alpha}$, $\alpha \in \Gamma_+$, and $\mathfrak{f}'$ is defined similarly, then

$$(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}) \cap (\mathfrak{f}' \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}) = \{0\}.$$

We will denote by R_+ the set of roots of $\mathfrak{j}_0$ in $\mathfrak{g}$, which are a linear combination of elements of Γ_+. One defines similarly R_-, R'_+, R'_-. We will denote also by A (resp. A') the $\mathbb{R}$-linear extension of A (resp. A'), which defines a bijection from R_+ on R_- (resp. R'_+ on R'_-). If A satisfies the condition (1) above, there exists a unique isomorphism τ from the subalgebra $\mathfrak{m}_+$ of $\mathfrak{g}$, generated by $X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha$, $\alpha \in \Gamma_+$, on the subalgebra $\mathfrak{m}_-$ of $\mathfrak{g}$, generated by $X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha$, $\alpha \in \Gamma_-$, such that

$$\tau(H_\alpha) = H_{A\alpha}, \quad \tau(X_\alpha) = X_{A\alpha}, \quad \tau(Y_\alpha) = Y_{A\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma_+.$$

THEOREM (cf. Proposition 8 and Théorèm 5). (i) *Let $\mathcal{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ be generalized Belavin–Drinfeld data, with respect to B. Let $\mathfrak{n}$ be the sum of the root spaces relative to roots α of $\mathfrak{j}_0$ in $\mathfrak{b}_0$, which are not in*

$R_+ \cup R_-$. *Let* $\mathfrak{i}$ *be equal to* $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$, *where* τ *is as above*, $\mathfrak{h} := \{X + \tau(X) \mid X \in \mathfrak{m}_+\}$, *and* $\mathfrak{i}'$ *is defined similarly*; *then* $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *is a strongly standard Manin triple*.

(ii) *Every Manin triple is conjugate by an element of* G *to a unique Manin triple of this type. If the original triple is moreover strongly standard, the element of* G *can be taken in* J_0; *or, in other words, every strongly standard Manin triple is of the preceeding type, if one allows* $\mathscr{W}$ *to change*.

Let $\mathfrak{g}_1$ be a complex simple Lie algebra, and set $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. One shows easily that the preceeding theorem implies the classification of Manin triples in $\mathfrak{g}$, with $\mathfrak{i}$ equal to the diagonal, up to conjugacy by the diagonal. But there is a bijection between such triples and certain r-matrices (see the appendix by Macey here for a proof and references). Hence, our result gives a classification of these r-matrices, the original classification, known as the classification of solutions of modified triangle equations for constants, being due to Belavin and Drinfeld [BD, Theorem 6.1]. The two classifications are in terms of the same parameters. The appendix by Macey shows that they coincide.

One proves also results for real Manin triples. One retrieves a result of Panov [P1] which classifies certain Lie bialgebra structures on a real simple Lie algebra.

1. SOUS-ALGÈBRES DE LIE LAGRANGIENNES

Dans tout l'article, algèbre de Lie voudra dire algèbre de Lie de dimension finie.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie on notera souvent $\mathfrak{g}^{der}$ son idéal dérivé.

Soit $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie abélienne sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, V un $\mathfrak{a}$-module complexe. Pour $\lambda \in Hom_{\mathbb{K}}(\mathfrak{a}, \mathbb{C})$, on note $V^\lambda := \{v \in V \mid Xv = \lambda(X)v,\ X \in \mathfrak{a}\}$, qui est appelé le sous-espace de poids λ de V. On dit que λ est un poids de $\mathfrak{a}$ dans V si V^λ est non nul et on note $\Delta(V, \mathfrak{a})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{a}$ dans V.

Si G est un groupe de Lie, on notera G^0 sa composante neutre.

LEMME 1. (i) *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple complexe*, $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ *ses idéaux simples. Toute forme* $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$)-*bilinéaire* $\mathfrak{g}$-*invariante sur* $\mathfrak{g}$ *est du type* B_λ *ou* $B_\lambda^{\mathfrak{g}}$ (*resp.* K_λ *ou* $K_\lambda^{\mathfrak{g}}$), *où* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ *et*

$$B_\lambda(X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n) = \sum_{i=1,\dots,n} Im\big(\lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, Y_i)\big)$$

$$K_\lambda(X_1 + \cdots + X_n, Y_1 + \cdots + Y_n) = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, Y_i),$$

si les X_i, Y_i *sont des éléments de* $\mathfrak{g}_i$. *Ici* $K_{\mathfrak{g}_i}$ *désigne la forme de Killing de* $\mathfrak{g}_i$.

En particulier, une telle forme est symétrique et les idéaux simples sont deux à deux orthogonaux pour une telle forme.

(ii) *La forme B_λ (resp. K_λ) est non dégénérée si et seulement si chacun des λ_i, est non nul. La forme B_λ est alors de signature $(dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g})$.*

(iii) *La restriction de $B_\lambda^{\mathfrak{g}}$ à une sous-algèbre complexe et simple, $\mathfrak{s}$, de $\mathfrak{g}$, est de la forme $B_\mu^{\mathfrak{s}}$, où $\mu = \sum_{i=1,\dots,n} q_i \lambda_i$ et pour chaque i, q_i est un nombre rationnel positif. De plus q_i est non nul si et seulement si $\mathfrak{s}$ a un crochet non nul avec $\mathfrak{g}_i$.*

Démonstration. Le point (i) ramène aisément au cas où $\mathfrak{g}$ est simple, qui se traite en étudiant les entrelacements $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-linéaire du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ avec lui même.

Pour (ii), l'assertion sur la non nullité des λ_i est claire. Pour l'étude de la signature, on se ramène au cas où $\mathfrak{g}$ est simple. Supposons $\lambda \in \mathbb{C}$, non nul. Soit $\mathfrak{k}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. On fixe une base $X_1, \dots, X_l$ de $\mathfrak{k}$, orthonormée pour l'opposé de la forme de Killing de $\mathfrak{k}$. On choisit une racine carrée μ de $-i\lambda^{-1}$. On pose $Y_i = \mu X_i$, $Z_i = i\mu X_i$. Alors $B_\lambda(Y_i, Z_j) = 0$, $B_\lambda(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$, $B_\lambda(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$. D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature.

Pour (iii), on utilise le fait suivant (cf. [OV, Chap. 3, Proposition 2.5]):

Si ρ est une représentation complexe d'une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{s}$, dans un espace de dimension finie, V, on a: $tr(\rho(X)\rho(Y)) = qK_{\mathfrak{s}}(X, Y)$ où q est un nombre entier positif, appelé indice de Dynkin, qui est nul si et seulement si ρ est triviale. ∎

DÉFINITION 1. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive complexe, une forme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ et invariante par $\mathfrak{g}$ est dite forme de Manin si et seulement si elle est de signature $(dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g})$ (resp. si et seulement si elle est non dégénérée). Une forme de Manin est dite forme spéciale si sa restriction à toute sous-algèbre de Lie complexe semi-simple est non dégénérée.

LEMME 2. (i) *Une forme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}$-invariante sur $\mathfrak{g}$ est spéciale si et seulement si sa restriction à $\mathfrak{g}^{der}$ est spéciale et si sa restriction au centre, $\mathfrak{z}$, de $\mathfrak{g}$ est de signature $(dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{z}, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{z})$ (resp. est non dégénérée).*

(ii) *La restriction d'une forme spéciale à une sous-algèbre de Lie semi-simple complexe de $\mathfrak{g}$ est spéciale.*

(iii) *La restriction d'une forme spéciale au centralisateur d'un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$, dont l'image par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ n'a que des valeurs propres réelles, est spéciale.*

(iv) *Si* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, et* $B = B_\lambda^{\mathfrak{g}}$ (*resp.* $K = K_\lambda^{\mathfrak{g}}$), *où* $\lambda_i = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ *vérifie*

$$\textit{Si} \sum_{i=1,\ldots,n} q_i \lambda_i = 0 \textit{ avec } q_i \in \mathbb{Q}^+, \textit{ alors les } q_i \textit{ sont tous nuls} \quad (1.1)$$

alors B (*resp.* K) *est spéciale. On note que* (1.1) *est satisfait dès que les* λ_i *sont indépendants sur* $\mathbb{Q}$, *ou bien tous strictement positifs.*

(v) *Si* $\mathfrak{g}$ *est simple, toute forme* $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$)*-bilinéaire symétrique* $\mathfrak{g}$*-invariante sur* $\mathfrak{g}$ *est spéciale.*

Démonstration. On traite le cas des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires, celui des formes $\mathbb{C}$-bilinéaires étant semblable. (i) résulte du fait que pour toute forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}$-invariante sur $\mathfrak{g}$, le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{der}$ sont orthogonaux.

(ii) est clair.

Montrons (iii). Comme le centralisateur d'un élément de $\mathfrak{g}$ est la somme de son intersection avec $\mathfrak{g}^{der}$ et du centre, on se réduit aisément, grâce à (i), au cas où $\mathfrak{g}$ est semi-simple, ce que l'on suppose dans la suite. Soit X un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ tel que $ad X$ n'a que des valeurs propres réelles, soit $\mathfrak{l}$ son centralisateur et $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{l}$. D'après (i) et (ii), il suffit de voir que la restriction d'une forme spéciale à $\mathfrak{c}$ est de signature $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{c}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{c})$. Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant X. Alors $\mathfrak{c}$ est égal à l'intersection des noyaux des racines de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$ s'annulant sur X. Cela montre que $\mathfrak{c}$ est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de $\mathfrak{g}$. Il suffit alors de prouver notre assertion sur la signature dans le cas où $\mathfrak{g}$ est simple. Alors $B = B_\lambda$, avec λ non nul. Soit $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ l'espace formé des éléments de $\mathfrak{j}$ sur lesquels toutes les racines de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$ sont réelles, qui est une forme réelle de $\mathfrak{j}$. Il est clair que $\mathfrak{c}$ est la somme directe de $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{c} \cap \mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ avec $i\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$. On fixe une base orthonormée, $X_1, \ldots, X_l$, de $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Celle-ci existe car la forme de Killing est définie positive sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$. On choisit une racine carrée μ de $i\lambda^{-1}$. On pose $Y_i = \mu X_i$, $Z_i = i\mu X_i$. Alors $B_\lambda(Y_i, Z_j) = 0$, $B_\lambda(Y_i, Y_j) = \delta_{i,j}$, $B_\lambda(Z_i, Z_j) = -\delta_{i,j}$. D'où l'on déduit l'assertion voulue sur la signature, ce qui prouve (iii).

(iv) est une conséquence immédiate du Lemme 1 et (v) est un cas particulier de (iv). ∎

COROLLAIRE 1. (i) *La restriction d'une forme* $\mathbb{R}$ (*resp.* $\mathbb{C}$)*-bilinéaire, symétrique,* $\mathfrak{g}$*-invariante sur* $\mathfrak{g}$, *et non dégénérée,* B, *au centralisateur,* $\mathfrak{l}$ *d'un élément semi-simple de* $\mathfrak{g}$, *dont l'image par la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *n'a que des valeurs propres réelles, est non dégénérée. Il en va de même de sa restriction à* $\mathfrak{l}^{der}$ *et au centre* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{l}$.

(ii) *Si* B *est une forme de Manin sur* $\mathfrak{g}$, *sa restriction à* $\mathfrak{l}$ (*resp.* $\mathfrak{l}^{der}$, $\mathfrak{a}$) *est une forme de Manin sur* $\mathfrak{l}$ (*resp.* $\mathfrak{l}^{der}$, $\mathfrak{a}$).

(iii) *Une forme bilinéaire symétrique*, $\mathfrak{g}$-*invariante est une forme de Manin si et seulement si sa restriction à* $\mathfrak{g}^{der}$ *et sa restriction au centre de* $\mathfrak{g}$ *sont des formes de Manin.*

On rappelle que le radical d'une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$, est son plus grand idéal résoluble, et que son radical nilpotent, est le plus grand idéal, dont les éléments sont représentés par des endomorphismes nilpotents dans chaque représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Suivant Bourbaki, on appelle sous-algèbre de Levi d'une algèbre de Lie, toute sous-algèbre semi-simple supplémentaire du radical. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe on appelle décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ une décomposition de la forme $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est le radical nilpotent et $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{g}$, réductive dans $\mathfrak{g}$.

Rassemblons dans un Lemme quelques propriétés élémentaires des décompositions de Langlands d'une sous-algèbre parabolique.

LEMME 3. *Soit* $\mathfrak{p}$ *une sous-algèbre parabolique de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ *son radical nilpotent.*

(i) *Si* $\mathfrak{j}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{p}$, *c'est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *et il existe une seule décomposition de Langlands de* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, *telle que* $\mathfrak{j}$ *soit contenue dans* $\mathfrak{l}$.

(ii) *Si* $\mathfrak{j}, \mathfrak{j}'$ *sont deux sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *contenues dans* $\mathfrak{p}$, *elles sont conjuguées par un élément de* P, *qui conjugue les algèbres* $\mathfrak{l}$ *et* $\mathfrak{l}'$ *correspondantes.*

(iii) *Si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ *est une décomposition de Langlands de* $\mathfrak{p}$, *toute sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{l}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Revenant à la définition des sous-algèbres paraboliques (cf. [Bou, Chap. VIII, Paragraphe 3.4, Définition 2], par exemple), on voit qu'il existe une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}_1$, et une décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{j}_1$ contenue dans $\mathfrak{l}_1$, telle que $\mathfrak{l}_1$ soit la somme des sous-espaces poids de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{p}$, d'intersection avec $\mathfrak{n}$ reduite à zéro. En particulier les poids de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{l}_1 \approx \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ sont distincts de ceux dans $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}'_1 \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{j}_1$ contenue dans $\mathfrak{l}'_1$, $\mathfrak{l}'_1$ est somme des sous-espaces poids de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}$ pour des poids de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{l}'_1 \approx \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{l}'_1 \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. D'où l'égalité de $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}'_1$. Ceci assure l'unicité de $\mathfrak{l}$ pour $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1$. Maintenant toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{p}$ sont conjuguées à $\mathfrak{j}_1$, par un élément de P (cf. [Bou, Chap. VII, Paragraphe 3.3, Théorème 1]). On en déduit (i) par transport de structure, et (ii) résulte de la preuve de (i).

Montrons (iii). Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, l'action du centre de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{g}$ est semi-simple, puisque $\mathfrak{l}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$. Cela implique que, si $\mathfrak{j}$ une une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{l}, \mathfrak{j}$ est abélienne et formée d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$. Mais $\mathfrak{l}$ est isomorphe à $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$, qui est une algèbre réductive de même rang que $\mathfrak{g}$. Pour des raisons de dimension, on voit que $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. ∎

DÉFINITION 2. On appelle af-involution (resp. f-involution), où a vaut pour antilinéaire et f pour flip, d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{m}$, tout automorphisme involutif, $\mathbb{R}$-linéaire (resp. $\mathbb{C}$-linéaire) σ, de $\mathfrak{m}$, tel que sa restriction à tout idéal simple de $\mathfrak{g}$ qu'il laisse invariant est antilinéaire (resp. qui ne laisse aucun idéal simple invariant).

Ceci équivaut au fait qu'il existe:

(1) un idéal $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ de $\mathfrak{m}$, qui est en outre est réduit à zéro pour les f-involutions, et une forme réelle, $\tilde{\mathfrak{h}}_0$, de $\tilde{\mathfrak{m}}_0$;

(2) des idéaux simples de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'_j$, $\mathfrak{m}''_j$, $j = 1, \ldots, p$;

(3) un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes, τ_j, entre $\mathfrak{m}'_j$ et $\mathfrak{m}''_j$, $j = 1, \ldots, p$;

tel que, notant $\mathfrak{h}_j := \{X + \tau_j(X) \mid X \in \mathfrak{m}'_j\}$, et notant $\mathfrak{h}$, l'ensemble des points fixes de σ, on ait

$$\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=1,\ldots,p} (\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j) \right)$$

$$\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{h}}_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=1,\ldots,p} \mathfrak{h}_j \right).$$

Il est bon de remarquer qu'un automorphisme involutif de $\mathfrak{m}$ est caractérisé par son espace de points fixes, car l'espace des éléments anti-invariants est juste l'orthogonal de celui-ci, pour la forme de Killing de $\mathfrak{m}$ regardée comme réelle.

On remarque qu'une f-involution est en particulier une af-involution.

Débutons par quelques propriétés élémentaires.

LEMME 4. *Soit $\mathfrak{h}$ une forme réelle simple d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{s}$.*

(i) *L'algèbre $\mathfrak{s}$ n'est pas simple, si et seulement si $\mathfrak{h}$ admet une structure complexe.*

(ii) *Dans ce cas, $\mathfrak{s}$ est le produit de deux idéaux simples, $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$, isomorphes à $\mathfrak{h}$.*

(iii) *Toujours dans ce cas, il existe un isomorphisme antilinéaire, τ, entre les algèbres de Lie $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$, regardées comme réelles, tel que*

$$\mathfrak{h} = \{X + \tau(X) \mid X \in \mathfrak{s}_1\}.$$

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont bien connus. Montons (iii). Comme $\mathfrak{h}$ est une forme réelle de $\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$, la projection de $\mathfrak{h}$ sur chacun des deux facteurs est non nulle, donc induit un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{h}$ avec chacun de ces facteurs. Il en résulte que $\mathfrak{h}$ a la forme indiquée, mais on sait seulement que τ est $\mathbb{R}$-linéaire. Mais alors $\mathfrak{h}$ apparaît comme l'ensemble des points fixes de l'automorphisme involutif $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{s}$ défini par

$$X + Y \mapsto \tau^{-1}(Y) + \tau(X), \qquad X \in \mathfrak{s}_1, Y \in \mathfrak{s}_2.$$

D'après la remarque qui précède le Lemme, cette involution doit être égale à la conjugaison par rapport à $\mathfrak{h}$, donc elle est antilinéaire. Ceci implique l'antilinéarité de τ. ∎

LEMME 5. *On se donne une af-involution*, σ, *d'une algèbre de Lie semi-simple complexe* $\mathfrak{m}$. *Les idéaux simples de* $\mathfrak{m}$ *sont permutés par* σ. *On note* $\mathfrak{m}_j$, $j = 1, \ldots, r$, *les idéaux simples de* $\mathfrak{m}$. *On définit une involution* θ *de* $\{1, \ldots, r\}$ *caractérisée par*: $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}$, $j = 1, \ldots, r$. *Pour* $j = 1, \ldots, r$, *l'une des propriétés suivantes est vérifiée*:

(1) $\theta(j) = j$ *et la restriction de* σ *à* $\mathfrak{m}_j$ *est un automorphisme antilinéaire de* $\mathfrak{m}_j$.

(2) $\theta(j) \neq j$ *et la restriction de* σ *à* $\mathfrak{m}_j$ *est un isomorphisme antilinéaire de* $\mathfrak{m}_j$ *sur* $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$.

(3) $\theta(j) \neq j$ *et la restriction de* σ *à* $\mathfrak{m}_j$ *est un isomorphisme* $\mathbb{C}$-*linéaire de* $\mathfrak{m}_j$ *sur* $\mathfrak{m}_{\theta(j)}$.

Si on est dans le cas (1) *ou* (2), $\mathfrak{m}_j$ *est contenu dans l'idéal* $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ *de la définition des af-involutions*. *En particulier si* σ *est une f-involution*, *on est toujours dans le cas* (3).

Démonstration. En effet, soit $\mathfrak{h}_{p+l}$, $l = 1, \ldots, q$, les idéaux simples de $\tilde{\mathfrak{h}}_0$. Comme $\tilde{\mathfrak{h}}_0$ est une forme réelle de $\tilde{\mathfrak{m}}_0$, $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ est la somme directe des $\mathfrak{h}_{p+l} + i\mathfrak{h}_{p+l}$, qui sont en outre des idéaux. Si $\mathfrak{h}_{p+l} + i\mathfrak{h}_{p+l}$ est simple, c'est un idéal simple de $\mathfrak{m}$ et on est dans le cas (1). Sinon $\mathfrak{h}_{p+l} + i\mathfrak{h}_{p+l}$ est le produit de deux idéaux simples et l'on est dans le cas (2), d'après le Lemme précédent.

On traite de même le cas où $\mathfrak{m}_l$ est égal à l'un des $\mathfrak{m}'_j, \mathfrak{m}''_j$, $j = 1, \ldots, p$, en remarquant que $\mathfrak{h}_j$ est l'ensemble des points fixes de l'involution $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{m}'_j \oplus \mathfrak{m}''_j$ donnée par

$$X + Y \mapsto \tau^{-1}(Y) + \tau(X), \qquad X \in \mathfrak{m}'_j, Y \in \mathfrak{m}''_j. \tag{1.2}$$

∎

LEMME 6. *Tout isomorphisme* $\mathbb{R}$-*linéaire entre deux algèbres de Lie simples complexes est soit* $\mathbb{C}$-*linéaire*, *soit antilinéaire*.

Démonstration. Deux algèbres de Lie semi-simples complexes qui sont isomorphes comme algèbres réelles, sont isomorphes comme algèbres de Lie complexes. En effet, leurs systèmes de racines restreintes sont alors isomorphes. Mais chacun de ceux-ci est isomorphe au système de racine associé à une sous-algèbre de Cartan. D'où l'assertion. Ceci implique que l'on peut se limiter, pour prouver le Lemme, aux automorphismes $\mathbb{R}$-linéaire d'une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{g}$. Considérant la conjugaison par rapport à une forme réelle de $\mathfrak{g}$, $X \mapsto \overline{X}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' := \{(X, \overline{X}) \mid X \in \mathfrak{g}\}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{g}$. Alors tout automorphisme, σ, $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{g}$, définit, par transport de structure, un automorphisme de $\mathfrak{g}'$, σ', qui possède un unique prolongement $\mathbb{C}$-linéaire à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, σ''. Il existe deux automorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathfrak{g}$, τ et θ, tels que σ'' vérifie

$$\sigma''(X,Y) = (\tau(X), \theta(Y)) \textit{ ou bien } (\tau(Y), \theta(X)), \qquad (X,Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$$

Ecrivant la définition de σ', la stabilité de $\mathfrak{g}'$, par σ'' implique que σ est $\mathbb{C}$-linéaire dans le premier cas et antilinéaire dans le second. ∎

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'une forme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-bilinéaire symétrique non dégénérée. Tout sous-espace vectoriel réel (resp. complexe) isotrope est de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de E. Un sous-espace vectoriel réel (resp. complexe) de E, muni d'une d'une forme $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-bilinéaire symétrique non dégénérée est dit Lagrangien s'il est isotrope et de dimension réelle égale à la dimension complexe de E. Un tel espace existe si et seulement la forme est de signature $(dim_{\mathbb{C}} E, dim_{\mathbb{C}} E)$ (resp. si E est de dimension complexe paire).

Comme on l'a indiqué dans l'introduction, le Théorème suivant généralise des résultats de Karolinsky (cf. [K1, Théorème 3(i)] et [K3, Proposition 3.1]).

THÉORÈME 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe et B une forme de Manin $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$)-bilinéaire. Soit $\mathfrak{i}$ une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de $\mathfrak{g}$, Lagrangienne pour B.*

On a les propriétés suivantes:

(i) *Si l'on note $\mathfrak{p}$ le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ du radical nilpotent, $\mathfrak{n}$, de $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{i}$, de radical nilpotent $\mathfrak{n}$.*

(ii) *Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ une décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$ le centre de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{m}$ son idéal dérivé. On note $\mathfrak{h}$ l'intersection de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{m}$. Elle est isotrope pour B. De plus $\mathfrak{h}$ est l'espace des points fixes d'une af-involution (resp. f-involution), σ, de $\mathfrak{m}$.*

Si B est réelle et spéciale, celle-ci est antilinéaire et $\mathfrak{h}$ *est une forme réelle de* $\mathfrak{m}$.

(iii) *L'intersection* $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ *de* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{i}$ *est Lagrangienne pour la restriction de* B *à* $\mathfrak{a}$.

(iv) *On a* $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$.

Réciproquement si une sous-algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{i}$, *de* $\mathfrak{g}$ *est de la forme ci-dessus, elle est Lagrangienne pour B. On dit alors que* $\mathfrak{i}$ est sous $\mathfrak{p}$.

Début de la démonstration du Théorème 1. Soit $\mathfrak{i}$ une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de $\mathfrak{g}$ Lagrangienne pour B. On note $\mathfrak{r}$ son radical et on pose

$$\mathfrak{n} := \left\{X \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}^{der} \mid ad_{\mathfrak{g}}(X) \text{ est nilpotent}\right\}. \tag{1.3}$$

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{i}$.

Lemme 7. *L'ensemble* $\mathfrak{n}$ *est un idéal de* $\mathfrak{i}$ *et* $[\mathfrak{i}, \mathfrak{r}]$ *est contenu dans* $\mathfrak{n}$.

Démonstration. Montrons que $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{r}$ contenant $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$. En effet, comme $\mathfrak{r}$ est résoluble, dans une base, sur $\mathbb{C}$, bien choisie de $\mathfrak{g}$, les $ad_{\mathfrak{g}}(X)$, $X \in \mathfrak{r}$, s'écrivent sous forme de matrices triangulaires supérieures. Pour $X \in \mathfrak{r}$, les entrées de la diagonale de cette matrice sont notées $\lambda_1(X), \ldots, \lambda_p(X)$, où les λ_i sont des caractères de $\mathfrak{r}$. Alors $\mathfrak{n}$ est l'intersection des noyaux de ces caractères de $\mathfrak{r}$ avec $\mathfrak{g}^{der}$. Donc $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{r}$ contenant $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$.

Si $\mathfrak{f}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{r}$ est encore une algèbre de Lie résoluble car $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] = \{0\}$ et $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$. Un argument similaire à celui ci-dessus montre que $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}]$ est contenu dans $\mathfrak{n}$. La réunion de toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{h}$ est dense dans $\mathfrak{h}$, d'après la densité des éléments réguliers (cf. [Bou, Chap. VII, Paragraphe 2.2 et Paragraphe 2.3, Théorème 1]). Par continuité et densité, on en déduit que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$. ∎

Lemme 8. *Soit k un entier compris entre* 0 *et la dimension réelle* (*resp. complexe*) *de* $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$. *Il existe un sous-espace réel* (*resp. complexe*), *abélien*, $\mathfrak{a}_k$, *de* $\mathfrak{r}$, *de dimension k, tel que*:

(i) $\mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{n} = \{0\}$.

(ii) $\mathfrak{a}_k$ *est formé d'éléments semi-simples de* $\mathfrak{g}$.

(iii) $\mathfrak{a}_k$ *et* $\mathfrak{h}$ *commutent.*

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Si $k = 0$, le Lemme est clair. Supposons le démontré pour $k < dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{r}/\mathfrak{n})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$) et montrons le au rang $k + 1$. Alors $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ est une algèbre de Lie réductive dans $\mathfrak{g}$, regardée comme réelle (resp. complexe). D'autre part, comme $\mathfrak{n}$ contient $[\mathfrak{i}, \mathfrak{r}]$ d'après le Lemme précédent, on voit que $\mathfrak{i}$ et donc $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ agit trivialement sur $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$. Ceci implique que

$$[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}.$$

Donc, $\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n}$ est un $(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k)$-sous-module de $\mathfrak{r}$, qui admet un supplémentaire dans $\mathfrak{r}$ commutant à $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$, puisque $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ et que le quotient $\mathfrak{r}/(\mathfrak{a}_k \oplus \mathfrak{n})$ est un $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k$-module trivial.

On choisit un élément non nul de ce supplémentaire, X. Alors,

$$X \in \mathfrak{r}, \qquad X \notin \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k, \qquad \text{et} \qquad [X, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}. \tag{1.4}$$

On écrit $X = X_s + X_n$ où X_n est un élément de $\mathfrak{g}^{der}$, X_s est un élément de $\mathfrak{g}$ commutant à X_n tels que $ad_{\mathfrak{g}} X_s$ est semi-simple et $ad_{\mathfrak{g}} X_n$ est nilpotent. On sait qu'alors $ad_{\mathfrak{g}} X_s$, $ad_{\mathfrak{g}} X_n$ sont des polynômes en $ad_{\mathfrak{g}} X$. Joint à (1.2), cela implique

$$[X_s, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}, \qquad [X_n, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_k] = \{0\}. \tag{1.5}$$

Montrons que X_n appartient à $\mathfrak{i}$. Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$ est résoluble. On peut donc choisir une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle les $ad_{\mathfrak{g}} Y$, $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$, sont représentés par des matrices triangulaires supérieures. On peut choisir cette base de sorte qu'elle soit la réunion de bases des idéaux simples de $\mathfrak{g}$ avec une base du centre de $\mathfrak{g}$, ce que l'on fait dans la suite. Comme $ad_{\mathfrak{g}} X_n$ est un polynôme en $ad_{\mathfrak{g}} X$, et que $X \in \mathfrak{r}$, il est représenté dans cette base par une matrice triangulaire supérieure. Comme cet endomorphisme est nilpotent, sa diagonale est nulle. On en déduit que, pour tout $Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}$, les composantes de X_n et Y dans les idéaux simples de $\mathfrak{g}$ sont deux à deux orthogonales pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors, il résulte de l'orthogonalité, pour B, du centre de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^{der}$ et du Lemme 1(i), que

$$B(X_n, Y) = 0, \qquad Y \in \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}.$$

En utilisant la densité dans $\mathfrak{h}$ de la réunion de ses sous-algèbres de Cartan, on en déduit que X_n est orthogonal à $\mathfrak{i}$ pour B. Mais $\mathfrak{i}$ est un sous-espace isotrope pour B de dimension maximale. Donc X_n est élément de $\mathfrak{i}$ comme désiré.

Ecrivons $X_n = H + R$ avec $H \in \mathfrak{h}$, $R \in \mathfrak{r}$. Comme X_n commute à $\mathfrak{h}$, d'après (1.5) et que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$, on voit que H commute à $\mathfrak{h}$. Donc H est nul puisque $\mathfrak{h}$ est semi-simple. Finalement $X_n \in \mathfrak{r}$, et en fait $X_n \in \mathfrak{n}$, d'après la définition de $\mathfrak{n}$. Comme X appartient à un supplémentaire de $\mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{r}$ et que $X = X_s + X_n$, on a

$$X_s \in \mathfrak{r}, \qquad X_s \notin \mathfrak{a}_k + \mathfrak{n}$$

On pose $\mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_k + \mathbb{K}X_s$. D'après (1.5) et la semi-simplicité de $ad_{\mathfrak{g}} X_s$, $\mathfrak{a}_{k+1}$ vérifie les propriétés voulues.

Suite de la démonstration du Théorème 1. On pose $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}_p$, avec $p = dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{r}/\mathfrak{n}$, de sorte que $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est formé d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$ avec

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}] = \{0\}, \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}.$$

Comme $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ est résoluble, il existe une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}$, de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$. A noter que $\mathfrak{n}$ est contenue dans le radical nilpotent, $\mathfrak{v}$, de $\mathfrak{b}$, d'après la définition de $\mathfrak{n}$ et les propriétés du radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel. Montrons que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est contenue dans une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{b}$. En effet, d'après [Bor, Proposition 11.15], la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ contenant $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, elle contient une sous-algèbre de Borel du centralisateur $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathfrak{g}$. Celle-ci contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{l}$. Celle-ci est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ (cf. [Bou, Chap. VII, Paragraphe 2.3, Proposition 10]).

Soit $\mathfrak{u}$ la somme des sous espaces poids de $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, dans $\mathfrak{v}$, pour des poids non nuls. Alors $\mathfrak{p} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ est une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{l}$ est réductive, $\mathfrak{m} := \mathfrak{l}^{der}$ est semi-simple et le radical de $\mathfrak{p}$ est égal à la somme du centre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{l}$ avec $\mathfrak{u}$. La définition de $\mathfrak{u}$ montre que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u}$, donc le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$ est égal à $\mathfrak{u}$ (cf. [Bou, Chap. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1]). Comme $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$, que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$ est contenu dans $\mathfrak{b}$ et que $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{l}$, on a

$$\mathfrak{i} \subset \mathfrak{p}.$$

Or $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{der}}$ (resp. $\mathfrak{u}$) est la somme de ses intersections $\mathfrak{p}_i$ (resp. $\mathfrak{u}_i$) avec les idéaux simples $\mathfrak{g}_i$ de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{p}_i$ est orthogonal à $\mathfrak{u}_i$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}_i$, on en déduit que $\mathfrak{u}$ est orthogonal à $\mathfrak{p}$ pour B (cf. Lemme 1(i)). Comme $\mathfrak{i}$ est un sous-espace isotrope pour B, de dimension maximale et contenu dans $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{u}$ est inclus dans $\mathfrak{i}$. Il résulte alors de la définition de $\mathfrak{n}$, que $\mathfrak{u}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$. Par suite, on a

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}), \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}). \tag{1.6}$$

Remarquons que $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. On a $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{v} \cap \mathfrak{m})$ et $\mathfrak{v} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{v} \cap \mathfrak{l}$. Comme $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{v}$ et $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{n}$, on en déduit que $\mathfrak{n} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m})$. On déduit alors de (1.6) que: $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$. Finalement, on a

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{u}.$$

Alors, posant

$$\mathfrak{i}' := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m},$$

on a

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}).$$

C' est une sous-algèbre isotrope de $\mathfrak{m}$ pour la restriction de B à $\mathfrak{m}$, donc, d'après le Corollaire du Lemme 2(ii), de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de $\mathfrak{m}$.

De même, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est un sous espace isotrope de $\mathfrak{a}$ pour la restriction de B à $\mathfrak{a}$.

D'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à $\mathfrak{a}$ est de signature $(dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}, dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a})$ (resp. est non dégénérée). Il en résulte que la dimension réelle de $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est inférieure ou égale à $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}$. Mais $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m} + dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a} + dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{u}$. Comme $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$, on déduit de ce qui précède que l'on a

$$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i}' = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}, \qquad dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a} \tag{1.7}$$

LEMME 9. (i) *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}' := \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}$ *est réduite à zéro.*

(ii) *L'algèbre* $\mathfrak{n}$ *est égale au radical nilpotent de* $\mathfrak{p}$ *et est donc la somme de sous-espaces poids sous* $\mathfrak{a}$ *pour des poids non nuls.*

(iii) *L'algèbre* $\mathfrak{h}$ *a la forme indiquée dans le Théorème.*

Démonstration. Si $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k} + \mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est une sous-algèbre de Lie réelle et résoluble de $\mathfrak{m}$. On peut donc choisir une base de $\mathfrak{m}$, réunion de bases des idéaux simples de $\mathfrak{m}$, telle que, pour tout $X \in \mathfrak{k} + \mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$, $ad_{\mathfrak{m}}X$ soit représenté, dans cette base, par une matrice triangulaire supérieure. De plus, si X est élément de $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$, les éléments diagonaux de cette matrice sont nulles. On voit, grâce au Lemme 1(i), que $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est orthogonal à $\mathfrak{k} + \mathfrak{n}'$, pour la restriction, B', de B à $\mathfrak{m}$. Ceci étant vrai pour tout $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est orthogonal à $\mathfrak{i}'$ $(= \mathfrak{h} + \mathfrak{n}')$, pour B'. Mais B' est non dégénérée, d'après le Corollaire du Lemme 2, donc, d'après le Lemme 1(ii) et (1.7), $\mathfrak{i}'$ est un sous-espace isotrope de $\mathfrak{m}$, pour B', de dimension maximale. Il en résulte que $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est contenu dans $\mathfrak{i}'$. Mais $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est aussi contenu dans $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}^{der}$. Finalement $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}'$ est contenu dans l'intersection de $\mathfrak{i}'$ avec $\mathfrak{n}$, d'après la définition de celui-ci. Mais, comme $\mathfrak{i}'$ est contenu dans $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{i}' \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. Alors on a: $\mathfrak{n}' + i\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}'$, c'est à dire que $\mathfrak{n}'$ est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{g}$, ce qui est bien sur évident dans le cas complexe.

Soit $\mathfrak{h}_j$, $j = 1, \ldots, r$ les idéaux simples de $\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j$ est un idéal de l'algèbre de Lie simple réelle $\mathfrak{h}_j$, il y a deux possiblités pour $\mathfrak{h}_j$. Ou bien $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \{0\}$, et alors $\mathfrak{h}_j + i\mathfrak{h}_j$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe dont $\mathfrak{h}_j$ est une forme réelle. Ou bien $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j$ et $\mathfrak{h}_j$ est une sous-algèbre simple complexe de $\mathfrak{g}$. On remarquera que cette deuxième possibilité est exclue, si B est spéciale, puique $\mathfrak{h}_j$ serait alors semi-simple complexe et isotrope pour B.

On suppose que, pour $j = 1, \ldots, p$, $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \{0\}$, et que, pour $j = p + 1, \ldots, r$, $\mathfrak{h}_j \cap i\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j$. Si $j = 1, \ldots, p$, on note $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{h}_j \oplus i\mathfrak{h}_j$. Dans le cas complexe, i.e. si B est $\mathbb{C}$-bilinéaire, $\mathfrak{h}_j$ est toujours complexe et $p = 0$. Si $j = p + 1, \ldots, r$, on note $\mathfrak{k}_j$ la somme des projections de $\mathfrak{h}_j$ dans les idéaux simples de $\mathfrak{m}$. On note aussi $\mathfrak{k}'_j = \mathfrak{h}_j + \mathrm{i}\mathfrak{h}_j$, pour $j = 1, \ldots, r$. On note $\mathfrak{k} = \sum_{j=1,\ldots,r} \mathfrak{k}_j$ et $\mathfrak{k}' = \sum_{j=1,\ldots,r} \mathfrak{k}'_j = \mathfrak{h} + \mathrm{i}\mathfrak{h}$, qui est contenu dans $\mathfrak{k}_j$. Par ailleurs, deux éléments, X et Y, de $\mathfrak{m}$ commutent si et seulement X et iY commutent (resp. X commute à chacune des projections de Y dans les idéaux simples de $\mathfrak{m}$). Il en résulte que, pour $j \neq l$, $\mathfrak{k}_j$ commute à $\mathfrak{h}_l$, donc $\mathfrak{k}_j \cap (\sum_{l \neq j} \mathfrak{k}_l)$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{k}_j$, qui est semi-simple complexe. Il en résulte que

$$\mathfrak{k} = \bigoplus_{j=1,\ldots,r} \mathfrak{k}_j, \qquad \mathfrak{k}' = \bigoplus_{j=1,\ldots,r} \mathfrak{k}'_j. \tag{1.8}$$

Alors $\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ sont des sous-algèbres de Lie semi-simples complexes de $\mathfrak{m}$. Montrons que

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}. \tag{1.9}$$

En effet $\mathfrak{n}'$ est un idéal dans $\mathfrak{i}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}'$, puisque $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}'$ est l'intersection de l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{i}$ avec $\mathfrak{m}$. C'est donc un $\mathfrak{h}$-module, et aussi un $\mathfrak{k}'$-module puisque $\mathfrak{n}'$ est un espace vectoriel complexe. Donc $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est un sous-$\mathfrak{k}'$-module, et aussi une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{k}$. Il est clair que les $\mathfrak{k}_j$ sont des sous-$\mathfrak{k}'$-modules de $\mathfrak{k}$, qui n'ont aucun sous-quotient simple en commun. En effet, d'une part $\mathfrak{k}'_l$ agit trivialement sur $\mathfrak{k}_j$, si $j \neq l$. D'autre part, d'après les définitions, on voit que les sous-quotients simples du $\mathfrak{k}'_j$-module $\mathfrak{k}_j$ sont isomorphes à des sous-quotients de $\mathfrak{k}'_j$, dont aucun n'est trivial, puique $\mathfrak{k}'_j$ est une algèbre de Lie semi-simple. Donc, si $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est non nul, il a une intersection non nulle, $\mathfrak{k}''$, avec l'un des $\mathfrak{k}_j$, qui est un $\mathfrak{k}'_j$-sous-module. Comme $\mathfrak{k}_j$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{m}$, il en va de même de $\mathfrak{k}''$, qui est de plus résoluble, puisque c'est le cas de $\mathfrak{n}'$.

Si $j = 1, \ldots, p$, $\mathfrak{k}_j = \mathfrak{k}'_j$ et un $\mathfrak{k}'_j$-sous-module de $\mathfrak{k}_j$ est isomorphe un idéal de $\mathfrak{k}_j$. Alors $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}'$ est à la fois semi-simple et résoluble. Une contradiction qui montre (1.9) dans ce cas.

Si $j = p + 1, \ldots, r$, $\mathfrak{k}'_j = \mathfrak{h}_j$ est simple, donc l'une des projections de $\mathfrak{k}''$ sur un idéal simple de $\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathfrak{h}_j$ comme $\mathfrak{k}'_j$-module. Mais la projection de $\mathfrak{k}_j$ est produit d'idéaux isomorphes à $\mathfrak{h}_j$ et la projection de $\mathfrak{k}''$ sur l'un de ces facteurs est non nulle et $\mathfrak{h}_j$-invariante, donc isomorphe à $\mathfrak{h}_j$. Cette projection étant un morphisme d'algèbres de Lie, il en résulte que l'algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{k}''$, admet un quotient semi-simple. Une contradiction qui achève de prouver (1.9).

Pour $j = p + 1, \dots, r$, $\mathfrak{h}_j$ ne peut être contenu dans un idéal simple de $\mathfrak{m}$. En effet, d'après le Corollaire du Lemme 2, la restriction de B à $\mathfrak{m}$ est une forme de Manin. D'après le Lemme 1(ii) et le Lemme 2(v), la restriction de B à un idéal simple de $\mathfrak{m}$ est spéciale, et notre assertion en résulte, car pour $j = p + 1, \dots, r$, $\mathfrak{h}_j$ est isotrope et semi-simple complexe. Pour $j = p + 1, \dots, r$, on notera n_j, le nombre d'idéaux simples de $\mathfrak{m}$ dans lesquels $\mathfrak{h}_j$ a une projection non nulle, et pour $j = 1, \dots, p$, on pose $n_j = 1$. On vient de voir que

$$n_j \geq 2, \qquad j = p + 1, \dots, r. \tag{1.10}$$

Montrons que $\mathfrak{n}' = \{0\}$.

On a évidemment

$$dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \left(\sum_{j=1,\dots,r} dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_j \right) + dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}'.$$

Alors, en posant $p_j = 1$, pour $j = 1, \dots, p$, et $p_j = 2$, pour $j + p + 1, \dots, r$, on a

$$dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}' = \left(\sum_{j=1,\dots,r} p_j \, dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}'_j \right) = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}'. \tag{1.11}$$

Soit $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{k}$, contenant $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$, de radical nilpotent $\mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}$. Alors $\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{n}'$ est une algèbre de Lie résoluble, contenue dans $\mathfrak{m}$, donc contenue dans une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$, de $\mathfrak{m}$. Alors $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$ est contenue dans une sous algèbre de Cartan, $\mathfrak{j}_{\mathfrak{m}}$, de $\mathfrak{m}$, contenue dans $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ (voir avant (1.6)). De plus $\mathfrak{n}_k$ est contenu dans le radical nilpotent de $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$, qui vérifie

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}} = \{ X \in \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}} \mid ad_{\mathfrak{m}} X \textit{ est nilpotent} \}.$$

En effet, les éléments de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}$ sont représentés, dans toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}$, et donc de $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$, par des opérateurs nilpotents. De même, $\mathfrak{n}'$ est contenu dans $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$, car pour tout $X \in \mathfrak{n}'$, $ad_{\mathfrak{g}} X$, et donc $ad_{\mathfrak{m}} X$ est nilpotent.

On note $\mathfrak{j}''$ (resp. $\mathfrak{n}''$) un supplémentaire de $\mathfrak{j}_{\mathfrak{k}}$ dans $\mathfrak{j}_{\mathfrak{m}}$ (resp. $\mathfrak{n}_k \oplus \mathfrak{n}'$ dans $\mathfrak{n}_{\mathfrak{m}}$). Un calcul immédiat montre

$$dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m} = dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k} + 2 \, dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}' + dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{j}'' + 2 \, dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}''. \tag{1.12}$$

En posant $n_j = 1$ pour $j = 1, \dots, p$, on a immédiatement

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{k}) = \sum_{j=1,\dots,r} n_j \, dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}'_j. \tag{1.13}$$

Alors (1.11), joint à la première égalité de (1.7), et à (1.12), (1.13), implique

$$2\, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{n}' + \sum_{j=1,\ldots,r} p_j\, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{k}'_j = 2\, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{n}' + dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{j}'' + 2\, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{n}''$$
$$+ \sum_{j=1,\ldots,r} n_j\, dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{k}'_j.$$

Comme n_j est supérieur ou égal à p_j, d'après (1.10) et la définition des n_j, p_j, on en déduit

$$p_j = n_j, \qquad j = 1,\ldots,r, \quad \text{et} \quad \mathfrak{n}'' = \mathfrak{j}'' = \{0\}.$$

Alors $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}'$ contient la sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$, de $\mathfrak{m}$. C'est une sous-algèbre parabolique dont le radical est égal à $\mathfrak{n}'$, donc est nilpotent. Elle est donc égale à $\mathfrak{m}$ et son radical nilpotent $\mathfrak{n}'$ est réduit à zéro, ce qui prouve (i).

Alors (ii) résulte de la deuxième égalité de (1.6), car $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}$ qui est égale à $\mathfrak{n}$ (voir aprés (1.6)) est nul d'après ce qui précède.

En outre $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$, donc les $\mathfrak{k}_j$ sont des idéaux de $\mathfrak{m}$. On pose $\tilde{\mathfrak{m}}_0 = \oplus_{j=1,\ldots,p} \mathfrak{k}_j$, $\tilde{\mathfrak{h}}_0 = \oplus_{j=1,\ldots,p} \mathfrak{h}_j$. On pose $q = r - p$. Pour $l = 1,\ldots,q$, $\mathfrak{k}_{p+l}$ est somme de deux idéaux simples, $\mathfrak{m}'_l, \mathfrak{m}''_l$, car $n_{p+l} = 2$. La projection de $\mathfrak{h}_{l+p}$ sur chacun de ces idéaux est bijective, sa surjectivité résultant de la définition de $\mathfrak{k}_l$, son injectivité résultant de la simplicité de $\mathfrak{h}_{l+p}$ et de la non nullité de ce morphisme d'algèbres de Lie. Donc $\mathfrak{h}_{p+l} := \{X + \tau_l(X) \mid X \in \mathfrak{m}'_l\}$, où τ_l est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}'_l$ sur $\mathfrak{m}''_l$. Donc $\mathfrak{h}$ a la forme voulue. ∎

LEMME 10. *Aucun poids non nul de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ n'est nul sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un poids non nul α de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, nul sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. Soit $H^{\alpha} \in \mathfrak{a}$ tel que

$$K_{\mathfrak{g}}(H^{\alpha}, X) = \alpha(X), \qquad X \in \mathfrak{a}. \tag{1.14}$$

Alors H^{α} appartient à l'un des idéaux simples de $\mathfrak{g}$. En effet, soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{a}$. Alors α est la restriction à $\mathfrak{a}$ d'une racine β de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$ et l'on a

$$K_{\mathfrak{g}}(H^{\alpha}, H^{\alpha}) > 0. \tag{1.15}$$

Soit $H^{\beta} \in \mathfrak{j}$ tel que

$$K_{\mathfrak{g}}(H^{\beta}, X) = \beta(X), \qquad X \in \mathfrak{j}.$$

Alors $\mathfrak{j}$ (resp. $\mathfrak{a}$) est la somme directe de ses intersections avec les idéaux simples de $\mathfrak{g}$, et H^{β} (resp. H^{α}) appartient à l'une de celles-ci. On déduit alors du Lemme 1(i), qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$, non nul car B est non dégénérée, tel que, si B est $\mathbb{C}$-bilinéaire (resp. $\mathbb{R}$-bilinéaire à valeurs réelles),

$$B(\lambda H^{\alpha}, X) = K_{\mathfrak{g}}(\lambda \mu H^{\alpha}, X) \bigl(\text{resp. } Im\bigl(K_{\mathfrak{g}}(\lambda \mu H^{\alpha}, X)\bigr)\bigr),$$
$$\lambda \in \mathbb{C}, X \in \mathfrak{g}. \quad (1.16)$$

Comme α est nulle sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, il résulte de (1.14) et (1.16) que $\mathbb{C}H^{\alpha}$ est orthogonale à $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, pour B. Comme B est une forme de Manin, la restriction de B à $\mathfrak{a}$ est non dégénérée, et, dans le cas réel, de signature $(dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}, dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a})$. Tenant compte de (1.7), on voit que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est un sous-espace de $\mathfrak{a}$, isotrope pour B, de dimension maximale. Alors, ce qui précède montre que $\mathbb{C}H^{\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. Par ailleurs, si λ est une racine carrée de $i\mu^{-1}$, $B(\mu H^{\alpha}, \mu H^{\alpha})$ est non nul d'après (1.15) et (1.16). Une contradiction avec le fait que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est isotrope qui achève de prouver le Lemme. ∎

Fin de la démonstration du Théorème 1. Montrons la propriété suivante:

Toute sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{x}$ est égale au normalisateur dans $\mathfrak{g}$ de son radical nilpotent. (1.17)

Le normalisateur de la sous-algèbre parabolique est invariant par une sous-algèbre de Cartan contenue dans cette sous-algèbre parabolique. L'assertion en résulte facilement.

Montrons que $\mathfrak{n}$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{i}$. En effet, comme $\mathfrak{n}$ est somme de sous-espaces poids sous $\mathfrak{a}$ et qu'aucun de ces poids n'est nul sur $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, d'après le Lemme 9(iii), on a

$$[\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}.$$

Donc $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et l'intersection de $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}]$ avec le radical $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{n}$ de $\mathfrak{i}$ est égal à $\mathfrak{n}$. Donc, d'après [Bou, Chap. I, Paragraphe 5.3, Théorème 1], $\mathfrak{n}$ est bien le radical nilpotent de $\mathfrak{i}$. On a donc montré que $\mathfrak{i}$ s'écrit de la manière voulue, pour une décomposition de Langlands particulière du normalisateur, $\mathfrak{p}$, de $\mathfrak{n}$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}$ est une autre décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont isomorphes, puisqu'elles sont toutes les deux isomorphes à $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{i}$ contient $\mathfrak{n}$, les intersections de $\mathfrak{i}$ avec $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ se correspondent dans cet isomorphisme, et la décomposition de $\mathfrak{i}$ qu'on en déduit, relativement à cette nouvelle décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, a les propriétés voulues.

Etudions la partie réciproque du Théorème. Une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ est la somme de ses intersections avec les idéaux simples de $\mathfrak{g}$. En outre, elle est orthogonale à son radical nilpotent, pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On conclut que si $\mathfrak{i}$ a une décomposition comme dans l'énoncé, elle est isotrope pour B, et de dimension réelle égale à la dimension complexe de $\mathfrak{g}$. ∎

DÉFINITION 3. On rappelle qu'une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple réelle est une sous-algèbre de Cartan fondamentale si et seulement si elle contient des éléments réguliers dont l'image par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres imaginaires pures. Cela équivaut au fait qu'aucune racine non nulle de cette sous-algèbre de Cartan n'est réelle.

Une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie réelle est dite fondamentale si sa projection dans une sous-algèbre de Levi, parallèlement au radical, est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de cette algèbre de Lie semi-simple réelle.

Comme toutes les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle semi-simple sont conjuguées entre elles par des automorphismes intérieurs, il en va de même pour les sous-algèbres de Cartan fondamentales d'une algèbre de Lie réelle. En effet il suffit d'adapter la preuve du fait que (ii) implique (i), dans [Bou, Chap. VII, Paragraphe 3.5, Proposition 5], en remarquant pour cela que tout automorphisme intérieur d'une algèbre de Levi d'une algèbre de Lie réelle, s'étend en un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie.

LEMME 11. *On conserve les hypothèses et notations du Théorème* 1.

(i) *Si* $\mathfrak{f}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{h}$, *il existe des éléments réguliers de* $\mathfrak{g}$ *contenus dans* $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. *Le centralisateur dans* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}$, *de* $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$, *contenue dans* $\mathfrak{l}$, *vérifiant* $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$. *En outre* $\mathfrak{f}$ *est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de* $\mathfrak{h}$ *si et seulement si aucun poids non nul de* $\mathfrak{f}$ *dans* $\mathfrak{m}$ *n'est réel*.

(ii) *Si* $\mathfrak{f}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{h}, \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{i}$.

(iii) *Toute sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{i}$ (*resp. sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{i}$ *contenue dans* $\mathfrak{h} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$) *est conjuguée, par un automorphisme intérieur de* $\mathfrak{i}$, (*resp. égale*) *à une algèbre de ce type*.

(iv) *Soit* $\tilde{\mathfrak{f}}'$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{i}$. *Il existe une unique décomposition de Langlands* $\mathfrak{l}' + \mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{p}$, *telle que* $\mathfrak{l}'$ *contienne* $\tilde{\mathfrak{f}}'$. *Alors, notant* $\mathfrak{f}' := \tilde{\mathfrak{f}}' \cap \mathfrak{l}'^{der}$, *on a* $\tilde{\mathfrak{f}}' = \mathfrak{f}' + (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}')$, *où* $\mathfrak{a}'$ *est le centre de* $\mathfrak{l}'$. *De plus* $\tilde{\mathfrak{f}}'$ *est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de* $\mathfrak{i}$, *si et seulement si* $\mathfrak{f}'$ *est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de* $\mathfrak{h}' := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}'^{der}$.

Démonstration. Montrons (i). On raisonne par l'absurde. On note $\mathfrak{j}'$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, qui contient $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{a}$. Celle-ci existe puisque les éléments de $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{a}$ sont semi-simples. Supposons qu'aucun élément de $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ ne soit régulier dans $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{f}}$, il existe une racine α_X de $\mathfrak{j}'$ dans $\mathfrak{g}$, nulle sur X. Pour une racine donnée, l'intersection de son noyau avec $\tilde{\mathfrak{f}}$ est un fermé de $\tilde{\mathfrak{f}}$. Notre hypothèse montre que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est la réunion de ces fermés. Il en résulte que l'un de ces sous-espaces vectoriels est d'intérieur non vide, donc égal à $\tilde{\mathfrak{f}}$. Cela signifie qu'une racine de $\mathfrak{j}'$ s'annule sur $\tilde{\mathfrak{f}}$. Alors, d'après le Lemme 7, dont on vérifie aisément qu'il est valable pour toute décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, celle-ci doit être nulle sur $\mathfrak{a}$. C'est donc une racine de $\mathfrak{j}'$ dans $\mathfrak{m}$, qui ne peut être nulle sur $\mathfrak{f}$. Une contradiction qui prouve la première partie de (i). Le centralisateur $\mathfrak{j}$ de $\tilde{\mathfrak{f}}$ est donc une sous-algèbre de Cartan. Par ailleurs $\mathfrak{j}$ contient $\mathfrak{a}$. On en déduit la deuxième partie de (i).

Pour achever de prouver (i), il suffit de voir que les poids non nuls de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ sont les mêmes que ceux dans $\mathfrak{m}$. Ceci se fait aisément en utilisant le fait que $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des points fixes d'une af-involution et la définition des af-involutions.

Montrons (ii). Soit $\mathfrak{f}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$ et soit $\tilde{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$. D'après le Lemme 7, le nilespace de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans $\mathfrak{n}$ est réduit à zéro. Comme $\mathfrak{f}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, le nilespace de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans $\mathfrak{h}$ est égal à $\mathfrak{f}$. Finalement le nilespace de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans $\mathfrak{i}$ est égal à $\tilde{\mathfrak{f}}$. Alors (ii) résulte de [Bou, Chap. VII, Paragraphe 2.1, Proposition 4].

Montrons (iii). Soit $\tilde{\mathfrak{f}}'$ une autre sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{i}$. La projection, $\tilde{\mathfrak{f}}''$, de $\tilde{\mathfrak{f}}'$ sur $\tilde{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, parallèlement à $\mathfrak{n}$, est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{h}}$ (cf. [Bou, Chap. VII, Paragraphe 2.1, Corollaire 2 de la Proposition 4]), donc de la forme $\mathfrak{f}' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, où $\mathfrak{f}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$. Alors $\tilde{\mathfrak{f}}'$ et $\tilde{\mathfrak{f}}''$ sont deux sous algèbres de Cartan de $\mathfrak{i}$, ayant la même projection sur $\tilde{\mathfrak{h}}$, parallèlement à $\mathfrak{n}$, donc conjuguées par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{i}$, d'après [Bou, Chap. VII, Paragraphe 3.4, Proposition 5] (voir aussi après la Définition 3). Si de plus $\tilde{\mathfrak{f}}'$ est contenue dans $\tilde{\mathfrak{h}}$, le raisonnement ci-dessus montre qu'elle a la forme indiquée. Ce qui prouve (iii).

Prouvons (iv). Grâce à (iii), on se ramène, par conjugaison, au cas où $\tilde{\mathfrak{f}}'$ est contenue dans $\mathfrak{l}$ et comme dans (i). Si $\mathfrak{l}' + \mathfrak{n}$ est une décomposition de Langlands de $\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{l}'$ contient $\tilde{\mathfrak{f}}'$, $\mathfrak{l}'$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}$, contenu dans $\tilde{\mathfrak{f}}'$, dont le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{l}'$. Celle-ci est égale au centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\tilde{\mathfrak{f}}'$. D'où l'unicité de $\mathfrak{l}'$, grâce aux propriétés des décompositions de Langlands (cf. Lemme 3(i)). L'assertion sur les sous-algèbres de Cartan fondamentales est claire car $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{i}$, d'après le Théorème 1. ∎

2. TRIPLES DE MANIN POUR UNE ALGÈBRE DE LIE RÉDUCTIVE COMPLEXE: DESCENTE

Dans toute la suite $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie réductive complexe. On fixe, $\mathfrak{j}_0$, une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}_0$ une sous-algèbre de

Borel de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{j}_0$. On note $\mathfrak{b}'_0$ la sous-algèbre de Borel opposée à $\mathfrak{b}_0$, relativement à $\mathfrak{j}_0$.

DÉFINITION 4. Un triple de Manin pour $\mathfrak{g}$ est un triplet $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, où B est une forme de Manin sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$ sont des sous-algèbres de Lie réelles de $\mathfrak{g}$, isotropes pour B, telles que $\mathfrak{g} =: \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$. La forme B étant de Manin, les sous-algèbres isotropes sont de dimension réelle inférieure ou égale à la dimension complexe de $\mathfrak{g}$. Ceci implique que $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$ dont Lagrangiennes.

Si $\mathfrak{i}$ est sous $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}'$ est sous $\mathfrak{p}'$, on dit que le triple de Manin est sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

On note G le groupe connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note S le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$. Comme $\mathfrak{g}$ est complexe, les sous-groupes paraboliques de $\mathfrak{g}$ sont connexes (cf. [Bor], Théoréme 11.16). Donc, si $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, P est le sous-groupe parabolique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$.

On remarque que G agit sur l'ensemble des triples de Manin, en posant, pour tout triple de Manin $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et tout $g \in G$,

$$g(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}') := (B, Adg(\mathfrak{i}), Adg(\mathfrak{i}')). \tag{2.1}$$

Notre but est de décrire tous les triples de Manin modulo cette action de G.

PROPOSITION 1. *Tout triple de Manin est conjugué, sous l'action de G, à un triple de Manin $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, avec $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$ (un tel triple de Manin sera dit standard).*

De plus $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont uniques.

Démonstration. Soit $(B, \underline{\mathfrak{i}}, \underline{\mathfrak{i}}')$ un triple de Manin sous $(\underline{\mathfrak{p}}, \underline{\mathfrak{p}}')$. Soit $\underline{\mathfrak{b}}$ (resp. $\underline{\mathfrak{b}}'$) une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\underline{\mathfrak{p}}$ (resp. $\underline{\mathfrak{p}}'$).

On a $\mathfrak{g} = \underline{\mathfrak{i}} + \underline{\mathfrak{i}}' \subset \underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$. Donc $\underline{\mathfrak{p}} + \underline{\mathfrak{p}}'$ est égal à $\mathfrak{g}$ et $\underline{P}\underline{P}'$ est ouvert dans G. Mais $\underline{P}\underline{P}'$ est réunion de $(\underline{B}, \underline{B}')$-doubles classes, qui sont en nombre fini (Bruhat). L'une de ces doubles classes contenues dans $\underline{P}\underline{P}'$ doit donc être ouverte. Soit $p \in \underline{P}$ et $p' \in \underline{P}'$, tels que $\underline{B}pp'\underline{B}'$ soit un ouvert de G. On pose $B_1 = p^{-1}\underline{B}p$, $B'_1 = p'\underline{B}'p'^{-1}$. Alors le sous-groupe de Borel de G, B_1 (resp. B'_1), est contenu dans P (resp. P') et $B_1B'_1$ est ouvert dans G. Donc, on a $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}'_1 = \mathfrak{g}$ et l'intersection de $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}'_1$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}_1$ (cf. [Bor], Corollaire 14.13). Pour des raisons de dimension, cette intersection est réduite à $\mathfrak{j}_1$. Alors $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}'_1$ sont opposées relativement à $\mathfrak{j}_1$. D'après [Bor, Proposition 11.19], il existe $g' \in G$ tel que $Adg'(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_0$, $Adg'(\mathfrak{j}_1) = \mathfrak{j}_0$. Alors $Adg'(\mathfrak{b}'_1)$ est égal à $\mathfrak{b}'_0$. Notant $\mathfrak{i} = Adg'(\underline{\mathfrak{i}})$, $\mathfrak{i}' = Adg'(\underline{\mathfrak{i}}')$, on voit que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ vérifie les propriétés voulues.

L'unicité de $\mathfrak{p}$ résulte du fait que deux sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$, conjuguées par un élément de G et contenant une même sous-algèbre de Borel, sont égales (cf. [Bor, Corollaire 11.17]). ▮

On fixe désormais $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{p}'$) *une sous-algèbre parabolique de* $\mathfrak{g}$, *contenant* $\mathfrak{b}_0$ (*resp.* $\mathfrak{b}'_0$). *On note* $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ (*resp.* $\mathfrak{p}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{n}'$) *la décomposition de Langlands de* $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{p}'$) *telle que* $\mathfrak{l}$ (*resp.* $\mathfrak{l}'$) *contienne* $\mathfrak{j}_0$ (*cf. Lemme* 3). *On note* $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}^{der}$, $\mathfrak{a}$ *le centre de* $\mathfrak{l}$. *Si* $\mathfrak{i}$ *est une sous-algèbre de Lie réelle de* $\mathfrak{g}$, *Lagrangienne pour une forme de Manin, on notera* $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{a}$. *On introduit des notations similaires pour* $\mathfrak{p}'$.

Comme $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{b}'_0 \subset \mathfrak{p}'$), $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}'$) est contenu dans le radical nilpotent de $\mathfrak{b}_0$ (resp. $\mathfrak{b}'_0$). Ces derniers sont d'intersection réduite à zéro, donc

$$\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}. \tag{2.2}$$

Décomposant $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ en sous-espaces poids sous $\mathfrak{j}_0$, on voit que

$$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}). \tag{2.3}$$

PROPOSITION 2. (i) *Si un élément de* G *conjugue deux triples de Manin sous* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, *c'est un élément de* $P \cap P'$.

(ii) *Le groupe* $L \cap L'$ *est égal au sous-groupe analytique de* G, *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. *Notons* $N_{L'}$ (*resp.* N'_L), *le sous-groupe analytique de* G, *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}'$ (*resp.* $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$). *Alors on a*

$$P \cap P' = (L \cap L') N_{L'} N'_L.$$

De plus $N_{L'}$ *et* N'_L *commutent entre eux.*

Démonstration. Si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et $(B, \underline{\mathfrak{i}}, \underline{\mathfrak{i}}')$ sont deux triples de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, conjugués par un élément, g, de G, celui-ci conjugue le radical nilpotent de $\mathfrak{i}$ avec celui de $\underline{\mathfrak{i}}$, donc normalise $\mathfrak{n}$, puisque les deux triples de Manin sont sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. Mais un élément du normalisateur, Q, dans G de $\mathfrak{n}$, normalise le normalisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{n}$, c'est à dire $\mathfrak{p}$, comme on l'a vu plus haut (cf. (1.17)). Comme P est connexe, les éléments de Q normalisent P. Donc Q est inclus dans P et $g \in P$. De même, on a $g \in P'$. D'où (i).

Montrons (ii). Il est clair que $P \cap P'$ est un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$. On a

$$[\mathfrak{n} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{l}] \cap [\mathfrak{n}', \mathfrak{l}'] \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'.$$

Donc $N_{L'}$ et N'_L commutent entre eux, d'après (2.2). Alors $(L \cap L')^0 N_{L'} N'_L$ est un sous-goupe ouvert et connexe de $P \cap P'$, donc on a

$$(P \cap P')^0 = (L \cap L')^0 N_{L'} N'_L. \tag{2.4}$$

Soit $g \in P \cap P'$. Alors $Adg(\mathfrak{j}_0)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, c'est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$ (cf. [Bou, Chap. VIII, Paragraphe 2.1, Exemple 3]), donc conjugué, par un élément g' de $(P \cap P')^0$, à $\mathfrak{j}_0$, puisqu'il s'agit d'algèbres de Lie complexes. Donc $Adg'g(\mathfrak{j}_0) = \mathfrak{j}_0$ et $g'g$ est un élément de $P \cap P'$. En utilisant la décomposition de Bruhat de G et P, pour B_0, on voit que $g'g$ centralise le centre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{l}$. De même on voit que $g'g$ centralise le centre $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{l}'$. Donc $g'g$ est un élément du centralisateur, L'', de $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$ dans G. Mais $P'' := L''(N'_L N_{L'})$, est une décomposition de Langlands du sous-groupe parabolique de G, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{p}'' = (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}') \oplus \mathfrak{n}.$$

Or P'' est connexe, puisque G est complexe. Donc L'' est connexe. Par ailleurs, il contient $L \cap L'$ et a même algèbre de Lie que $L \cap L'$. Donc on a

$$L'' = L \cap L' = (L \cap L')^0. \tag{2.5}$$

On conclut alors que $g'g \in (L \cap L')^0$. Donc g est un élément de $(P \cap P')^0$. Ce qui précède montre que

$$P \cap P' = (P \cap P')^0.$$

On achève de prouver (ii), grâce à (2.4) et (2.5). ∎

Le Lemme suivant est une conséquence facile de résultats de Gantmacher (cf. [G]).

LEMME 12. *Si σ et σ' sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires d'une algèbre de Lie semi-simple complexe*, $\mathfrak{m}$, *celle-ci contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions*.

Démonstration. Avec nos hypothèses $\sigma\sigma'$ est un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{m}$, dont l'espace des points fixes, $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, est un espace vectoriel complexe, non réduit à zéro d'après [G, Théorème 28]. Mais $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, est égal à $\{X \in \mathfrak{m} \mid \sigma(X) = \sigma'(X)\}$ donc aussi égal à $\mathfrak{m}^{\sigma'\sigma}$. Si $X \in \mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, on a donc $\sigma'(\sigma(X)) = X$, soit encore $\sigma'(\sigma(X)) = \sigma(\sigma X))$. Donc $\sigma(X)$ est élément de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$. Par suite σ, restreint à $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ est une involution antilinéaire de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$ L'ensemble de ses points fixes est une forme réelle de $\mathfrak{m}^{\sigma\sigma'}$, donc il est non réduit à zéro. Mais cet ensemble est égal à $\mathfrak{m}^{\sigma} \cap \mathfrak{m}^{\sigma'}$. ∎

PROPOSITION 3. *Si σ et σ' sont deux af-involutions d'une algèbre de Lie semi-simple complexe*, $\mathfrak{m}$, *elle contient au moins un élément non nul et invariant par ces deux involutions*.

Démonstration. On note $\mathfrak{m}_j$, $j = 1, \ldots, r$, les idéaux simples de $\mathfrak{m}$. On définit une involution θ de $\{1, \ldots, r\}$ caractérisée par: $\sigma(\mathfrak{m}_j) = \mathfrak{m}_{\theta(j)}$, $j = 1, \ldots, r$. Nous allons d'abord étudier le cas suivant:

$$\textit{Il existe } j \textit{ tel que } \theta(j) = \theta'(j) = j. \tag{2.6}$$

Dans ce cas, la restriction de σ et σ' à $\mathfrak{m}_j$, sont deux automorphismes involutifs et antilinéaires de $\mathfrak{m}_j$, d'après la définition des f-involutions, qui ont des points fixes non nuls en commun, d'après le Lemme précédent. La Proposition en résulte, dans ce cas.

Supposons maintenant

$$\textit{Il existe } j \textit{ tel que } \theta(j) = \theta'(j) \neq j. \tag{2.7}$$

On note $j' := \theta(j)$. Il est clair que: $(\mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma} = \{X + \sigma(X) \mid X \in \mathfrak{m}_j\}$ et de même pour $(\mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$. Il existe un élément non nul, X de $\mathfrak{m}_j$ tel que $(\sigma'^{-1}\sigma)(X) = X$, car $\sigma'^{-1}\sigma$ est un automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{m}_j$ (cf. [G, Théorème 28]). Alors $X + \sigma(X)$ est un élément non nul de $(\mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma} \cap (\mathfrak{m}_j \oplus \mathfrak{m}_{j'})^{\sigma'}$, ce qui prouve la Proposition dans ce cas. Il nous reste à étudier le cas suivant:

$$\textit{Pour tout } j, \qquad \theta(j) \neq \theta'(j). \tag{2.8}$$

On construit, pour tout j, par récurrence sur n, une suite $j_1 = j, j_2, \ldots, j_n, \ldots,$ telle que

$$\textit{pour tout } n, \qquad j_{n+1} \neq j_n, \tag{2.9}$$

$$\textit{pour tout } n, \qquad j_{n+1} = \theta(j_n) \textit{ ou } \theta'(j_n). \tag{2.10}$$

Plus précisément, on pose

$$j_2 = \theta(1) \qquad \textit{si } \theta(1) \neq 1,\ j_2 = \theta'(1) \textit{ sinon} \tag{2.11}$$

et, pour $n \geq 2$, on pose

$$\begin{aligned}
j_{n+1} &= \theta(j_n) && \textit{si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \textit{ et } \theta(j_n) \neq j_n \\
j_{n+1} &= \theta'(j_n) && \textit{si } j_n = \theta'(j_{n-1}) \textit{ et } \theta(j_n) = j_n \\
j_{n+1} &= \theta'(j_n) && \textit{si } j_n = \theta(j_{n-1}) \textit{ et } \theta'(j_n) \neq j_n \\
j_{n+1} &= \theta(j_n) && \textit{si } j_n = \theta(j_{n-1}) \textit{ et } \theta'(j_n) = j_n.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ces relations définissent la suite (j_n), car, à cause de (2.8), on a nécessairement $\theta(j_n) \neq \theta'(j_n)$ et $\theta(j_{n-1}) \neq \theta'(j_{n-1})$. Par ailleurs les relations (2.9) et (2.10) sont vérifiées, la première résultant d'une récurrence immédiate.

On obtient également les relations suivantes:

$$\textit{Pour } n \geq 2, \textit{ si } \theta(j_n) \neq j_n \textit{ et si } \theta'(j_n) \neq j_n \textit{ on a}:$$
$$(j_{n-1}, j_n, j_{n+1}) \textit{ est égal à } \big(\theta(j_n), j_n, \theta'(j_n)\big) \textit{ ou à } \big(\theta'(j_n), j_n, \theta(j_n)\big). \tag{2.13}$$

$$\textit{Pour } n \geq 2 \textit{ et si } \theta(j_n) = j_n \textit{ ou si } \theta'(j_n) = j_n \textit{ on a}: j_{n-1} = j_{n+1}. \tag{2.14}$$

Après renumérotation des $\mathfrak{g}_j$, on peut supposer que le début de la suite (j_n), s'écrit $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_p = p$, $j_{p+1} = k < p$.

On fait d'abord la convention suivante:

$$\begin{gathered}\textit{S' il existe } j \textit{ tel que } \theta(j) = j \textit{ ou } \theta'(j) = j, \textit{ on suppose qu' on} \\ \textit{l' a choisi comme premier élément, et, quitte à échanger le role} \\ \textit{de } \theta \textit{ et } \theta', \textit{ qu'il est fixé par } \theta. \textit{ On a alors } \theta(1) = 1,\ \theta'(1) = 2.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Traitons le cas où $p = 2$. Alors $j_1 = j_3$, et (2.8), (2.13) montrent que $\theta(2)$ ou $\theta'(2)$ est égal à 2. Alors on doit avoir $\theta(1) = 1$, d'après (2.15), puis $\theta'(1) = 2$ d'après (2.11). Comme $\theta'(1) = 2$, on a nécessairement $\theta(2) = 2$. Dans ce cas, l'élément $X_1 + X_2$ de $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ est invariant par σ et σ' si et seulement si on a

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_2 = \sigma(X_2), \quad X_2 = \sigma'(X_1)$$

ce qui équivaut au système

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_1 = (\sigma'^{-1}\sigma\sigma')(X_1), \quad X_2 = \sigma'(X_1).$$

Mais la restriction de σ à $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_2$) est un automorphisme involutif antilinéaire, puisque $\theta(1) = 1$ et $\theta(2) = 2$ (cf. Lemme 5). De plus, la restriction de σ' à $\mathfrak{m}_1$ est soit $\mathbb{C}$-linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Alors, la restriction de $\sigma'^{-1}\sigma\sigma'$ à $\mathfrak{m}_1$ est un automorphisme involutif antilinéaire. Alors, dans le cas $p = 2$, la Proposition résulte du Lemme 12.

On suppose maintenant

$$p > 2. \tag{2.16}$$

On remarque d'abord que

$$\textit{Si } j = 2, \dots, p-1, \textit{ on a } \theta(j) \neq j \textit{ et } \theta'(j) \neq j. \tag{2.17}$$

En effet, si on avait par exemple $\theta(j) = j$, (2.14) conduirait à $j - 1 = j + 1$ une contradiction qui prouve (2.17).

Montrons maintenant que

$$k = 1 \textit{ ou } p - 1. \tag{2.18}$$

Supposons $k \neq 1$. Alors, on a $1 < k \leq p - 1$. Alors d'après (2.13) et (2.14), on a l'égalité d'ensembles

$$\{\theta(k), \theta'(k)\} = \{k - 1, k + 1\}, \tag{2.19}$$

ce qui implique

$$\theta(k) \neq k, \qquad \theta'(k) \neq k. \tag{2.20}$$

Comme $j_{p+1} = k$, on déduit de (2.20) et (2.13) que la séquence (j_p, j_{p+1}, j_{p+2}) est égale soit à $(\theta(k), k, \theta'(k))$, soit à $(\theta'(k), k, \theta(k))$, c'est à dire, grâce à (2.19), soit à $(k - 1, k, k + 1)$, soit à $(k + 1, k, k - 1)$. Mais $j_p = p$, est différent de $k - 1$. Donc $p = k + 1$, i.e. $k = p - 1$. Ceci achève de prouver (2.18).

Traitons d'abord le cas

$$k = 1. \tag{2.21}$$

Comme $p > 2$, on a $1 \neq p - 1$. Donc $j_{p-1} = p - 1$, est différent de $j_{p+1} = 1$. Alors, (2.14), (2.13) impliquent l'égalité d'ensembles

$$\{\theta(p), \theta'(p)\} = \{p - 1, 1\}. \tag{2.22}$$

Supposons, d'abord que $\theta'(1) = 2$, ce qui implique, d'après (2.11), que $\theta(1) = 1$. Comme $p > 2$, ni $\theta(p)$, ni $\theta'(p)$ ne peut être égal à 1. Une contradiction avec l'équation précédente qui montre que l'on doit avoir, d'après (2.11),

$$\theta(1) = 2. \tag{2.23}$$

Comme $p > 2$, la seule possibilité laissée par (2.22) est

$$\theta(p - 1) = p \qquad \text{et} \qquad \theta'(p) = 1. \tag{2.24}$$

On déduit de (2.23) et (2.17), joints à (2.13) et (2.20), que, pour $j = 1, \ldots, p - 1$, on a

$$\theta(j) = j + 1, \textit{ si } j \textit{ est impair } (\textit{resp. } \theta'(j) = j + 1 \textit{ si } j \textit{ est pair}) \tag{2.25}$$

ce qui, joint à (2.24), implique que p est pair. Notons $p = 2q$.

On déduit de (2.25) et (2.23) qu'un élément $X_1 + \cdots + X_p$ de $\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_p$, avec $X_1 \in \mathfrak{m}_1, \dots, X_p \in \mathfrak{m}_p$, est invariant à la fois par σ et σ' si et seulement si le système suivant est vérifié.

$$\begin{gathered}\sigma(X_1) = X_2, \qquad \sigma'(X_2) = X_3 \\ \dots, \dots \\ \sigma(X_{2j-1}) = X_{2j}, \qquad \sigma'(X_{2j}) = X_{2j+1} \\ \dots, \dots \\ \sigma(X_{2q-1}) = X_{2q}, \qquad \sigma'(X_{2q}) = X_1.\end{gathered}$$

Notons τ la restriction de $(\sigma'\sigma)^q$ à $\mathfrak{m}_1$, qui est un automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{m}_1$. Ce système possède une solution non nulle si et seulement si l'équation

$$X_1 = \tau(X_1), \qquad X_1 \in \mathfrak{m}_1$$

possède une solution non nulle. C'est le cas, d'après [G, Théorème 28]. Ceci achève de prouver la Proposition dans le cas $k = 1$.

On suppose maintenant

$$k = p - 1 > 1. \tag{2.26}$$

Comme $(j_{p-1}, j_p, j_{p+1}) = (p-1, p, p-1)$, on déduit de (2.13), (2.14) et (2.8), que l'on a soit

$$\theta(p) = p, \qquad \theta'(p) = p - 1 \tag{2.27}$$

soit

$$\theta(p) = p - 1, \qquad \theta'(p) = p. \tag{2.28}$$

Alors, d'après notre convention (2.15), on a $\theta(1) = 1$. Supposons (2.27) vérifié. Comme ci-dessus, ceci joint à (2.23) et (2.13), montre que p est pair et que, pour $j = 1, \dots, p-1$, on a

$$\theta'(j) = j + 1, \textit{ si } j \textit{ est impair } \big(\textit{resp. } \theta(j) = j + 1 \textit{ si } j \textit{ est pair}\big). \tag{2.29}$$

On note $p = 2q$. On déduit de (2.27) et (2.29) qu'un élément $X_1 + \cdots + X_p$ de $\mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_p$, avec $X_1 \in \mathfrak{m}_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{m}_p$, est invariant à la fois par σ et σ' si et seulement si le système suivant est vérifié.

$$\begin{gathered} \sigma(X_1) = X_1, \qquad \sigma'(X_1) = X_2 \\ \ldots, \ldots \\ \sigma(X_{2j}) = X_{2j+1}, \qquad \sigma'(X_{2j+1}) = X_{2j+2} \\ \ldots, \ldots \\ \sigma(X_{2q-2}) = X_{2q-1}, \qquad \sigma'(X_{2q-1}) = X_{2q} \\ \sigma(X_{2q}) = X_{2q} \end{gathered}$$

Notant τ la restriction de $(\sigma'\sigma)^{q-1}\sigma'$ à $\mathfrak{m}_1$, qui est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{m}_1$ sur $\mathfrak{m}_p$, ce système possède une solution non nulle si et seulement si le système

$$X_1 = \sigma(X_1), \quad X_1 = (\tau^{-1}\sigma\tau)(X_1), \qquad X_1 \in \mathfrak{m}_1 \tag{2.30}$$

possède une solution non nulle. La restriction de σ à $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_p$ est antilinéaire. Par ailleurs τ est soit $\mathbb{C}$-linéaire, soit antilinéaire, d'après le Lemme 6. Donc la restriction à $\mathfrak{m}_1$ de $\tau^{-1}\sigma\tau$ est antilinéaire. Il résulte alors du Lemme 12, que (2.30) à une solution non nulle. Ce qui achève la preuve de la Proposition dans le cas étudié. Le cas où (2.28) est satisfait se traite de manière similaire, mais alors p est impair.

Ceci achève notre discussion et la preuve de la Proposition. ∎

THÉORÈME 2. *Si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative et si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin de $\mathfrak{g}$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est différent de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un triple de Manin, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, sous $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, et que $\mathfrak{g}$ ne soit pas commutative. Alors $\mathfrak{h} := \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}^{der}$ (resp. $\mathfrak{h}' := \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{g}^{der}$) est l'espace des points fixes d'une af-involution σ (resp. σ') de $\mathfrak{g}^{der}$, d'après le Théorème 1. En appliquant la Proposition précédente, on aboutit à une contradiction avec l'hypothése $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$, ce qui achève de prouver le Théorème. ∎

Notation. Si $\mathfrak{e}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{r}$ un sous-espace $\mathfrak{e}$-invariant de $\mathfrak{g}$, on note $\Delta(\mathfrak{r}, \mathfrak{e})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{e}$ dans $\mathfrak{r}$. Les poids sont les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{e}, \mathbb{C})$ qui sont des valeurs propres pour l'action de $\mathfrak{e}$ agissant sur $\mathfrak{r}$. Le sous-espace de poids λ est noté $\mathfrak{g}^{\lambda}$.

Soit V un sous-espace $\mathfrak{j}_0$ invariant de $\mathfrak{g}$. On suppose qu'il est la somme de sous-espaces poids de $\mathfrak{g}$ pour $\mathfrak{j}_0$, ce qui s'écrit aussi

$$V = \sum_{\{\lambda \in \mathfrak{j}_0^* | V^{\lambda} \neq \{0\}\}} \mathfrak{g}^{\lambda}.$$

Alors V admet un unique supplémentaire $\mathfrak{j}_0$-invariant, $V^\perp$, qui est égal à la somme des sous-espaces poids de $\mathfrak{g}$ qui ont une intersection nulle avec V, soit encore

$$V^\perp = \sum_{\{\lambda \in \mathfrak{j}_0^* | \mathfrak{g}^\lambda \cap V = \{0\}\}} \mathfrak{g}^\lambda.$$

On note p_V (resp. p^V, la projection de $\mathfrak{g}$ sur V (resp. $V^\perp$) parallèlement à $V^\perp$ (resp. V). Tout sous-espace $\mathfrak{j}_0$-invariant est stable sous p^V et p_V.

Si de plus V est $\mathfrak{l}$-invariant, $V^\perp$ est aussi $\mathfrak{l}$-invariant. En effet, comme $\mathfrak{l}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, V admet un supplémentaire $\mathfrak{l}$-invariant qui n'est autre que $V^\perp$. On voit aussi que dans ce cas, $V^\perp$ ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}_0$ de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{l}$. On a le même fait pour $\mathfrak{l}'$ et $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

THÉORÈME 3. *Soit B une forme de Manin réelle (resp. complexe) sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{i}, \mathfrak{i}'$ des sous-algèbres de Lie Lagrangiennes de $\mathfrak{g}$ pour B, avec $\mathfrak{i}$ sous $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{i}'$ sous $\mathfrak{p}'$. On a, grâce au Théorème* 1, $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, *où* $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$.

On note $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. *On fait de même pour* $\mathfrak{i}'$.

Les conditions (i) *et* (ii) *suivantes sont équivalentes*:

(i) $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *est un triple de Manin*

(ii) *Notant* $\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}')$, $\mathfrak{i}'_1 = p^{\mathfrak{n}}(\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p})$, *on a*

(a) $\mathfrak{i}_1$ *et* $\mathfrak{i}'_1$ *sont contenues dans* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, *et* $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ *est un triple de Manin dans* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, *où* B_1 *désigne la restriction de* B *à* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

(b) $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}'$ *et* $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$ *sont réduits à zéro*.

Si l'une de ces conditions est vérifiée, on appellera $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ *l'antécédent du triple de Manin* $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$.

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Supposons que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ soit un triple de Manin dans $\mathfrak{g}$. Pour des raisons de dimension, ceci équivaut à $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}' = \{0\}$. Ceci implique immédiatement la propriété (b) de (ii).

Montrons ensuite que $\mathfrak{i}_1$ est une sous-algèbre de Lie réelle (resp. complexe) de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, et isotrope pour B_1.

Etudiant les sous-espaces poids sous $\mathfrak{j}_0$, on voit que

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}'). \tag{2.31}$$

Comme $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est $\mathfrak{j}_0$-invariant et que $p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}')$ est réduit à zéro, on a

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}') \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'.$$

Il en résulte que $\mathfrak{i}_1$ est bien contenu dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Par ailleurs, la restriction de $p^{\mathfrak{n}'}$ à $\mathfrak{p}'$ est la projection sur $\mathfrak{l}'$, parallèlement à $\mathfrak{n}'$. C'est donc un morphisme d'algèbres de Lie, ce qui implique que $\mathfrak{i}_1$ est une sous-algèbre de Lie rélle de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

Soit $X, X_1 \in \mathfrak{i}_1$. Ce sont des éléments de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, et il existe N' et $N_1' \in \mathfrak{n}'$ tels que Y et Y_1 soient éléments de $\mathfrak{i}$, où

$$Y := X + N', \qquad Y_1 := X_1 + N_1'.$$

Par ailleurs $\mathfrak{n}'$ et $\mathfrak{p}'$ sont orthogonaux pour B (cf. la fin de la démonstration du Théorème 1). Un calcul immédiat montre alors que $B(Y, Y_1)$ est égal à $B_1(X, X_1)$. Comme $Y, Y_1 \in \mathfrak{i}$, $B(Y, Y_1)$ est nul. Finalement, $\mathfrak{i}_1$ est isotrope pour B_1. On montre de même des propriétés similaires pour $\mathfrak{i}_1'$.

Montrons $\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1' = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Soit $X \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Alors $X = I + I'$, avec $I \in \mathfrak{i}$, $I' \in \mathfrak{i}'$. Ecrivons $I = H + N$, $I' = H' + N'$ où $H \in \tilde{\mathfrak{h}}$, $H' \in \tilde{\mathfrak{h}}'$, $N \in \mathfrak{n}$, $N' \in \mathfrak{n}'$. On a donc

$$X = H + N + H' + N' \tag{2.32}$$

ce qui implique: $H = X - H' - N' - N$. On voit ainsi que H est élément de $(\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{l}$. Décomposant sous l'action de $\mathfrak{j}_0$, on voit que

$$(\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}. \tag{2.33}$$

Finalement H est élément de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$. de même, on voit que H' est élément de $\tilde{\mathfrak{h}}' \cap \mathfrak{p}$. Par ailleurs, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}'$ sont des sous-espaces $\mathfrak{j}_0$-invariants et en somme directe avec $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. Donc, appliquant $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à (2.32), on a

$$X = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) + p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H').$$

De (2.31), on déduit que la restriction de $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$ est égale à la restriction de $p^{\mathfrak{n}'}$ à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$. Donc, on a

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) = p^{\mathfrak{n}'}(H) \in \mathfrak{i}_1$$

on obtient de même

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) \in \mathfrak{i}_1'$$

et l'on conclut que

$$X \in \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1'.$$

Ceci achève de prouver que

$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1'. \tag{2.34}$$

Par ailleurs:

$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est le centralisateur d'un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$, dont l'image par la représentation adjointe n'a que des valeurs propres réelles. (2.35)

En effet $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus ((\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}) \oplus \mathfrak{n})$ est une décomposition de Langlands d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$.

Alors la restriction B_1 de B à $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ est une forme de Manin (cf. Corollaire du Lemme 2), et $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1$, qui sont isotropes pour B_1, sont de dimensions réelles inférieures ou égales à la dimension complexe de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. La somme dans (2.34) est nécessairement directe, ce qui achève de prouver que (i) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (i). Supposons satisfaites les conditions (a) et (b) de (i). Montrons que $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ est réduit à zéro. Soit X un élément de $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$. Alors

$$X = H + N = H' + N', \qquad \text{où } H \in \tilde{\mathfrak{h}},\ H' \in \tilde{\mathfrak{h}}',\ N \in \mathfrak{n},\ N' \in \mathfrak{n}'. \quad (2.36)$$

On a alors

$$H = H' + N' - N \in \mathfrak{l} \cap (\mathfrak{p}' + \mathfrak{n}).$$

L'égalité (2.33) implique que $H \in \mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}'$. De même, on montre que $H' \in \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{p}$. Appliquant $p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}$ à (2.36), on voit que

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(X) = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H) = p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(H')$$

et, grâce à la première partie de la démonstration, cela conduit à

$$p_{\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'}(X) = p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') \in \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}'_1.$$

Donc on a

$$p^{\mathfrak{n}'}(H) = p^{\mathfrak{n}}(H') = 0.$$

Mais $p^{\mathfrak{n}'}$ est injective sur $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$, car $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est réduit à zéro. En effet $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est contenu dans $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l}$. On voit que cette dernière intersection est égal à $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{n}' \cap \tilde{\mathfrak{h}}$ est égal à $\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{h}$, qui est réduit à zéro, d'après (b). Donc H est nul et il en va de même de H'. Alors X est un élément de $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}'$, qui est réduit à zéro, d'après nos hypothèses sur $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$. Donc X est nul et $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$ est réduit à zéro. Alors la somme $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}'$ est directe, et l'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}'$ pour des raisons de dimension. Ceci achève de prouver le Théorème. ∎

PROPOSITION 4. *Si $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, d'antécédent $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$, et si $g = nn'x \in P \cap P'$, où $x \in L \cap L'$, $n \in N_{L'}$, $n' \in N'_L$, l'antécédent de $(B, Ad\,g(\mathfrak{i}), Ad\,g(\mathfrak{i}'))$ est égal à $(B_1, Ad\,x(\mathfrak{i}_1), Ad\,x(\mathfrak{i}'_1))$.*

Démonstration. Ecrivons $\underline{\mathfrak{i}} = Ad\,g(\mathfrak{i})$ et $\underline{\tilde{\mathfrak{h}}} = \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{l}$, etc. On note $(B_1, \underline{\mathfrak{i}}_1, \underline{\mathfrak{i}}'_1)$, l'antécédent de $(B, Ad\,g(\mathfrak{i}), Ad\,g(\mathfrak{i}'))$. On a, grâce à la Proposition 2,

$$g = n'nx = n'x(x^{-1}nx).$$

Donc

$$Ad\,g(\mathfrak{i}) = Ad\,n'x(\mathfrak{i})$$

puisque $x^{-1}nx \in N \subset I$. Comme $n'x \in (L \cap L')N'_L \subset L$, cela implique

$$\underline{\tilde{\mathfrak{h}}} = Ad\,n'x(\tilde{\mathfrak{h}}),$$

où $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{l}$. Mais $n'x$ est aussi élément de P'. Alors, on a

$$\underline{\tilde{\mathfrak{h}}} \cap \mathfrak{p}' = Ad\,n'x\big(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'\big).$$

D'où l'on déduit

$$\underline{\mathfrak{i}}_1 = p^{\mathfrak{n}'}\Big(Ad\,n'x\big(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'\big)\Big).$$

Mais il est clair que la restriction de $p^{\mathfrak{n}'}$ à $\mathfrak{p}'$, n'est autre que la projection sur $\mathfrak{l}'$, parallélement à $\mathfrak{n}'$. Cette restriction entrelace l'action adjointe de P' sur $\mathfrak{p}'$ avec l'action naturelle de P' sur $\mathfrak{l}'$, identifié au quotient de $\mathfrak{p}'$ par $\mathfrak{n}'$ (N' agit trivialement). Il en résulte

$$\underline{\mathfrak{i}}_1 = Ad\,x\Big(p^{\mathfrak{n}'}\big(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'\big)\Big) = Ad\,x(\mathfrak{i}_1)$$

comme désiré. On traite de manière similaire $\underline{\mathfrak{i}}'_1$. ▮

Proposition 5. *Tout triple de Manin sous* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ *est conjugué, par un élément de* $P \cap P'$ *à un triple de Manin*, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, *sous* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, *d'antécédent* $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ *pour lequel il existe une sous-algèbre de Cartan fondamentale* $\tilde{\tilde{\mathfrak{f}}}$ (*resp.* $\tilde{\tilde{\mathfrak{f}}}'$), *de* $\mathfrak{i}$ (*resp.* $\mathfrak{i}'$), *contenue dans* $\mathfrak{i}_1$ (*resp.* $\mathfrak{i}'_1$). *On dit que le triple* $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *est lié à son antécédent*, *avec lien* $(\tilde{\tilde{\mathfrak{f}}}, \tilde{\tilde{\mathfrak{f}}}')$.

Démonstration. Démontrons (i). Soit $(B, \underline{\mathfrak{i}}, \underline{\mathfrak{i}}')$ un triple de Manin pour $\mathfrak{g}$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. On note $\underline{\mathfrak{h}} = \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{m}$, etc. On note $\underline{\sigma}$ (resp. $\underline{\sigma}'$), l'af-involution de $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}'$) ayant $\underline{\mathfrak{h}}$ (resp. $\underline{\mathfrak{h}}'$) pour espace de points fixes. On définit de même $\underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$. Comme $\underline{\mathfrak{i}} + \underline{\mathfrak{i}}' = \mathfrak{g}$, on a

$$\underline{\mathfrak{i}} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}.$$

Appliquant $p_{\mathfrak{l}}$ à cette égalité, on en déduit

$$(\underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{l}) + (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}.$$

On applique encore la projection de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{m}$, parallèlement à $\mathfrak{a}$ pour obtenir

$$\underline{\mathfrak{h}} + (\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}.$$

En conséquence, $\underline{H}(P' \cap M)^0$ est ouvert dans M. Or $(P' \cap M)^0$ est le sous groupe parabolique de M, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}$. Par ailleurs σ étant une af-involution, $\mathfrak{m}$ est le produit d'idéaux $\mathfrak{m}_j$, invariants par σ et sur lesquels induit:

soit une conjugaison par rapport à une forme réelle,

soit un automorphisme de la forme $((X,Y) \mapsto (\tau^{-1}(Y), \tau(X))$, où τ est un isomorphisnie linéaire ou antilinéaires, entre deux idéaux de $\mathfrak{m}_j$, $\mathfrak{m}'_j$, $\mathfrak{m}''_j$, dont $\mathfrak{m}_j$ est la somme directe.

Il résulte alors de la description des $((H \cap M)^0, (P' \cap M)^0)$-classes ouvertes M2 et M1 Proposition 1 et Théorème 1, que $\underline{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ contient une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\underline{\mathfrak{f}}$ de $\underline{\mathfrak{h}}$ et une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}$, de $\mathfrak{m}$, contenant $\underline{\mathfrak{f}}$, contenue dans $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{m}$, et telle que

$$\underline{\sigma}(\underline{\mathfrak{b}}) + \underline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{m}. \tag{2.37}$$

D'après le Lemme 11,

$$\tilde{\underline{\mathfrak{f}}} := \underline{\mathfrak{f}} + \underline{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{a}}$$

est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\underline{\mathfrak{i}}$ et le centralisateur dans $\mathfrak{g}$, $\underline{\mathfrak{j}}$, de $\tilde{\underline{\mathfrak{f}}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Comme $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$, $\underline{\mathfrak{j}}$ contient $\mathfrak{a}$. Donc $\underline{\mathfrak{j}}$ est égale à $(\underline{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$ et est contenue dans $\mathfrak{l}$. De la définition des af-involutions, il résulte que toute sous-algèbre de Cartan de $\underline{\mathfrak{h}}$ contient des éléments réguliers de $\mathfrak{m}$. Alors la sous-algèbre de Cartan, $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$, de $\mathfrak{m}$ est égale au centralisateur de $\mathfrak{f}(\subset \mathfrak{b})$ dans $\mathfrak{m}$. Il résulte alors de [Bor], Proposition 11.15, que $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}$ est contenue dans $\mathfrak{b}$. Donc $\underline{\mathfrak{j}} = (\underline{\mathfrak{j}} \oplus \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$, donc elle est conjuguée à $\mathfrak{j}_0$, par un élément du sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l}$. Mais, d'après (2.31), on a: $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{l} = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \oplus (\mathfrak{n}' \cap \mathfrak{l})$ et ce sous-groupe analytique est égal à $(L \cap L')N'_L$, puisque $L \cap L'$ est connexe, d'après la Proposition 2.

Donc, il existe $n' \in N'_L$, $x \in L \cap L'$, tels que

$$Ad\, xn'(\underline{\mathfrak{j}}) = \mathfrak{j}_0$$

soit encore

$$Ad\, n'(\underline{\mathfrak{j}}) = Ad\, x^{-1}(\mathfrak{j}_0) \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'. \tag{2.38}$$

On trouve de même $\tilde{\underline{\mathfrak{f}}}'$, $\underline{\mathfrak{b}}'$, $\underline{\mathfrak{j}}'$ et $x' \in L \cap L'$, $n \in N_{L'}$, vérifiant des propriétés similaires. On pose

$$u = nn', \quad \mathfrak{i} = Ad\, u(\underline{\mathfrak{i}}), \quad \mathfrak{i}' = Ad\, u(\underline{\mathfrak{i}}').$$

Comme n et n' commutent et que $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{i}$, on a

$$Ad\, u(\underline{\mathfrak{i}}) = Ad\, n'(\underline{\mathfrak{i}})$$

et de même

$$Ad\,u(\underline{\mathfrak{i}}') = Ad\,n(\underline{\mathfrak{i}}').$$

On pose alors

$$\tilde{\mathfrak{f}} = Ad\,n'\left(\underline{\tilde{\mathfrak{f}}}\right), \qquad \tilde{\mathfrak{f}}' = Ad\,n\left(\underline{\tilde{\mathfrak{f}}}'\right), \qquad \mathfrak{b} = Ad\,n'(\underline{\mathfrak{b}}), \qquad \mathfrak{b}' = Ad\,n(\underline{\mathfrak{b}}'). \tag{2.39}$$

On voit alors que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin, conjugué par u à $(B, \underline{\mathfrak{i}}, \underline{\mathfrak{i}}')$ et sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

On va voir que $\tilde{\mathfrak{f}}$ a les propriétés voulues. D'abord, comme $\underline{\tilde{\mathfrak{f}}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\underline{\mathfrak{i}}$, par conjugaison, on en déduit que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{i}$. Le centralisateur, $\mathfrak{j}$, de $\tilde{\mathfrak{f}}$ vérifie

$$\mathfrak{j} = Ad\,n'\left(\underline{\mathfrak{j}}\right) \tag{2.40}$$

donc est contenu dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, d'après (2.38). Alors, d'après le Lemme 11, on a bien $\tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a})$, où $\mathfrak{f} = \tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{h}$, et $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}$ est égal à $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$.

On a vu que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenu dans $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, donc dans $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$. De plus $p^{\mathfrak{n}'}$ est l'identité sur $\mathfrak{l}'$. Donc $\tilde{\mathfrak{f}}$ est contenu dans $\mathfrak{i}_1$. Par ailleurs, comme $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{i}$, contenue dans $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$ (cf. [Bou, Chap. VII, Paragraphe 2.1, Exemple 3]), et par projection, c'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{i}_1$ (cf. l.c., Corollaire 2 de la Proposition 4).

Il reste à voir que cette sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{i}_1$ est fondamentale.

On suppose que $\mathfrak{i}_1$ est sous $\mathfrak{p}_1$. D'après le Lemme 11(iv), il existe une unique décomposition de Langlands $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, telle que $\mathfrak{l}_1$ contienne $\tilde{\mathfrak{f}}$. On note $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{l}_1^{der}$. Il suffit de voir que $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{m}_1$. Pour cela, il suffit de voir qu'aucune racine de $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$ dans $\mathfrak{m}_1$ n'est réelle. D'après le Lemme 11(iv), $\tilde{\mathfrak{f}} = (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1) \oplus (\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}_1)$, où $\mathfrak{a}_1$ est le centre de $\mathfrak{l}_1$. Alors, une racine α de $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{m}_1$ dans $\mathfrak{m}_1$, prolongée par zéro sur $\tilde{\mathfrak{f}} \cap \mathfrak{a}_1$ est une racine de $\tilde{\mathfrak{f}}$ dans $\mathfrak{m}$. Mais alors, comme $\mathfrak{f}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}$, α n'est pas réelle sur $\mathfrak{f}$, d'après le Lemme 11(i). Ceci prouve que $\tilde{\mathfrak{f}}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{i}_1$. On montre de même que $\tilde{\mathfrak{f}}'$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{i}'$ et $\mathfrak{i}'_1$. Ceci achève la preuve de la Proposition. ∎

THÉORÈME 4. *Tout triple de Manin réel (resp. complexe) sous* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ *est conjugué, par un élément de* $P \cap P'$, *à un triple de Manin réel (resp. complexe) sous* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, *dont tous les antécédents successifs,* $(B, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1), (B, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}'_2), \ldots,$ *sont des triples de Manin standard dans* $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \cap$

$\mathfrak{l}', \mathfrak{g}_2, \ldots,$ *relativement à l'intersection de* $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}'_0$, *avec* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots,$ *et tel que l'intersection* $\mathfrak{f}_0$ (*resp.* $\mathfrak{f}'_0$) *de* $\mathfrak{j}_0$ *avec* $\mathfrak{i}$ (*resp.* $\mathfrak{i}'$) *soit une sous-algèbre de Cartan fondamentale de* $\mathfrak{i}$ (*resp.* $\mathfrak{i}'$), *contenue dans* $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots$ (*resp.* $\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{i}'_2, \ldots$).

Un triple satisfaisant ces propriétés sera appelé triple fortement standard.

Le plus petit entier, k, *tel que* $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{j}_0$, *est appelé la hauteur du triple fortement standard.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}^{der}$. Si celle-ci est nulle, le Théorème est clair. Supposons l'assertion démontrée pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}^{der}$. D'après la Proposition 5, le triple donné est conjugué, par un élément de $P \cap P'$, à un triple de Manin $\mathscr{T}'$, sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, lié à son antécédent $\mathscr{T}'_1$. D'après l'hypothèse de récurrence, ce dernier est conjugué par un élément, g_1, de $L \cap L'$, a un triple de Manin fortement standard: $\underline{\mathscr{T}}_1 := g_1\mathscr{T}'_1$. Par transport de structure, $\underline{\mathscr{T}} = g_1\mathscr{T}'$ est lié à son antécédent $\underline{\mathscr{T}}_1$. On note $\underline{\mathscr{T}} = (B, \underline{\mathfrak{i}}, \underline{\mathfrak{i}}')$, $\underline{\mathscr{T}}_1 = (B, \underline{\mathfrak{i}}_1, \underline{\mathfrak{i}}'_1)$, et $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}')$ un lien entre ces triples. Comme $\underline{\mathscr{T}}_1$ est fortement standard, $\mathfrak{f}_1 := \mathfrak{j}_0 \cap \underline{\mathfrak{i}}_1$ (resp. $\mathfrak{f}'_1 := \mathfrak{j}_0 \cap \underline{\mathfrak{i}}'_1$) est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\underline{\mathfrak{i}}_1$ (resp. $\mathfrak{i}'_1$). Alors $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{f}_1$ (resp. $\mathfrak{f}'$ et $\mathfrak{f}'_1$) sont des sous-algèbre de Cartan fondamentales de $\underline{\mathfrak{i}}_1$ (resp. $\underline{\mathfrak{i}}'_1$), donc conjuguées par un élément i_1 de $\underline{I}_1$ (resp. i'_1 de $\underline{I}'_1$); i.e.,

$$\mathfrak{f} = i_1(\mathfrak{f}_1), \qquad \mathfrak{f}' = i'_1(\mathfrak{f}'_1).$$

On dispose d'une suite exacte de groupes

$$0 \to N' \to P' \to L' \to 0$$

où la flèche de P' dans L' est le morphisme dont la différentielle est la restriction de $p^{\mathfrak{n}'}$ à $\mathfrak{p}$. La définition de $\underline{\mathfrak{i}}_1$ montre que la restriction de ce morphisme à $(\underline{\tilde{H}} \cap P')^0$ est un morphisme surjectif sur $\underline{I}_1$, de noyau contenu dans N'_L. Comme $\underline{\tilde{H}}$ est contenu dans $\underline{I}$, on en déduit qu'il existe $n' \in N'_L$ et $i \in \underline{I}$ tels que

$$i_1 = in'.$$

De même on trouve $n \in N_{L'}$, $i' \in \underline{I}'$ tels que

$$i'_1 = i'n.$$

Montrons que le triple de Manin $\mathscr{T} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, défini par $\mathscr{T} = n^{-1}n'^{-1}\underline{\mathscr{T}}$, convient. D'abord c'est un triple sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, puisque $n, n' \in P \cap P'$, conjugué du triple initial. Par ailleurs n et n' commutent (cf. Proposition 2) et N est contenu dans $\underline{I}$. Donc on a

$$\mathfrak{i} = n'^{-1}(\underline{\mathfrak{i}}) = n'^{-1}i^{-1}(\underline{\mathfrak{i}}) = i_1^{-1}(\underline{\mathfrak{i}}).$$

Comme $\mathfrak{k} = i_1(\mathfrak{k}_1)$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\underline{\mathfrak{i}}$, $i_1^{-1}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}_1$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{i}$, par transport de structure. De plus $\mathfrak{k}_1$ est contenue dans $\underline{\mathfrak{i}}_1$. De même $\mathfrak{k}'_1$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{i}'$, contenue dans $\underline{\mathfrak{i}}'_1$. Par ailleurs, comme $\underline{\mathscr{T}}_1$ est fortement standard, $\mathfrak{j}_0$ est la somme directe de $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{k}'_1$. Comme $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$ ont une intersection réduite à zéro, il en résulte que $\mathfrak{k}_1$ (resp. $\mathfrak{k}'_1$) est égal à l'intersection de $\mathfrak{j}_0$ avec $\mathfrak{i}$ (resp. $\mathfrak{i}'$). Par ailleurs, d'après la Proposition 4, l'antécédent de $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est égal à $\underline{\mathscr{T}}_1$. Comme ce dernier est fortement standard, ce qui précède suffit à prouver que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ l'est aussi. ▮

Remarque 1. Le Théorème 4 réduit la classification des triples de Manin à celle des triples fortement standard.

PROPOSITION 6. *Si deux triples de Manin fortement standard sont conjugués par un élément de G, ils sont de même hauteur. Ceci permet de définir la hauteur d'un triple de Manin comme la hauteur d'un triple fortement standard auquel il est conjugué.*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}^{der}$. Si celle-ci est nulle, la Proposition est vraie. Sinon, d'après la Proposition 2 et la Proposition 4, si deux triples de Manin fortement standard sont conjugués par un élément, leurs antécédents sont conjugués par un élément de $L \cap L'$. La Proposition résulte alors immédiatement de l'application de l'hypothèse de récurrence. ▮

Etablissons quelques propriétés des triples fortement standard. On utilisera les deux Lemmes suivants.

LEMME 13. *Soit B une forme de Manin $\mathbb{C}$-bilinéaire. Soit $\mathfrak{i}$ une sous-algèbre Lagrangienne complexe sous $\mathfrak{p}$. Soit α un poids non nul de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$, tel que $\mathfrak{g}^{\alpha}$ soit contenu dans $\mathfrak{i}$. Alors $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{n}$.*

Démonstration. On emploie les notations du Théorème 1. On note $\mathfrak{k} = \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{h}$. On sait que si β est une racine de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}$, $\sigma(\mathfrak{m}^{\beta}) = \mathfrak{m}^{\beta'}$, avec $\beta' \neq \beta$ (cf. Lemme 5, pour les f-involutions). De plus si $\beta_{|\mathfrak{k}} = \gamma_{|\mathfrak{k}}$, pour un autre poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}$, on a β égal à γ ou γ'. On note

$$\mathfrak{h}_{\beta} := \{X + \sigma(X) \mid X \in \mathfrak{m}^{\beta}\}.$$

Soit R_* un sous-ensemble de l'ensemble R, des poids non nuls de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}$, tel que R_* et $\{\beta' \mid \beta \in R_*\}$ forme une partition de R. Alors, on a

$$\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\alpha} = (\mathfrak{k} + \mathfrak{i}_{\alpha}) \oplus \left(\oplus_{\beta \in R_*} \mathfrak{h}_{\beta}\right) \tag{2.41}$$

qui est une décomposition en somme directe de représentations de $\mathfrak{f}$ qui sont deux à deux sans sous-quotients simples isomorphes, toutes étant irréductibles, sauf peut-être la première. Soit α comme dans l'énoncé. Si α n'est pas un poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{n}$, comme il est non nul, c'est un poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}$. En étudiant l'action de $\mathfrak{f}$, on est conduit à

$$\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{h}_{\alpha}.$$

Comme $\alpha \neq \alpha'$, c'est impossible. Une contradiction qui achève de prouver le Lemme. ∎

LEMME 14. *Soit* $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *un triple de Manin complexe fortement standard, et soit* $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ *son antécédent, que l'on suppose sous* $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}'_1)$. *On note* $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ *la décomposition de Langlands de* $\mathfrak{p}_1$ *telle que* $\mathfrak{l}_1$ *contienne* $\mathfrak{j}_0$ *et on note* $\mathfrak{m}_1$ *l'idéal dérivé de* $\mathfrak{l}_1$.

Alors $\mathfrak{m}_1$ *est égal à l'idéal dérivé de* $(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}')$ *et l'involution*, σ_1, *de* $\mathfrak{m}_1$, *dont* $\mathfrak{h}_1 := \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{m}_1$ *est l'ensemble des points fixes*, *est égale à la restriction de* σ *à* $\mathfrak{m}_1$.

Démonstration. On réutilise les notations du Lemme précédent. Etudiant la décomposition en représentations irréductibles sous $\mathfrak{f}$, de $\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}'$, et utilisant (2.41), on voit que

$$\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}' = (\mathfrak{f} + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}) \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in R_*, \mathfrak{h}_\beta \subset \mathfrak{p}'} \mathfrak{h}_\beta \right).$$

Mais $\mathfrak{h}_\beta \subset \mathfrak{p}'$ si et seulement si $\mathfrak{g}^{\beta}$ et $\mathfrak{g}^{\beta'}$ sont contenus dans $\mathfrak{p}'$. Si β satisfait cette condition on a

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\beta) = \mathfrak{g}^{\beta} \qquad \text{si } \mathfrak{g}^{\beta} \subset \mathfrak{m}' \text{ et } \mathfrak{g}^{\beta'} \subset \mathfrak{n}',$$

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\beta) = \mathfrak{h}_\beta \qquad \text{si } \mathfrak{g}^{\beta}, \mathfrak{g}^{\beta'} \subset \mathfrak{m}'.$$

Notons, pour V sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{g}$, invariant sous $\mathfrak{j}_0$, $\Delta(V, \mathfrak{j}_0)$, l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}_0$ dans V. Alors on a

$$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \tag{2.42}$$

où

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{f} \bigoplus_{\beta \in R_* \cap \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0), \beta' \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0)} \mathfrak{h}^{\beta}. \tag{2.43}$$

et

$$\mathfrak{v}_1 = \bigoplus_{\beta \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}', \mathfrak{j}_0), \beta' \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}', \mathfrak{j}_0)} \mathfrak{g}^{\beta}. \tag{2.44}$$

On remarque que

$$\mathfrak{u}_1 = ((\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'))^{\sigma}. \tag{2.45}$$

Donc $\mathfrak{u}_1$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}'$, réductive, dont le centre est contenu dans $\mathfrak{f}$. Notons $\mathfrak{w}_1 = (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') + \mathfrak{j}_0$. On voit aisément que $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{v}_1$ est une sous-algèbre parabolique, de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, dont le radical nilpotent est $\mathfrak{v}_1$, et la décomposition ci-dessus est une décomposition de Langlands de $\mathfrak{q}_1$ avec $\mathfrak{j}_0$ contenu dans $\mathfrak{w}_1$.

Par ailleurs $\mathfrak{i}_1$ est contenue dans $\mathfrak{q}_1$, d'après (2.42), (2.43) et (2.44), Tenant compte du fait que, pour $\beta \in R$, $[\mathfrak{f}, \mathfrak{m}^{\beta}] = \mathfrak{m}^{\beta}$, d'après la définition de $\mathfrak{f}$ et des f-involutions, on déduit de (1.3) que le radical nilpotent de $\mathfrak{i}_1$ contient $\mathfrak{v}_1$. Par ailleurs, comme le centre de $\mathfrak{u}_1$ est contenu dans $\mathfrak{j}_0$, le radical et, a fortiori, le radical nilpotent de $\mathfrak{i}_1$ est contenu dans $\mathfrak{j}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$. Mais ce radical nilpotent ne rencontre pas $\mathfrak{j}_0$ (cf. Théorème 1), donc il est égal à $\mathfrak{v}_1$. Alors $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{w}_1$. Donc $\mathfrak{m}_1$ a la forme annoncée. Comme $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{m}_1$, on déduit de (2.45) que σ_1 a la forme annoncée. ∎

3. CLASSIFICATION DES TRIPLES DE MANIN COMPLEXES

Dans toute cette partie, triple de Manin voudra dire triple de Manin complexe. On rappelle qu'on a fixé $\mathfrak{j}_0$ et $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$.

On définit

$$\mathbb{C}^+ := \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid Re\ \lambda < 0,\ ou\ Re\ \lambda = 0\ et\ Im\ \lambda > 0\}, \qquad \mathbb{C}^- = \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{C}^+.$$

Si B est une forme de Manin complexe sur $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}_+$ (resp. $\mathfrak{g}_-$) la somme de ses idéaux simples, $\mathfrak{g}_i$, pour lesquels la restriction de B à $\mathfrak{g}_i$ est égal à $K_{\lambda_i}^{\mathfrak{g}_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$ (resp. $\mathbb{C}^-$). L'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est la somme directe de ses idéaux $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$.

LEMME 15. *Aucune sous-algèbre de Lie semi-simple complexe de* $\mathfrak{g}_+$ (*resp.* $\mathfrak{g}_-$) *n'est isotrope pour B.*

On fait la démonstration pour $\mathfrak{g}_+$, celle pour $\mathfrak{g}_-$ étant identique. Soit $\mathfrak{s}$ une sous algèbre de Lie semi-simple complexe de $\mathfrak{g}_+$. On note $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{s}$. Alors $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ est contenu dans une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}_+$. En effet, le sous-groupe analytique de G_+ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{\mathfrak{s}}$ est compact, comme groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie semi-simple compacte. Il est donc contenu dans un sous-groupe compact maximal K de G_+, et l'algèbre de Lie, $\mathfrak{k}$, de K, convient. On note $\mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, p$, les idéaux simples de $\mathfrak{g}_+$. Alors $\mathfrak{k} = \oplus_{i=1,\dots,p} \mathfrak{k}_i$, *où* $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_i$. Le Lemme résultera de la preuve de

$$B(X, X) \neq 0, \qquad x \in \mathfrak{k} \backslash \{0\}. \tag{3.1}$$

Pour cela on remarque que

$$\sum_{i=1,\ldots,p} \lambda_i x_i \neq 0,$$

$$\text{si, pour } i = 1,\ldots,p,\ \lambda_i \in \mathbb{C}^+ \text{ et } x_i \geq 0, \text{ non tous nuls.} \quad (3.2)$$

Maintenant, si $X \in \mathfrak{k}\backslash\{0\}$ et $X = \sum_{i=1,\ldots,p} X_i$, où $X_i \in \mathfrak{k}_i$, alors $K_{\mathfrak{g}_i}(X_i, X_i)$ est négatif où nul, et non nul pour au moins un indice i. Alors (3.1), et donc le Lemme, résulte de (3.2) et de la définition de $\mathfrak{g}_+$.

LEMME 16. *Soit* $\mathfrak{i}$ *une sous-algèbre Lagrangienne sous* $\mathfrak{p}$. *On note* $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_+ = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{m}_- = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_-$.

On a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$. *Par ailleurs la f-involution*, σ, *dont* $\mathfrak{h}$ *est l'espace des points fixes, induit un morphisme bijectif*, τ, *entre* $\mathfrak{m}_+$ *et* $\mathfrak{m}_-$ *tel que*

$$B(\tau(X), \tau(X)) = -B(X, X), \qquad X \in \mathfrak{m}_+.$$

Démonstration. L'involution σ permute, sans point fixe, d'après le Lemme 5, les idéaux simples de $\mathfrak{m}$. Ceux-ci sont contenus dans des idéaux simples de $\mathfrak{g}$, donc contenus soit dans $\mathfrak{m}_+$, soit dans $\mathfrak{m}_-$. Donc $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$. Si σ envoyait un idéal simple de $\mathfrak{m}_+$ dans un autre idéal de $\mathfrak{m}_+$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_+$, donc aussi $\mathfrak{g}_+$, contiendrait une sous-algèbre semi-simple complexe isotrope. C'est impossible, d'après le Lemme précédent. Donc σ envoie tout idéal simple de $\mathfrak{m}_+$ dans $\mathfrak{m}_-$. Le Lemme en résulte immédiatement. ∎

Notations. $\mathfrak{g}_+$ *et* $\mathfrak{g}_-$ *sont des idéaux de* $\mathfrak{g}$ *qui commutent et* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$. *Alors* $\mathfrak{g}_+$ (*resp.* $\mathfrak{g}_-$) *possède* $\mathfrak{j}_+ := \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{g}_+$ (*resp.* $\mathfrak{j}_- := \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{g}_-$) *comme sous-algèbre de Cartan et* $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{g}_+$ (*resp.* $\mathfrak{b}'_0 \cap \mathfrak{g}_-$: *l'utilisation de* $\mathfrak{b}'_0$ *au lieu de* $\mathfrak{b}_0$ *est importante*) *comme sous-algèbre de Borel. On note* Σ_+ (*resp.* Σ_-) *l'ensemble des racines simples de* $\mathfrak{g}_\pm$ *relativement à ces sous-algèbres de Borel et de Cartan. Ces racines peuvent être vues comme des racines de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{g}$ *nulles sur* $\mathfrak{j}_-$ (*resp.* $\mathfrak{j}_+$).

On définit, pour $\mathfrak{i}$ *comme dans le Lemme précédent*, R_+, *l'ensemble des racines de* $\mathfrak{j}_0$ (*ou* $\mathfrak{m}_+ \cap \mathfrak{j}_0$) *dans* $\mathfrak{m}_+$, $\Gamma_+ = \Sigma_+ \cap R_+$.

Puis on définit comme ci-dessus R_- *et* Γ_-.

On dit que α *racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{g}_+$ *est positive si c'est une racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{b}_0$, *et on dit que* α *racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{g}_-$ *est positive si c'est une racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{b}'_0$.

La restriction de τ *à* $\mathfrak{a}^+ := \mathfrak{m}_+ \cap \mathfrak{j}_0$ *définit une bijection entre* $\mathfrak{a}^+$ *et* $\mathfrak{a}^- := \mathfrak{m}_- \cap \mathfrak{j}_0$, *dont l'inverse de la transposée induit une bijection, notée* A, *ente* R_+ *et* R_-. *On notera, pour* $\alpha \in R_+$, $A\alpha$, *au lieu de* $A(\alpha)$.

Si α *est une racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{g}$, *on note* H_α *l'élément de* $\mathfrak{j}_0$, *tel que* $\alpha(H_\alpha) = 2$ *et qui est orthogonal au noyau de* α *pour la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$.

Soit $\alpha \in \Gamma_+$ et $\beta = A\alpha$. Alors, on voit facilement que H_α (resp. H_β) est élément de $\mathfrak{a}^+$ (resp. $\mathfrak{a}^-$). Comme τ transporte la forme de Killing de $\mathfrak{m}_+$ sur celle de $\mathfrak{m}_-$, et que celles-ci sont proportionnelles à la restriction de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on a

$$\tau(H_\alpha) = H_\beta.$$

Le Lemme 16 implique donc

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_\alpha, H_\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma_+. \tag{3.3}$$

Soit $\mathfrak{i}'$ une autre sous-algèbre Lagrangienne de $\mathfrak{g}$, pour laquelle on introduit des objets similaires, notés avec des $'$.

On notera C, ou parfois "$A^{-1}A'$", l'application définie sur la partie, éventuellement vide

$$dom\, C := \{\alpha \in R'_+ | A'\alpha \in R_-\} \tag{3.4}$$

par

$$C\alpha = A^{-1}A'\alpha, \qquad \alpha \in dom\, C, \tag{3.5}$$

l'image de C étant égale à

$$Im\, C = \{\alpha \in R_+ | A\alpha \in R'_-\}. \tag{3.6}$$

Lemme 17. *Soit $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, un triple fortement standard. Avec les notations précédentes, pour tout $\alpha \in dom\, C$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in dom\, C \qquad \text{et} \qquad C^n\alpha \notin dom\, C.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in dom\, C$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^n\alpha$ soit défini et élément de $dom\, C$. Comme R'_+ est un ensemble fini, il existe $n_1, n'_1 \in \mathbb{N}^*$, distincts, tels que $C^{n_1}\alpha = C^{n'_1}\alpha$. D'où l'on déduit l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^n\alpha = \alpha$. On note

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = C\alpha, \dots, \alpha_n = C^{n-1}\alpha.$$

Montrons que

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset R_+ \cap R'_+, \qquad A(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}) = A'(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}). \tag{3.7}$$

En effet, pour tout i, α_i est élément de $dom\, C \cap Im\, C$, ce qui implique la première inclusion. Par ailleurs, pour $i = 1, \dots, n-1$, comme "$A^{-1}A'$"$\alpha_i = \alpha_{i+1}$ on a

$$A'\alpha_i = A\alpha_{i+1} \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Maintenant, comme $''A^{-1}A''' \alpha_n = \alpha_1$, on a aussi

$$A'\alpha_n = A\alpha_1.$$

Ceci achève de prouver (3.7).

On note R_+^0 (resp. R_-^0), l'intersection de R_+ (resp. R_-) avec le sous-espace vectoriel réel, V_0, de $\mathfrak{j}_0^*$, engendré par les α_i (resp. $A\alpha_i$), $i = 1, \ldots, n$. L'identification de $\mathfrak{j}_0$ à $\mathfrak{j}_0^*$, à l'aide de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, fait apparaître $(V_0)_{\mathbb{C}}$ comme (le dual d') un sous-espace vectoriel complexe $\mathfrak{a}_0^+$ de $\mathfrak{a}^+$. On définit de même $\mathfrak{a}_0^-$. On note $\mathfrak{m}_{+0}$ (resp. $\mathfrak{m}_{-0}$) la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ engendrée par les espaces radiciels $\mathfrak{m}_+^\alpha$, $\alpha \in R_+^0$ (resp. $\mathfrak{m}_-^\alpha$, $\alpha \in R_-^0$). On voit immédiatement que $\mathfrak{m}_{+0}$ est semi-simple et que

$$\mathfrak{m}_{+0} = \left(\bigoplus_{\alpha \in R_+^0} \mathfrak{m}_+^\alpha \right) \oplus \mathfrak{a}_0^+$$

car R_+^0 est un système de racines dans $\mathfrak{a}_0^+$ ([Bou, Chap. 5, Par. 1, Proposition 4]). Il en va de même pour $\mathfrak{m}_{-0}$. Alors τ et τ' induisent un isomorphisme entre $\mathfrak{m}_{+0}$ et $\mathfrak{m}_{-0}$. Donc ${\tau'}^{-1}\tau$ induit un automorphisme de $\mathfrak{m}_{+0}$, qui a donc un point fixe non nul, X. Comme $X \subset \mathfrak{m}_{+0}$ et $\tau(X) \in \mathfrak{m}_{-0}$, $X + \tau(X)$ est non nul. Par ailleurs, on a

$$\tau(X) = \tau'(X) \qquad \text{et} \qquad X + \tau(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'.$$

Une contradiction qui achève de prouver la propriété voulue pour C. ∎

Proposition 7. *Soit* $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, *un triple fortement standard.*

Alors, pour tout $\alpha \in R_+$ (*resp.* R'_+), α *et* $A\alpha$ (*resp.* $A'\alpha$), *sont de même signe* (*i.e. si* $\alpha \in R_+$ *est une racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{b}_0$, $A\alpha$ *est une racine de* $\mathfrak{j}_0$ *dans* $\mathfrak{b}'_0 \ldots$).

Début de la démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}^{der}$. Si celle-ci est nulle, le résultat est clair. On suppose maintenant que celle-ci n'est pas nulle, et que la Proposition est vraie pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}^{der}$. Nous allons commencer par établir plusieurs Lemmes.

Lemme 18. *Avec les notations précédentes, on a*:

(i) *Si* $\alpha \in R_+$ *et* $\alpha \notin Im\, C$, α *et* $A\alpha$ *sont de mêmes signes.*

(ii) *Si* $\alpha \in R'_+$, *et* $\alpha \notin dom\, C$, α *et* $A'\alpha$ *sont de même signes.*

Démonstration. Montrons (i). Raisonnons par l'absurde, et supposons que α et $\beta := A\alpha$ soient de signes opposés. L'hypothèse sur α équivaut à

$$\alpha \in R_+, \qquad A\alpha \notin R'_-. \tag{3.8}$$

Quitte à changer α en $-\alpha$, on peut supposer α positive. Soit X un élément non nul de $\mathfrak{m}_+^{-\alpha} \subset \mathfrak{b}'_0$. Alors $\tau(X) \in \mathfrak{m}_-^{-\beta} \subset \mathfrak{b}'_0$, d'après notre hypothèse sur α, et la définition des ensembles de racines positives. Enfin $Y := X + \tau(X)$ est un élément non nul de $\mathfrak{h}$.

Comme $\mathfrak{m}_-^{-\beta} \subset \mathfrak{b}'_0$ et que $-\beta = -A\alpha \notin R'_-$, on a $\mathfrak{m}_-^{-\beta} \subset \mathfrak{n}'$.

Supposons d'abord $\alpha \notin R'_+$. Comme α est positive, $\mathfrak{m}_+^{-\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{b}'_0$ et $\alpha \notin R'_+$ implique, comme ci-dessus, que $\mathfrak{m}_+^{-\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{n}'$. Alors $X + \tau(X)$ est un élément non nul de de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}'$. Une contradiction qui montre qu'on doit avoir $\alpha \in R'_+$.

Alors $X \in \mathfrak{m}'$, $\tau(X) \in \mathfrak{n}'$, $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}'$ et $p^{\mathfrak{n}'}(Y) = X$. Donc $\mathfrak{m}_+^{-\alpha} = \mathfrak{g}^{-\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{i}_1$, où $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ est le triple antécédent de $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$. Appliquant le Lemme 13 à $\mathfrak{i}_1$, on voit qu'alors $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{n}_1$. Mais comme le triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est fortement standard, les poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{n}_1$ doivent être des poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{b}_0$, ce qui n'est pas le cas de $-\alpha$. Ceci achève de prouver (i). Pour (ii), l'hypothèse se traduit par une condition analogue à (3.8), en échangeant le rôle de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$. On déduit donc (ii) de (i). ∎

LEMME 19. *Si $\xi \in R_+ \cap Im\, C$, il existe $\alpha \in dom\, C$, $\alpha \notin Im\, C$, et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\alpha, C\alpha, \ldots, C^{n-1}\alpha \in dom\, C, \qquad \text{et} \qquad C^n\alpha \notin dom\, C$$

et vérifiant

$$\xi = C^i\alpha, \qquad \text{pour un } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Démonstration. Comme C est une bijection de $dom\, C$ sur $Im\, C$, car A et A' sont injectives, on note C^{-1} la bijection réciproque. Echangeant le rôle de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$ dans le Lemme 17, on voit qu'il existe $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\xi, C^{-1}\xi, \ldots, (C^{-1})^{n'-1}\xi \in Im\, C, \qquad (C^{-1})^{n'}\xi \notin Im\, C.$$

On pose $\alpha = (C^{-1})^{n'}\xi \in dom\, C$. On a aussi $\alpha \notin Im\, C$. On choisit, grâce au Lemme 17, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\alpha, C\alpha, \ldots, C^{n-1}\alpha \in dom\, C, \qquad \text{et} \qquad C^n\alpha \notin dom\, C.$$

Alors α et n ont clairement les propriétés voulues. ∎

LEMME 20. *Soit $\alpha \in R_+ \cap R_-$ tel que $A\alpha \in R_- \cap R'_-$ (resp. $A'\alpha \in R_- \cap R'_-$). Alors α et $A\alpha$ (resp. $A'\alpha$) sont de même signe.*

Démonstration. Prouvons l'assertion sur $A\alpha$ et soit α comme dans l'énoncé. Les hypothèses impliquent que $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^{A\alpha}$ sont contenus dans $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$. Donc, on a

$$\mathfrak{g}^\alpha \subset (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}') \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}')$$

et d'après le Lemme 14, on a $\mathfrak{g}^{\alpha} \subset \mathfrak{m}_1$. De plus, d'après ce même Lemme, l'involution σ_1 est la restriction de σ à $\mathfrak{m}_1$. On va appliquer l'hypothèse de récurrence du début de la démonstration de la Proposition 7. Pour cela on remarque que, grâce au Lemme 1 (iii), $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')_+ = (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}') \cap \mathfrak{g}_+$ et de même pour $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')_-$. Donc les racines de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ qui sont positives dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ sont positives dans $\mathfrak{g}$. L'application de l'hypothèse de récurrence montre alors que α et $A\alpha$ sont de même signe. Ceci achève de prouver (i). Alors l'assertion sur $A'\alpha$ résulte de celle sur $A\alpha$, par échange du rôle de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$. ∎

Lemme 21. (i) *Soit* $\alpha \in R_+ \cap Im\,C$, $\alpha \notin R'_+$. *Alors* α *et* $A\alpha$ *sont de même signe.*

(ii) *Soit* $\alpha \in R'_+ \cap dom\,C$, $\alpha \notin R_+$. *Alors* α *et* $A'\alpha$ *sont de même signe.*

Démonstration. Démontrons (i). Soit α comme dans l'énoncé. Quitte à changer α en $-\alpha$, on peut supposer que α est négative. Raisonnons par l'absurde et supposons $A\alpha$ positive. Soit $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$. Nos hypothèses montrent que $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{n}'$. Par ailleurs, écrivant $\alpha = "A^{-1}A'"\beta$, où $\beta \in dom\,C$, on a $A\alpha = A'\beta \in R'_-$. Donc $\mathfrak{g}^{A\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{m}'_-$. Alors

$$X + \sigma(X) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}', \qquad p^{\mathfrak{n}'}(X + \sigma(X)) = \sigma(X).$$

Il en résulte que $\mathfrak{g}^{A\alpha}$ est contenu dans $\mathfrak{i}_1$, donc dans $\mathfrak{n}_1$, d'après le Lemme 13. Alors $\mathfrak{g}^{A\alpha}$ doit être contenu dans $\mathfrak{b}_0$, puisque le triple $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ est standard. Mais, comme $A\alpha \in R_-$ et est positive, ce n'est pas le cas. Une contradiction qui achève de prouver (i). L'assertion (ii) se déduit de (i) par l'échange de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$. ∎

Fin de la démonstration de la Proposition 7. Soit $\alpha \in R_+$ et montrons que $A\alpha$ est de même signe que α. Distinguons 3 cas.

(1) Si $\alpha \notin Im\,C$, cela résulte du Lemme 18.

(2) Si $\alpha \in Im\,C$ et $\alpha \notin R'_+$, cela résulte du Lemme précédent.

(3) Si $\alpha \in Im\,C$ et $\alpha \in R'_+$, on écrit $\alpha = "A^{-1}A'"\beta$, où $\beta \in dom\,C$. Alors on a $A\alpha = A'\beta \in R_- \cap R'_-$. On conclut grâce au Lemme 20.

On vient donc de montrer que pour tout $\alpha \in R_+$, α et $A\alpha$ sont de même signe.

On démontre un énoncé similaire pour A' en échangeant le rôle de $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$.

Ceci achève la démonstration de la Proposition. ∎

On rappelle que, pour α racine de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$, H_α, $\alpha \in \tilde{R}$ a été défini avant (3.3). C'est la coracine correspondant à α. On rappelle qu'un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}^{der}$ est une famille $\mathscr{W} =$

$(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$, où $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \Sigma$, on ait

$$[X_\alpha, Y_\beta] = \delta_{\alpha\beta} H_\beta \tag{3.9}$$

$$[H_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha\beta} X_\beta \tag{3.10}$$

$$[H_\alpha, Y_\beta] = -N_{\alpha\beta} Y_\beta \tag{3.11}$$

où

$$N_{\alpha\beta} = \beta(H_\alpha) = 2K_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\beta)/K_{\mathfrak{g}}(H_\beta, H_\beta). \tag{3.12}$$

On a alors

$$N_{\alpha\beta} \in -\mathbb{N}, \qquad \text{si } \alpha \neq \beta$$

et

$$ad\, X_\alpha^{1-N_{\alpha\beta}} X_\beta = ad\, Y_\alpha^{1-N_{\alpha\beta}} Y_\beta = 0, \qquad \text{si } \alpha \neq \beta. \tag{3.13}$$

Un tel système existe et on obtient les autres par conjugaison par les éléments de J_0.

Notez que $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma_\pm}$ est un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}_\pm$. De plus, comme $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ commutent, si $\alpha \in \Sigma_+$ et $\beta \in \Sigma_-$, on a $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0$.

DÉFINITION 5. On appelle donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, relativement à B, la donnée de $(A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$, vérifiant les 5 propriétés suivantes:

(1) A est une bijection d'une partie Γ_+ de Σ_+ sur une partie Γ_- de Σ_-, telle que

$$B(H_{A\alpha}, H_{A\beta}) = -B(H_\alpha, H_\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma_+. \tag{3.14}$$

(2) A' est une bijection d'une partie Γ'_+ de Σ_+ sur une partie Γ'_- de Σ_-, telle que

$$B(H_{A'\alpha}, H_{A'\beta}) = -B(H_\alpha, H_\beta), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma'_+. \tag{3.15}$$

(3) Si on définit $C = "A^{-1}A'"$ comme dans (3.4), (3.5), alors C satisfait la "condition de sortie":

Pour tout $\alpha \in dom\, C$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in dom\, C$ et $C^n\alpha \notin dom\, C$.

(4) $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ (resp. $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$) est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{j}_0$, contenu et Lagrangien dans l' orthogonal $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{a}'$), pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ (ou pour B), à l'espace engendré par les H_α, $\alpha \in \Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (resp. $\Gamma' := \Gamma'_+ \cup \Gamma'_-$).

(5) Si $\mathfrak{f}$ est le sous-espace de $\mathfrak{j}_0$ engendré par la famille $H_\alpha + H_{A\alpha}$, $\alpha \in \Gamma_+$ et si on définit de même $\mathfrak{f}'$, alors on a

$$(\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{f}' \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}) = \{0\}. \tag{3.16}$$

On notera alors R_+ l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$ qui sont combinaison linéaire d'éléments de Γ_+. On définit de même R_-, R'_+, R'_-. On notera encore A (resp. A') le prolongement par $\mathbb{R}$-linéarité de A (resp. A'), qui définit une bijection de R_+ sur R_- (resp. R'_+ sur R'_-).

LEMME 22. *Si A vérifie la condition* (1) *ci dessus, il existe un unique ismorphisme, τ, de la sous-algèbre $\mathfrak{m}_+$ de $\mathfrak{g}$, engendrée par les $X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha$, $\alpha \in \Gamma_+$, sur la sous-algèbre $\mathfrak{m}_-$ de $\mathfrak{g}$, engendrée par les $X_\alpha, H_\alpha, Y_\alpha$, $\alpha \in \Gamma_-$, tel que*

$$\tau(H_\alpha) = H_{A\alpha}, \quad \tau(X_\alpha) = X_{A\alpha}, \quad \tau(Y_\alpha) = Y_{A\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma^+.$$

En effet $\mathfrak{m}_+$ et $\mathfrak{m}_-$ sont semi-simples et les familles données sont des systèmes de générateurs de Weyl de ces algèbres. Alors, d'après [Bou, Chap. VIII, Paragraphe 4.3, Théorème 1], il suffit, pour montrer le Lemme, de voir que les relations, du type (3.9) à (3.13), satisfaites par ces générateurs se correspondent, c'est à dire qu'il faut montrer

$$\alpha(H_\beta) = A\alpha(H_{A\beta}), \qquad \alpha, \beta \in \Gamma_+. \tag{3.17}$$

Montrons d'abord que, dans la deuxième définition de $N_{\alpha\beta}$ (deuxième égalité de (3.12)), on peut remplacer $K_\mathfrak{g}$ par n'importe quelle autre forme $\mathfrak{g}$-invariante non dégénérée. En effet si $\mathfrak{g}^\alpha$ n'est pas dans le même idéal simple que $\mathfrak{g}^\beta$, $B(H_\alpha, H_\beta) = K_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\beta) = 0$. Sinon B et $K_\mathfrak{g}$ sont proportionnelles sur l'idéal simple contenant $\mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\beta$. D'où notre assertion. Alors (3.17) résulte immédiatement de la condition (1). ∎

Remarque 2. Etant donnés A, A', vérifiant les conditions (1) à (3) ci-dessus, on peut toujours trouver $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$ satisfaisant conditions (4) et (5).

En effet, on va voir que cela résulte de l'assertion suivante.

Soit $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ des sous-espaces vectoriels complexes isotropes d'un espace vectoriel complexe, de dimension finie paire, $2n$, $\mathfrak{d}$, muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, B, tels que $\mathfrak{e} \cap \mathfrak{e}' = \{0\}$ et maximaux pour cette propriété. Alors $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ sont lagrangiens, i.e. de dimension n.

Montrons d'abord cette assertion. On procède par récurrence sur n. L'assertion esr claire pour $n = 0$. On suppose $n \geq 1$ et l'assertion démontrée au rang $n - 1$. On traite d'abord le cas où $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ ne sont pas orthogonaux pour B. On peut choisir $X \in \mathfrak{e}$, $X' \in \mathfrak{e}'$, avec $B(X, X') \neq 0$. Alors l'orthogonal $\mathfrak{d}_1$ de l'espace engendré par X et X' est de dimension $2(n-1)$, $\mathfrak{e}$ (resp. $\mathfrak{e}'$) est la somme directe de $\mathbb{C}X$ (resp. $\mathbb{C}X'$) et de son intersection $\mathfrak{e}_1$ (resp. $\mathfrak{e}'_1$) avec $\mathfrak{d}_1$. De plus, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_1$, ce qui implique que $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_1$ sont de dimension $n-1$. On en déduit que $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ ont la dimension voulue.

Supposons maintenant que $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ sont orthogonaux. Alors $\mathfrak{e} + \mathfrak{e}'$ est isotrope, donc de dimension inférieure où égale à n. Pour des raisons de maximalité, cette dimension doit être égale à n. On peut supposer, par exemple, que $\mathfrak{e}$ est de dimension strictement inférieure où égale à n. Alors l'orthogonal, $\mathfrak{e}^{\perp}$, de $\mathfrak{e}$ contient strictement $\mathfrak{e} \oplus \mathfrak{e}'$, pour des raisons de dimension. Soit $Y \in \mathfrak{e}^{\perp}$, $Y \notin \mathfrak{e} + \mathfrak{e}'$. Alors Y n'est pas orthogonal à $\mathfrak{e} + \mathfrak{e}'$, qui est égal à son propre orthogonal. Soit $Z \in \mathfrak{e} + \mathfrak{e}'$, tel que $2B(Y, Z) = 1$. Alors $Y_1 = Y - B(Y, Y)Z$ est isotrope et vérifie les mêmes propriétés que Y. Alors le couple $\mathfrak{e} \oplus \mathbb{C}Y_1$, $\mathfrak{e}'$ contredit l'hypothèse de maximalité. Ceci achève de prouver notre assertion.

Montrons que $\mathfrak{a}$ est de dimension paire. En effet $\mathfrak{g}$ est de dimension paire (voir début du paragraphe 4). Il en va de même pour $\mathfrak{m}$, car $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$ et τ est un isomorphisme de $\mathfrak{m}_+$ sur $\mathfrak{m}_-$. Enfin la dimension de $\mathfrak{g}$ est égale à la somme de la dimension de $\mathfrak{m}$, de celle de $\mathfrak{a}$ et de deux fois celle de $\mathfrak{n}$. L'application de l'assertion avec $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$ conduit au résultat voulu.

PROPOSITION 8. *Soit* $\mathscr{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ *une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, relative à* B. *On note* $\mathfrak{p}$ *la sous-algèbre parabolique de* $\mathfrak{g}$, *contenant* $\mathfrak{b}_0$ *et* $\mathfrak{m}$. *On utilise les notations du Lemme précédent. On note* $\mathfrak{i} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{n}$, *où* $\mathfrak{h} := \{X + \tau(X) \mid X \in \mathfrak{m}_+\}$. *On définit de même* $\mathfrak{i}'$.

Alors $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *est un triple de Manin fortement standard. On dira que ce triple de Manin est associé à la donnée de Belavin–Drinfeld généralisée,* $\mathscr{BD}$, *et au système de générateurs de Weyl,* $\mathscr{W}$. *On le notera* $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$.

On note $\mathscr{W}_1 = (H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Gamma \cap \Gamma'}$. *C'est un système de générateurs de Weyl de* $(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}')^{der}$. *Notons* $\Gamma_{1+} = \Gamma_+ \cap \Gamma'_+ \cap A^{-1}(\Gamma_- \cap \Gamma'_-)$. *On note* A_1 *la restriction de* A *à* Γ_{1+} *et* Γ_{1-} *son image. On définit de même* A'_1. *On note* $\mathfrak{a}_1$ *l'intersection des noyaux des éléments de* $\Gamma_{1+} \cup \Gamma_{1-}$ *et on note* $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{t}_1$, *où* $\mathfrak{t}_1$ *est l'intersection de* $\mathfrak{f}$ *avec* $\mathfrak{a}_1$. *On définit de même* $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'_1}$. *Alors* $(A_1, A'_1, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'_1})$ *est une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée,* $\mathscr{BD}_1$, *pour* B *restreinte à* $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$ *et l'antécédent du triple* $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$ *est égal à* $\mathscr{T}_{\mathscr{BD}_1,\mathscr{W}_1}$.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}^{der}$. Si celle-ci est nulle, le résultat est clair. On suppose le résultat est vrai pour les algèbres réductives dont l'idéal dérivé est de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}^{der}$.

Montrons que $\mathfrak{h}$ est isotrope pour B. Etudions la forme bilinéaire, B', sur $\mathfrak{m}_+$, définie par

$$B'(X,Y) = -B(\tau(X),\tau(Y)), \qquad X,Y \in \mathfrak{m}_+.$$

C'est clairement une forme bilinéaire invariante sur $\mathfrak{m}_+$, qui coincide sur $\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+$ avec la restriction de B à $\mathfrak{m}_+$, d'après (3.14) et le Lemme 22. Comme $\mathfrak{a}^+$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}_+$, le Lemme 1 permet de voir que B' coincide sur $\mathfrak{m}_+$ avec cette restriction. Comme $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ sont orthogonaux pour B, il en résulte que $\mathfrak{h}$ est isotrope. Par ailleurs, la définition de $\mathfrak{h}$ montre que c'est l'espace des points fixes d'une f-involution, σ, de $\mathfrak{m}$, dont la restriction à $\mathfrak{m}_+$ est égale à τ. En particulier σ permute $\mathfrak{m}_+$ et $\mathfrak{m}_-$. La décomposition de Langlands $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{l}$ contient $\mathfrak{j}_0$, vérifie $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. L'application du Théorème 1 montre que $\mathfrak{i}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, Lagrangienne pour B.

On montre de même que $\mathfrak{i}'$ est Lagrangienne pour B.

Pour montrer que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin de $\mathfrak{g}$, on se propose d'appliquer le Théorème 3.

Montrons que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}$. Soit $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}'$. Alors, comme $\mathfrak{n}'$ est orthogonal à $\mathfrak{j}_0$, pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, il en est ainsi de X. Notons R_+ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}_+$. Ceux-ci sont en particulier nuls sur $\mathfrak{j}_-$. Alors on a

$$X = \sum_{\alpha \in R_+} (X(\alpha) + \tau(X(\alpha))), \qquad \text{où} \qquad X(\alpha) \in \mathfrak{m}_+^{\alpha}. \quad (3.18)$$

On note que $\tau(X(\alpha))$ est de poids β sous $\mathfrak{j}_0$, où β est un poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{m}_-$, donc nul sur $\mathfrak{j}_+$. La décomposition (3.18) apparait alors comme une décomposition de X en vecteurs poids sous $\mathfrak{j}_0$, pour des poids deux à deux distincts. Comme $X \in \mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}'_0$, et que $\mathfrak{m}_+ \subset \mathfrak{g}_+$, il faut que, pour tout $\alpha \in R_+$, avec α positive, on ait $X(\alpha) = 0$. D'autre part, si $\alpha \in R_+$, avec α négative, $\tau(X(\alpha))$ est un élément de $\mathfrak{m}_-^{\beta}$, avec β négative. En effet β est l'image de α par le prolongement $\mathbb{R}$-linéaire de A à l'espace vectoriel réel engendré par Γ_+. Alors $\tau(X(\alpha))$ appartient à $\mathfrak{b}_0$. Comme $X \in \mathfrak{n}'$, on doit avoir $\tau(X(\alpha)) = 0$, donc aussi $X(\alpha) = 0$. Finalement $X = 0$, comme désiré. Donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}' = \{0\}$. On montre de même $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{n} = \{0\}$.

On note

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{h}, \qquad \tilde{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}.$$

Si $\alpha \in R_+$, on note

$$\mathfrak{h}_\alpha = \{X + \tau(X) \,|\, X \in \mathfrak{m}_+^{\alpha}\}.$$

Alors, d'après (2.41) où l'on prend $R_* = R_+$ on a

$$\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\tilde{\mathfrak{k}}} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{h}_\alpha \right). \tag{3.19}$$

Cette décomposition apparait comme une décomposition de $\tilde{\mathfrak{h}}$ en représentations de $\mathfrak{k}$ sans sous-quotients simples équivalents, les $\mathfrak{h}_\alpha$ étant de plus irréductibles. Comme $\mathfrak{p}'$ contient $\tilde{\tilde{\mathfrak{k}}}$, on en déduit

$$\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}' = \tilde{\tilde{\mathfrak{k}}} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in R_+,\, \mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{p}'} \mathfrak{h}_\alpha \right). \tag{3.20}$$

On note encore A le prolongement $\mathbb{R}$-linéaire de A au sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{j}_0^*$ engendré par Γ_+. On a alors, pour tout $\alpha \in R_+$, $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{A\alpha}$. Comme $\mathfrak{p}'$ est somme de sous-espaces poids sous $\mathfrak{j}_0$, on a $\mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{p}'$ si et seulement si α et $A\alpha$ sont des poids de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{p}'$ c'est à dire

$$\alpha \in R_+ \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{A\alpha} \subset \mathfrak{p}'. \tag{3.21}$$

Calculons $p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\alpha)$ pour α satisfaisant (3.21). On distingue quatre cas selon que $\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{A\alpha}$ sont contenus dans $\mathfrak{n}'$ ou $\mathfrak{m}'$.

(1) $\qquad \alpha \in R_+ \cap R'_+, \qquad A\alpha \in R_- \cap R'_-.$

Dans ce cas, si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $X \in \mathfrak{m}'_+$, $\tau(X) \in \mathfrak{m}'_-$. Alors $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = X + \tau(X)$. Donc

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathfrak{h}_\alpha.$$

(2) $\qquad \alpha \in R_+ \cap R'_+, \qquad \mathfrak{g}^{A\alpha} \subset \mathfrak{n}'.$

On trouve comme ci-dessus que si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $X \in \mathfrak{m}'_+$, $\tau(X) \in \mathfrak{n}'$. Alors $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = X$. D'où l'on déduit que

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathfrak{m}_+^\alpha.$$

(3) $\qquad \alpha \in R_+, \quad \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{n}', \quad A\alpha \in R_- \cap R'_-.$

Si $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, on a $X \in \mathfrak{n}'$, $\tau(X) \in \mathfrak{m}'_-$. Alors $p^{\mathfrak{n}'}(X + \tau(X)) = \tau(X)$. Donc

$$p^{\mathfrak{n}'}(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathfrak{m}_-^{A\alpha}.$$

(4) $\qquad \alpha \in R_+, \quad \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{n}', \quad \mathfrak{g}^{A\alpha} \subset \mathfrak{n}'.$

Alors on aurait $\mathfrak{h}_\alpha \subset \mathfrak{n}'$ et cette possibilité est exclue, d'après ce qu'on a vu plus haut.

Notons

$$\mathfrak{n}_1 := \left(\oplus_{\alpha \in R_+^+ \cap R'_+,\, A\alpha \notin R'_-} \mathfrak{m}_+^\alpha \right) \oplus \left(\oplus_{\alpha \in R_+^- \setminus R'_+,\, A\alpha \in R'_-} \mathfrak{m}_-^{A\alpha} \right) \tag{3.22}$$

et

$$\mathfrak{m}_1 = ((\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}' \cap \sigma(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'))^{der}, \qquad \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{j}_0. \quad (3.23)$$

L'analyse des poids sous $\mathfrak{j}_0$ montre que

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{j}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R_1} \mathfrak{g}^{\alpha} \right)$$

où

$$R_1 = \big(R_+ \cap R'_+ \cap A^{-1}(R_- \cap R'_-)\big) \cup \big(R_- \cap R'_- \cap A(R_+ \cap R'_+)\big).$$

En particulier $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{n}_1$ ont une intersection réduite à zéro.

On note σ_1 la restriction de σ à $\mathfrak{m}_1$, qui est clairement une f-involution. En effet $\mathfrak{m}_1$ est la somme directe de son intersection avec $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, et σ_1 permute ces deux idéaux. On note $\mathfrak{h}_1$ l'ensemble des points fixes de σ_1. On déduit de la définition de $\mathfrak{m}_1$ (cf. (3.23)), et de σ_1 que

$$\mathfrak{h}_1 = \left(\bigoplus_{\alpha \in R_+ \cap R'_+,\, A\alpha \in R_- \cap R'_-} \mathfrak{h}_{\alpha} \right) \oplus (\mathfrak{f} \cap \mathfrak{m}_1). \qquad (3.24)$$

Notons

$$\mathfrak{i}_1 = p^{\mathfrak{n}'}(\tilde{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{p}').$$

Grâce à (3.20) et ce qui précéde on voit que $\mathfrak{i}_1$ est la somme de son intersection, $\tilde{\mathfrak{f}}$, avec $\mathfrak{j}_0$, avec son intersection avec l'orthogonal de $\mathfrak{j}_0$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Tenant compte du fait que A préserve le signe des racines, on voit, grâce à la discussion ci-dessus et à (3.20), que l'intersection de $\mathfrak{i}_1$ avec l'orthogonal de $\mathfrak{j}_0$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, coincide avec celle de $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$. On en déduit l'égalité

$$\mathfrak{i}_1 = \left(\mathfrak{h}_1 + \tilde{\mathfrak{f}}\right) \oplus \mathfrak{n}_1. \qquad (3.25)$$

Montrons que $\mathfrak{p}_1 := \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$.

D'après la définition de $\mathfrak{p}_1$, et de celle de $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1$ (cf (3.22), (3.23)), $\mathfrak{p}_1$ est la somme de son intersection $\mathfrak{p}_{1+}$ avec $\mathfrak{g}_+$ avec celle avec $\mathfrak{g}_-, \mathfrak{p}_{1-}$. Il suffit donc d'étudier séparément ces intersections. On ne traite que $\mathfrak{p}_{1+}, \mathfrak{p}_{1-}$ se traitant de la même manière. Soit

$$E = \{\alpha \in R_+^+ \cap R'_+ | A\alpha \notin R'_-\}, \qquad F = R_+ \cap R'_+ \cap A^{-1}(R_- \cap R'_-).$$

Montrons que E, F, $E \cup F$ sont des parties closes du système de racines de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{g}_+$, $R_+ \cap R'_+$, $E \cup F$ en étant une partie parabolique, contenant $R_+^+ \cap R_+'^+$ et dont E est un idéal (cf. [War, 1.1.2.9, 1.1.2.13], pour la terminologie). On utilise le fait que R_+^+, R'_+ et R'_- sont des parties closes, car, d'après leur définition (cf. fin de la Définition 5), R'_+ (resp. R'_-) est l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires d'éléments de Γ_+ (resp. Γ_-). Le seul point non immédiat est le fait que si $\alpha \in E$, $\beta \in F$ et si $\alpha + \beta$ est une racine de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$, alors $\alpha + \beta$ appartient à E. D'après la définition de R'_- on voit que nos hypothèses impliquent que $A(\alpha + \beta) \notin R'_-$. Il reste à voir que $\alpha + \beta$ est positive. L'étude de ses composantes dans la base Σ, montre que l'une de celles-ci, correspondant à une racine $\gamma \in \Gamma_+$, $\gamma \notin A^{-1}\Gamma'_-$, est strictement positive, car pour l'une au moins de ces racines, la composante de α est strictement positive tandis que celle de β est nulle. Cela implique que $\alpha + \beta$ est positive et finalement dans E.

Joint à la définition de $\mathfrak{p}_{1+}$, et celles de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{n}_1$, cela implique que $\mathfrak{p}_{1+}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}' \cap \mathfrak{g}_+$.

On conclut que $\mathfrak{p}_1$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$, qui contient $\mathfrak{b}_0 \cap \mathfrak{l} \cap \mathfrak{l}'$. La démonstration montre aussi que $\mathfrak{n}_1$ en est le radical nilpotent.

Notons $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{t}_1$ l'intersection de $\mathfrak{k}$ avec le centre $\mathfrak{a}_1$ de $\mathfrak{l}_1$. Montrons que

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{t}_1. \tag{3.26}$$

En effet tout élément de $\mathfrak{k}$ est de la forme $X + \tau(X)$, où X est un élément de $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+$. On note que $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}_1$ sont la somme directe de leurs intersections avec $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$. Il en va de même de $\mathfrak{j}_0, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1$. Alors X est la somme d'un élément de $\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_+$ avec un élément de $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{m}_+$. La décomposition ci-dessus en résulte aussitot.

On pose

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}_1 \tag{3.27}$$

de sorte que (3.25) se réécrit

$$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} \oplus \mathfrak{n}_1.$$

On a

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{j}_0 &= dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_+) + dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_-) + dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a} \\ &= dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} + dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est Lagrangienne dans $\mathfrak{a}$, tenant compte de (3.26), on a

$$dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{j}_0 = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_1 + dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{t}_1 + dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}. \tag{3.28}$$

On a aussi

$$dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{j}_0 = dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1) + dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}_1. \tag{3.29}$$

Montrons

$$dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1) = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}_1. \tag{3.30}$$

En effet, $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{m}_1$, vérifie

$$\mathfrak{k}_1 = \{X + \tau(X) \,|\, X \in \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_{1+}\}$$

et

$$\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_1 = (\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_{1+}) \oplus (\mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{m}_{1-})$$

les deux facteurs étant échangés par τ. L'égalité (3.30) en résulte. On déduit de (3.28) à (3.30) que

$$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_1.$$

Comme $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ sont isotropes pour B, et orthogonales pour B restreinte à $\mathfrak{l}$, puisque le centre d'une algèbre réductive est orthogonal à son idéal dérivé pour toute forme invariante, ce qui précède montre que

$$\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1} \textit{ est Lagrangienne dans } \mathfrak{a}_1. \tag{3.31}$$

Cela implique que $\mathfrak{i}_1$ est Lagrangienne pour B, d'après le Théorème 1.

On introduit de la même manière $\mathfrak{i}'_1$. On prend A_1 égal à la restriction de A à $\Gamma_{1+} = \Gamma_+ \cap \Gamma'_+ \cap A^{-1}(\Gamma_- \cap \Gamma'_-)$. On définit de même A'_1. Montrons que $(A_1, A'_1, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}_1}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'_1})$ est une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée. Les conditions (1)–(3) résultent immédiatement des conditions satisfaites par $(A, A'_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$. La condition (4) résulte de (3.31). Enfin la condition (5) résulte de la condition (5) pour $\mathscr{BD}$, joint à (3.26) et (3.27). L'application de l'hypothèse de récurrence montre que $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ un triple de Manin associé à $\mathscr{BD}_1$ et $\mathscr{W}_1$. Le Théorème 3 permet de conclure que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est un triple de Manin, d'antécédent $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$. Ceci achève la preuve de la Proposition. ∎

THÉORÈME 5. *Tout triple de la forme $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$, où $\mathscr{BD}$ est une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, et $\mathscr{W}$ un ensemble de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}^{der}$, est un triple de Manin fortement standard.*

(ii) *Réciproquement tout triple fortement standard est de cette forme.*

(iii) *Soit $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$ (resp $\mathscr{T}_{\underline{\mathscr{BD}},\underline{\mathscr{W}}}$), où $\mathscr{BD}, \underline{\mathscr{BD}}$ sont des données de Belavin–Drinfeld généralisées, et $\mathscr{W}, \underline{\mathscr{W}}$ des ensembles de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}^{der}$.*

Ces triples de Manin sont conjugués sous G, si et seulement si $\mathscr{BD} = \underline{\mathscr{BD}}$. Alors ils sont conjugués par l'élément de J_0 qui conjugue $\mathscr{W}$ et $\underline{\mathscr{W}}$.

Démonstration. Le point (i) a été vu à la Proposition précédente.

Prouvons (ii). Soit $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ un triple fortement standard sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$. On utilise les notations qui suivent le Lemme 16. D'après la Proposition 7, l'application A est une bijection de R_+ sur R_- qui préserve les signes des racines. Donc elle induit une bijection de Γ_+ sur Γ_-, notée encore A. On a des propriétés analogues pour A'. On note $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$, $\mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'} = \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{a}'$. On voit facilement que $\mathfrak{f} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{j}_0$ est l'espace vectoriel engendré par les $H_\alpha + H_{A\alpha}$, $\alpha \in \Gamma_+$ et que $\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0$. On a des propriétés similaires pour $\mathfrak{i}'$. Alors (3.16) résulte du fait que $\mathfrak{i}$ et $\mathfrak{i}'$ ont une intersection réduite à zéro. D'après le Théorème 1, le Lemme 17 et (3.3), $(A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}'_{\mathfrak{a}'})$ est une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, notée $\mathscr{BD}$. Il reste à trouver un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}$, vérifiant les relations du Lemme 22, avec τ comme dans le Lemme 16. Si $\alpha \in \Gamma'_+$ est comme dans le Lemme 18, i.e. $\alpha \in dom\, C$, $\alpha \notin Im\, C$, on choisit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, tels que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

Puis notant $\alpha_i = C^i\alpha$, $i = 0, \dots, n$, on définit par récurrence sur i, pour $Z = X$ ou $Z = Y$,

$$Z_{\alpha_{i+1}} := \tau^{-1}\tau'\left(Z_{\alpha_i}\right) \tag{3.32}$$

l'expression du membre de droite étant bien définie, pour $i = 0, \dots, n-1$, car alors $\alpha_i \in dom\, C$.

Puis on pose, pour $Z = X$ ou $Z = Y$,

$$Z_{A\alpha_i} = \tau\left(Z_{\alpha_i}\right) \quad \text{si } \alpha_i \in \Gamma_+, \quad \text{et} \quad Z_{A'\alpha_i} = \tau'\left(Z_{\alpha_i}\right) \quad \text{si } \alpha_i \in \Gamma'_+. \tag{3.33}$$

Cette définition est cohérente, car si $\beta = A\alpha_i = A'\alpha_{i'}$, on a $\alpha_{i'} \in dom\, C$ et $C\alpha_{i'} = \alpha_i$. Mais alors on a $i = i' + 1$. Il résulte de (3.32) que les deux définitions de Z_β de (3.33) coincident.

Maintenant, soit un élément β de $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ qui n'est pas de la forme α_i, pour un α comme ci-dessus. En particulier on a $\beta \notin dom\, C$, $\beta \notin Im\, C$. On choisit $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$, $Y_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, tels que $[X_\beta, Y_\beta] = H_\beta$, puis on pose, pour $Z = X$ ou $Z = Y$,

$$Z_{A\beta} = \tau\left(Z_\beta\right) \quad \text{si } \beta \in \Gamma_+, \quad \text{et} \quad Z_{A'\beta} = \tau'\left(Z_\beta\right) \quad \text{si } \beta \in \Gamma'_+. \tag{3.34}$$

Montrons que cette définition est cohérente. Supposons que $A\beta$ soit défini et égal à l' un des $A'\alpha_i$ ci dessus. On aurait alors $\beta \in Im\, C$, ce qui est impossible. Comme $\beta \notin dom\, C$, on voit de même que $A'\beta$, s'il est défini ne peut-être égal à l'un des $A\alpha_i$. Enfin si $A\beta = A'\beta'$, pour deux éléments β, β' comme ci-dessus, on aurait $\beta \in Im\, C$, ce qui n'est pas. Les autres égalités à envisager pour voir la cohérence de (3.33) et (3.34) étant exclues, d'après la bijectivité de A et A', cette cohérence est donc prouvée.

Enfin si $\alpha \in \Sigma$, $\alpha \notin \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, on choisit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, tels que $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$. Il est alors facile de voir que la famille $(H_\alpha, X_\alpha, Y_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ est un système de générateurs de Weyl, $\mathscr{W}$. De plus la définition de τ, τ' et (3.33) (3.34) montrent que le triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ est égal à $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D}, \mathscr{W}}$. Ceci achève la preuve de (ii).

Prouvons (iii). Supposons les deux triples conjugués par un élément de G. On note le premier triple $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ qu'on suppose sous $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$, on note $\mathscr{B}\mathscr{D} = (A, A', \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ et on introduit des notations similaires pour le deuxième triple, en soulignant. Montrons que

$$\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0 = \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{j}_0, \qquad \mathfrak{i}' \cap \mathfrak{j}_0 = \underline{\mathfrak{i}}' \cap \mathfrak{j}_0. \tag{3.35}$$

On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}^{der}$, le résultat étant clair si celle-ci est nulle. Par ailleurs, comme deux sous-algèbres paraboliques standard conjuguées sous G sont égales, on a

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = (\underline{\mathfrak{p}}, \underline{\mathfrak{p}}') \tag{3.36}$$

et les deux triples sont conjugués par un élément de $P \cap P'$. De la Proposition 4, on déduit que les antécédents des deux triples, qui sont fortement standard, sont conjugués par un élément de $L \cap L'$. L'application de l'hypothèse de récurrence conduit au résultat voulu, car si $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_1')$ est l'antécédent de $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, la définition des triples fortement standard montre que $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0 = \mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{j}_0$, etc. L'égalité (3.36) montre que $\mathfrak{m} = \underline{\mathfrak{m}}$, donc $\Gamma = \underline{\Gamma}$. De (3.35), on déduit l'égalité de $\mathfrak{f} := \mathfrak{m} \cap \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0$ avec $\underline{\mathfrak{f}} := \mathfrak{m} \cap \underline{\mathfrak{i}} \cap \mathfrak{j}_0$. Comme la définition de $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D}, \mathscr{W}}$ montre que $\mathfrak{f}$ est engendré par $(H_\alpha + H_{A\alpha})_{\alpha \in \Gamma_+}$ et de même pour $\underline{\mathfrak{f}}$, l'égalité de A et $\underline{A}$ en résulte immédiatement. Il en va de même de l'égalité de A' et $\underline{A}'$. Comme $\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}$ et de même pour $\underline{\mathfrak{i}}_{\underline{\mathfrak{a}}}$, on déduit l'égalité de ces espaces de (3.35), car $\mathfrak{a} = \underline{\mathfrak{a}}$ et $\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{a}$ et de même pour $\underline{\mathfrak{i}}_{\underline{\mathfrak{a}}}$. On procède de même pour $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}, \underline{\mathfrak{i}}_{\underline{\mathfrak{a}}'}$. Donc $\mathscr{B}\mathscr{D}$ est égal à $\underline{\mathscr{B}\mathscr{D}}$, comme désiré. Maintenant, il est clair qu'un élément de J_0 qui conjugue $\mathscr{W}$ et $\underline{\mathscr{W}}$, conjugue les deux triples. ∎

Soit $\mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie simple complexe, $\mathfrak{j}_1$, une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$ et B la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$-invariante, égale à $K_{\mathfrak{g}_1}$ sur le premier facteur et à $-K_{\mathfrak{g}_1}$ sur le deuxième facteur.

On remarque que $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_1 \times \{0\}$, $\mathfrak{g}_- = \{0\} \times \mathfrak{g}_1$. On fixe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_1$ de $\mathfrak{g}_1$. On note $\mathfrak{b}_1'$ la sous-algèbre de Borel opposée, relativement à $\mathfrak{j}_1$. On pose $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1'$. Soit $\mathscr{W}_1$ un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}_1$, relativement à l'ensemble, Σ_1, des racines simples de l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{b}_1$. On note $\mathscr{W}$ le système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}$ égal à $(\mathscr{W}_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathscr{W}_1)$.

THÉORÈME 6. *L'ensemble $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$ où $\mathscr{BD}$ décrit l'ensemble des données de Belavin–Drinfeld généralisées telles que A est l'identité de Σ_1, $\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = \{0\}$, classifie les triples de Manin pour $\mathfrak{g}$, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, où $\mathfrak{i}$ est égal à la diagonale diag$(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, modulo la conjugaison par la diagnale de $G_1 \times G_1$.*

Démonstration. D'après le Théorème précédent, il existe une unique donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, $\mathscr{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ telle que $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ soit conjugué à $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$. Il est alors facile de voir que $\mathfrak{i}$ est sous $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ sont réduits à zéro et $\Gamma_+ = \Sigma_1 \times \{0\}$. Par ailleurs, la conjugaison des triples se traduit par le fait que l'isomorphisme τ du Lemme 22, de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_1$, est un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_1$. Par ailleurs, il préserve $\mathfrak{j}_1$ et induit une permutation, A, de l'ensemble Σ_1. Cette permutation doit donc être triviale, i.e. A est l'identité (cf. [Bou, Chap. VIII, Paragraphe 5.2]). Alors τ est l'identité et la première sous-algèbre isotrope de $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},\mathscr{W}}$ est la diagonale. L'élément de G qui conjugue les deux triples stabilise donc la diagonale. C'est donc un élément de la diagonale. Le théorème en résulte. ∎

Remarque 3. Avec les notations précédentes, appelons donnée de Belavin–Drinfeld une paire $(A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$, telle que, pour A égal à l'identité et $\mathfrak{i}_\mathfrak{a} = \{0\}$, le quadruplet $(A, A', \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ soit une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée. Cela veut dire que A' vérifie la condition (2) de la définition des données de Belavin–Drinfeld généralisées (Définition 5), que $C := A'$ vérifie la condition (3) et que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$ ne rencontre pas la diagonale de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. Ainsi le Théorème précédent montre que les données de Belavin–Drinfeld paramétrise les classes de conjugaison, sous la diagnale de $G_1 \times G_1$, de triples de Manin pour $\mathfrak{g}$, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, où $\mathfrak{i}$ est égal à la diagonale *diag*$(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$.

Il existe une correspondance bijective enttre ces triples de Manin et certaines r-matrices (cf. l'appendice de Macey pour une preuve et des références). Notre théorème donne donc à nouveau une classification de ces r-matrices. Celle de de Belavin et Drinfeld (cf. [BD, Théorème 6.1]) se fait à l'aide des mêmes paramètres: les données de Belavin–Drinfeld.

Ainsi à une donnée de Belavin–Drinfeld sont associés par le thèorème précédent d'une part, et le travail de Belavin–Drinfeld, joint à la correspondance ci-dessus, d'autre part, deux triples de Manin dans $\mathfrak{g}$, dont l'une des sous-algèbres isotropes est la diagonale. L'appendice de Macey montre que ce sont bien les mêmes.

4. TRIPLES DE MANIN RÉELS POUR UNE ALGÈBRE SEMI-SIMPLE COMPLEXE

4.1.

Soit $\mathfrak{g}_1$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, soit $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$ une forme réelle déployée de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{b}_1$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_1$, complexifiée d'une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}_{1\mathbb{R}}$, de $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$. Soit $\mathfrak{j}_{1\mathbb{R}}$ une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$, contenue dans $\mathfrak{b}_{1\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{j}_1$ sa complexifiée. On note $X \mapsto \overline{X}$ la conjugaison de $\mathfrak{g}_1$ par rapport à sa forme réelle $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$. On note η l'application de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, définie par

$$\eta(X) = (X, \overline{X}), \qquad X \in \mathfrak{g}_1.$$

Alors $\eta(\mathfrak{g}_1)$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$ et la conjugaison, j, par rapport à cette forme réelle vérifie

$$j(X,Y) = (\overline{Y}, \overline{X}), \qquad X,Y \in \mathfrak{g}_1.$$

On note $\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{j}_0 := \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$.

Si V est un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}_1$, on notera $V_{\mathbb{C}} = \eta(V) + i\eta(V) \subset \mathfrak{g}$.

On utilisera les Notations qui suivent le Lemme 16 pour $\mathfrak{g}$.

Si B est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}_1$, on note $B_{\mathbb{C}}$, l'unique forme $\mathbb{C}$-bilinéaire invariante sur $\mathfrak{g}$, telle que

$$B_{\mathbb{C}}(\eta(X), \eta(X')) = 2iB(X, X'), \qquad X, X' \in \mathfrak{g}_1. \tag{4.1}$$

On voit aisément que, si $\mathfrak{s}$, est un idéal simple de $\mathfrak{g}_1$, et si la restriction de B à $\mathfrak{s}$ est égal à $Im\, \lambda K_{\mathfrak{s}}$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$B_{\mathbb{C}}((X,Y),(X',Y')) = \lambda K_{\mathfrak{s}}(X,X') - \overline{\lambda} K_{\mathfrak{s}}(Y,Y'), \qquad X, X', Y, Y' \in \mathfrak{s}. \tag{4.2}$$

La démonstration de la Proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 9. *On fixe une une forme de Manin réelle T, B, sur $\mathfrak{g}_1$. L'application qui à un un triple de Manin réel dans $\mathfrak{g}_1$, $(B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$, associe $(B_{\mathbb{C}}, \mathfrak{i}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{i}'_{\mathbb{C}})$, est une bijection entre l'ensemble des triples de Manin réels de $\mathfrak{g}_1$, associés à B, et l'ensemble des triples de Manin complexes de $\mathfrak{g}$, associés à $B_{\mathbb{C}}$, et pour lesquels chacune des sous-algèbres Lagrangiennes est stable par j.*

Cette bijection transforme triples fortement standard, relativement à $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{j}_1$, en triples fortement standard relativement à $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{j}_0$. En outre elle transforme les triples conjugués par G_1 en triples conjugués par $\eta(G_1)$.

HYPOTHÈSE. *On suppose que, pour tout idéal simple de* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{s}$, *la restriction de B à* $\mathfrak{s}$ *est égale à Im* $\lambda_i K_{\mathfrak{s}}$, *pour un* λ *de partie réelle non nulle.*

On note $\mathfrak{g}_{1+}$ la somme des idéaux simples $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}_1$, tels que la restriction de B à $\mathfrak{s}$ est égal à $Im\,\lambda_i K_{\mathfrak{s}}$, pour $Re\,\lambda \in \mathbb{R}^+$. On définit de même $\mathfrak{g}_{1-}$. Alors, au vu de (4.2), on a, pour la forme $B_{\mathbb{C}}$,

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_{1+} \times \mathfrak{g}_{1-}, \qquad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{1-} \times \mathfrak{g}_{1+}. \tag{4.3}$$

On note $\tilde{R}_{1*}$ (resp. $\tilde{R}_*$) l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_1$ (resp. $\mathfrak{j}_0$) dans $\mathfrak{g}_{1*}$ (resp. $\mathfrak{g}_*$), où $*$ vaut $+$ ou $-$. On a:

$$\tilde{R}_+ = \left(\tilde{R}_{1+} \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times \tilde{R}_{1-}\right).$$

On note Σ_{1+} (resp. Σ_{1-}) les racines simples de $\mathfrak{j}_{1+} := \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{g}_{1+}$ dans $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{g}_{1+}$ (resp. $\mathfrak{j}_{1-} := \mathfrak{j}_1 \cap \mathfrak{g}_{1-}$ dans $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{g}_{1-}$), qu'on identifie à des racines de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$. Alors, avec les notations qui suivent le Lemme 16, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_+ &= \left(\Sigma_{1+} \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times \Sigma_{1-}\right), \\ \Sigma_- &= \left((-\Sigma_{1-}) \times \{0\}\right) \cup \left(\{0\} \times (-\Sigma_{1+})\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Soit $\mathscr{W}_1$ un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}_1$, relativement à $\mathfrak{j}_1$, $\Sigma_1 = \Sigma_{1+} \cup \Sigma_{1-}$, dont tous les éléments sont dans $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}}$. Soit $\mathscr{W}$ le système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}$, relativement à $\Sigma := \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, et défini comme suit, en tenant compte de (4.4).

Si $\alpha \in \Sigma_{1+}$ on pose

$$H_{(\alpha,0)} = (H_\alpha, 0), \qquad X_{(\alpha,0)} = (X_\alpha, 0), \qquad Y_{(\alpha,0)} = (Y_\alpha, 0), \tag{4.5}$$

$$H_{(0,-\alpha)} = (0, -H_\alpha), \qquad X_{(0,-\alpha)} = (0, Y_\alpha), \qquad Y_{(0,-\alpha)} = (0, X_\alpha). \tag{4.6}$$

Si $\alpha \in \Sigma_{1-}$, on pose

$$H_{(0,\alpha)} = (0, H_\alpha), \qquad X_{(0,\alpha)} = (0, X_\alpha), \qquad Y_{(0,\alpha)} = (0, Y_\alpha) \tag{4.7}$$

$$H_{(-\alpha,0)} = (-H_\alpha, 0), \qquad X_{(-\alpha,0)} = (Y_\alpha, 0), \qquad Y_{(-\alpha,0)} = (X_\alpha, 0). \tag{4.8}$$

On notera $\alpha \mapsto \alpha^f$ l'échange des facteurs dans $\mathfrak{j}_1^* \times \mathfrak{j}_1^* = \mathfrak{j}_0^*$. On fait de même dans J_0. Si j est un élément de J_0, on note $\bar{j}$ l'élément de J_0 tel que

$$(\bar{j})^\alpha = \overline{j^\alpha}\alpha \in \tilde{R} : \tilde{R}_+ \cup \tilde{R}_-.$$

Notez que si $j = (exp\,X, exp\,Y)$, avec $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, on a $\bar{j} = (exp\,\overline{X}, exp\,\overline{Y})$.

Proposition 10. *On fixe une forme de Manin réelle, B, sur $\mathfrak{g}_1$. Soit $\mathcal{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée pour $\mathfrak{g}$ et $B_\mathbb{C}$.*

(i) *Pour $t \in J_0$, le triple de Manin $(B_\mathbb{C}, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}') = \mathcal{T}_{\mathcal{BD}, t\mathcal{W}}$ est le complexifié d'un triple réel de $\mathfrak{g}_1$, relativement à B, si et seulement si*:

(1) *l'application $\alpha \mapsto -\alpha^f$ induit une bijection de Γ_+ sur Γ_- et l'on a, en prolongeant A par $\mathbb{R}$-linéarité,*

$$(A\alpha)^f = A^{-1}(\alpha^f), \qquad \alpha \in \Gamma_+.$$

(2) *A' vérifie des conditions similaires.*

(3) *$\mathfrak{i}_\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$ sont stables par j.*

(4) *Posant $u := \bar{t}(t^f)^{-1}$, on a*

$$u^\alpha = u^{A\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma_+.$$

(5) *L'élément t de J_0 vérifie des conditions similaires relativement à A'.*

(ii) *On fixe $\mathcal{BD}$ et t vérifiant les conditions ci-dessus. Soit $t_1 \in J_1$ et $t' = (t_1, \bar{t}_1)t$. Alors $\mathcal{BD}$ et t' vérifient les conditions ci-dessus, et les triples complexes $\mathcal{T}_{\mathcal{BD}, t\mathcal{W}}, \mathcal{T}_{\mathcal{BD}, t'\mathcal{W}}$ sont les complexifiés de triples réels de $\mathfrak{g}_1$, conjugués par t_1.*

Démonstration. Si l'automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathfrak{g}$, j, laisse $\mathfrak{i}$ invariant, il laisse invariant le radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{i}$, donc aussi $\mathfrak{p}$, qui est le normalisateur de $\mathfrak{n}$. Par ailleurs $\mathfrak{j}_0$ est contenu dans $\mathfrak{p}$ et est invariant par j. Donc $j(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}$, d'où l'on déduit $j(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$.

Alors $\mathfrak{i} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{i}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est invariant par $\mathfrak{j}$ si et seulement si

$$j(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}, \qquad j(\mathfrak{i}_\mathfrak{a}) = \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \qquad j(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}. \tag{4.9}$$

La seconde égalité de l'équation précédente conduit à (3).

On pose $\mathfrak{f} = \mathfrak{j}_0 \cap \mathfrak{h}$. L'égalité (cf. (3.19))

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{f} \oplus \left(\oplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{h}_\alpha \right) \tag{4.10}$$

et la stabilité de $\mathfrak{j}_0$, et de son orthogonal pour la forme de Killing par j, montre que la première égalité de (4.9) implique

$$j(\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}.$$

Mais $\mathfrak{f}$ est engendré par les $H_\alpha + H_{A\alpha}$, $\alpha \in \Gamma_+$. De plus $j(H_\alpha + H_{A\alpha})$ est égal à $H_{\alpha^f} + H_{(A\alpha)^f}$. Ce dernier doit être une combinaison linéaire de $H_\beta + H_{A\beta}$, $\beta \in \Gamma_+$. Mais on a

$$H_\beta \in \mathfrak{g}_+, \qquad \text{et} \qquad H_{A\beta} \in \mathfrak{g}_-, \qquad H_{\alpha^f} \in \mathfrak{g}_-, \qquad H_{(A\alpha)^f} \in \mathfrak{g}_+$$

car f échange $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$ (voir (4.3)). Comme f envoie chaque élément de Σ sur l'opposé d'un élément de Σ (cf. (4.4)), la projection, sur $\mathfrak{g}_+$ et $\mathfrak{g}_-$, de l'écriture de $H_{\alpha^f} + H_{(A\alpha)^f}$ dans la base de $\mathfrak{f}$, montre qu'il existe $\beta \in \Gamma_+$ telle que

$$(A\alpha)^f = -\beta, \qquad (\alpha)^f = -A\beta. \tag{4.11}$$

Ceci implique immédiatement la condition (1). Comme, pour α racine de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{g}$, on a

$$j(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\alpha^f}, \qquad \alpha \in \tilde{R},$$

au vu de (4.10) et (4.11), la stabilité de $\mathfrak{h}$ par j implique alors

$$j(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathfrak{h}_{-\beta}$$

où $\alpha \in \Gamma_+$ et β est comme ci-dessus. Mais, la définition de $\mathfrak{i}$ (cf. Proposition 8 et Lemme 22) montre que $\mathfrak{h}_\alpha$ a pour base

$$U_\alpha := t^\alpha X_\alpha + t^{A\alpha} X_{A\alpha}$$

et $\mathfrak{h}_{-\beta}$ a pour base

$$V_\beta := t^{-\beta} Y_\beta + t^{-A\beta} Y_{A\beta}.$$

Par ailleurs la définition de j et celle de $\mathscr{W}$ montrent que

$$j(X_\alpha) = Y_{-\alpha^f}, \qquad j(X_{A\alpha}) = Y_{-(A\alpha)^f}.$$

Donc, on a

$$j(U_\alpha) := \bar{t}^\alpha Y_{-\alpha^f} + \bar{t}^{A\alpha} Y_{-(A\alpha)^f}.$$

L'écriture de la proportionnalité de $j(U_\alpha)$ à V_β, conduit à

$$\bar{t}^\alpha t^{A\beta} = \bar{t}^{A\alpha} t^\beta, \qquad \alpha \in \Gamma_+.$$

En tenant compte de (4.11), ceci implique la condition (4). On procède de même pour $\mathfrak{i}'$.

Ce qui précède montre que les conditions (1) à (5) sont nécessaires pour que le triple donné soit le complexifié d'un triple réel. Réciproquement, montrons que si ces conditions sont satisfaites le triple donné est bien le complexifié d'un triple réel. En effet, la deuxième égalité de (4.9) est alors satisfaite.

Comme les racines de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{n}$ sont celles de $\mathfrak{j}_0$ dans $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_1$ qui ne sont pas combinaison linéaire d'éléments de $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$, on déduit la troisième égalité de (4.9) de la condition (1). Il reste à vérifier la première égalité de (4.9). D'abord, il résulte de la condition (1) et de la discussion ci-dessus que

$$\mathfrak{k} \text{ est stable par } j. \tag{4.12}$$

Par ailleurs les conditions (1) et (4), et la discussion ci-dessus montre que

$$j(\mathfrak{h}_\alpha) = \mathfrak{h}_{-(A\alpha)^f}, \qquad \alpha \in \Gamma_+. \tag{4.13}$$

On montre de même que

$$j(\mathfrak{h}_{-\alpha}) = \mathfrak{h}_{(A\alpha)^f}, \qquad \alpha \in \Gamma_+. \tag{4.14}$$

Mais $\mathfrak{h}$, qui est isomorphe à sa projection dans $\mathfrak{g}_+$, est engendrée par les $\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{h}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Gamma_+$. Alors (4.12) à (4.14), joints à (1) montrent que $\mathfrak{h}$ est stable par $\mathfrak{i}$, ce qui achève de prouver que $\mathfrak{i}$ est stable par j. On procède de même pour $\mathfrak{i}'$. Ceci achève de prouver (i). Enfin (ii) est une conséquence immédiate de la Proposition précédente. ∎

On se fixe une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée, qui vérifie les propriétés 1 à 4 de la Proposition précédente. On introduit $C =''A^{-1}A'''$, comme dans la Définition 5. On note $\Gamma_0 := dom\, C \cup Im\, C$. Si $\alpha \in \Gamma_0$, on note $\mathscr{C}(\alpha)$, l'ensemble des $\beta \in \Gamma_0$ tels qu' il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha, C\alpha, \dots, C^{n-1}\alpha \in \Gamma_0, \qquad \text{et} \qquad \beta = C^n\alpha,$$

ou

$$\beta, C\beta, \dots, C^{n-1}\beta \in \Gamma_0, \qquad \text{et} \qquad \alpha = C^n\beta.$$

Si $\alpha \in \Sigma_+$ n'appartient pas à Γ_0, on pose $\mathscr{C}(\alpha) = \{\alpha\}$. Suivant Panov [P1], on appelle les $\mathscr{C}(\alpha)$ des chaines. Il est clair que les chaines sont disjointes ou confondues, et forment une partition de Σ_+. On appellera C-équivalence la relation d'équivalence sur Σ_+, dont les classes d'équivalence sont les chaines. On dira que, pour deux éléments distincts α et β, de Σ_+, α est C-lié à β si $\alpha \in dom\, C$ et $\beta = C\alpha$. On définit, pour $\alpha \in \Gamma_0$,

$$\check{\mathscr{C}}(\alpha) := \{A^{-1}(-\beta^f) \mid \beta \in \mathscr{C}(\alpha) \cap \Gamma_+\} \\ \cup \{A'^{-1}(-\beta^f) \mid \beta \in \mathscr{C}(\alpha) \cap \Gamma'_+\}.$$

Si $\alpha \notin \Gamma_0$, on pose $\check{\mathscr{C}}(\alpha) := \mathscr{C}(\alpha)$.

LEMME 23. (i) *Pour tout* $\alpha \in \Sigma_+$, $\check{\mathscr{C}}(\alpha)$ *est de la forme* $\mathscr{C}(\beta)$, *et l'opération* $\check{}$ *est une involution de l'ensemble des chaines.*

(ii) *Si t vérifie les conditions* (4) *et* (5) *de la Proposition précédente, notant* $u := \bar{t}(t^f)^{-1}$, *pour tout* $\alpha \in \Gamma_0$, *on a*

$$u^{\beta} = u^{\beta'}, \qquad \beta, \beta' \in \mathscr{C}(\alpha)$$
$$u^{\beta} = \overline{u^{\alpha}}, \qquad \beta \in \check{\mathscr{C}}(\alpha).$$

Démonstration. Montrons (i). Montrons que pour tout $\alpha \in \Sigma_+$, les éléments de $\check{\mathscr{C}}(\alpha)$ sont C-équivalents entre eux. Il suffit d'étudier le cas $\alpha \in \Gamma_0$. Soit $\alpha \in \Sigma_+$. On note $\mathscr{A} = \mathscr{C}(\alpha) \cap \Gamma_+$, $\mathscr{A}' = \mathscr{C}(\alpha) \cap \Gamma'_+$. De la définition des chaines, il résulte que, pour toute paire d'éléments distincts β, β', de $\mathscr{A}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in \mathscr{A}$, où, pour $i = 1, \dots, n$, β_i est C-lié à β_{i+1}, avec $\{\beta, \beta'\} = \{\beta_1, \beta_{n+1}\}$.

On remarque que les conditions (1) et (2) de la Proposition 10 impliquent, par un calcul immédiat, ques.

$$\text{Si } \beta, \beta' \in \mathscr{A} \text{ sont } C - \textit{liés}, \ A^{-1}\big(-\beta^f\big) \text{ et } A^{-1}\big(-\beta'^f\big) \text{ sont } C - \textit{liés}.$$

On a un énoncé similaire pour $\mathscr{A}'$.

De ce qui précède, il résulte que les éléments de $A^{-1}(-\mathscr{A}^f)$ (resp. $A'^{-1}(-\mathscr{A}'^f)$) sont C-équivalents entre eux. Pour achever de prouver que les éléments de $\check{\mathscr{C}}(\alpha)$ sont C-équivalents entre eux, il suffit de traiter le cas où $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont non vides et d'intersection vide. De la définition des chaines, et du fait que *dom* C (resp. *Im* C) est un sous-ensemble de Γ'_+ (resp. Γ_+), cela n'est possible que si $\mathscr{C}(\alpha)$ n'a que deux éléments et $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}'$) un élément β (resp. β'), où β' et β sont C-liés. En outre,

$$\beta \in \Gamma_+ \setminus \Gamma'_+, \qquad \beta' \in \Gamma'_+ \setminus \Gamma_+. \tag{4.15}$$

Mais alors $A'\beta'$ et $A\beta$ sont égaux et on note γ leur valeur commune. Utilisant les conditions (1) et (2) de la Proposition 10, on en déduit que

$$A^{-1}\big(-\beta^f\big) = A'^{-1}\big(-\beta'^f\big) = -\gamma^f, \qquad \check{\mathscr{C}}(\alpha) = \big\{-\gamma^f\big\}.$$

Montrons que la classe de C-équivalence de $-\gamma^f$ est réduite à un élément. Pour cela il suffit de voir que $-\gamma^f$ n'est C-lié à aucun élément et qu'aucun élément ne lui est C-lié. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que δ soit C-lié à $-\gamma^f$. On a alors

$$\delta \in \Gamma'_+ \qquad \text{et} \qquad A\big(-\gamma^f\big) = A'\delta. \tag{4.16}$$

On déduit des conditions (1) et (2) de la Proposition 10,

$$A^{-1}\gamma = A'^{-1}\big(-\delta^f\big). \tag{4.17}$$

D'après (4.16) et la condition (1), $A'^{-1}(-\delta^f)$ est un élément de Γ'_+. Par ailleurs, d'après la définition de γ, $A^{-1}\gamma$ est égal à β. Joint à (4.17), cela montre que β est élément de Γ'_+, ce qui contredit (4.15). Donc aucun élément n'est C-lié à $-\gamma^f$.

On montre de même que $-\gamma^f$ n'est C-lié à aucun élément. On vient de voir que, pour toute chaine $\mathscr{C}, \check{\mathscr{C}}$ est contenu dans une chaine $T(\mathscr{C})$. Par ailleurs il résulte facilement de la définition de $\check{\mathscr{C}}$ et des conditions 1 et 2 de la Proposition 10, qui sont satisfaites par $\mathscr{B}\mathscr{D}$, que $T\ (T(\mathscr{C}))$ contient $\mathscr{C}$, donc est égal à $\mathscr{C}$. Donc T est une involution de l'ensemble des chaines et la réunion des $\check{\mathscr{C}}$ contient la réunion de toutes les chaines, donc est égal à Σ_+. Il en résulte que pour tout $\mathscr{C}, \check{\mathscr{C}}$ est égal à $T(\mathscr{C})$. Ceci achève de prouver (i).

Montrons (ii). Si β est C-lié à β', on a $A\beta' = A'\beta$. Par ailleurs, d'après les conditions (4) et (5) de la Proposition 10, on a

$$u^{\beta} = u^{A'\beta}, \qquad u^{\beta'} = u^{A\beta'}.$$

La première égalité de (ii) en résulte.

Pour la deuxième égalité, on remarque, que si $\alpha \in \Gamma_+$, on a, d'après la condition (4) de la Proposition 10,

$$u^{\alpha} = u^{A\alpha}.$$

Mais, il résulte de la définition de u que

$$u^f = \bar{u}^{-1}. \tag{4.18}$$

On en déduit le résultat voulu. On procède de même si $\alpha \in \Gamma'_+$, en utilisant la condition (3) de la Proposition 10. ∎

Le théorème suivant a été suggéré par un résultat de Panov (cf. [P1]) et la présentation que nous en donnons plus loin.

Théorème 7. *Soit B une forme de Manin réelle sur $\mathfrak{g}_1$. Tout triple de Manin réel dans $\mathfrak{g}_1$, relativement à B, est conjugué par un élément de G_1 à un triple fortement standard dont le complexifié est de la forme $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D}, t\mathscr{W}}$, où t est un élément de J_0 et $\mathscr{B}\mathscr{D} = (A, A', \mathfrak{i}_\alpha, \mathfrak{i}_{\alpha'})$ une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée pour $\mathfrak{g}$ et $B_{\mathbb{C}}$, qui vérifient, outre les conditions* (1) *à* (5) *de la Proposition* 10:

(1) $u^2 = 1$, *où* $u := \bar{t}(t^f)^{-1}$.

(2) *Pour tout* $\alpha \in \Sigma_+ \setminus \Gamma_0$: $u_1^{\alpha} = 1$, *où* $u = (u_1, u_2) \in J_1 \times J_1$.

(3) $t = (v_1, 1)$, *où* $v_1 \in J_1$.

Alors $v_1^2 = 1$.

Remarque 4. Pour une classe de conjugaison sous G_1 de triples réels de $\mathfrak{g}_1$, relativement à B, la donnée $\mathscr{B}\mathscr{D}$ est uniquement déterminée, d'après le Théorème 5 et il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour t, car les éléments de carré 1 de J_1 sont en nombre fini.

Démonstration. D'après la Proposition 9 et la Proposition 10, tout triple de Manin réel dans $\mathfrak{g}_1$, relativement à B, est conjugué par un élément de G_1 à un triple fortement standard dont le complexifié est de la forme $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\underline{t}\mathcal{W}}$, où $\underline{t}$ est un élément de J_0 et $\mathcal{BD} = (A, A', \mathfrak{i}_\alpha, \mathfrak{i}_{\alpha'})$ une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée pour $\mathfrak{g}$ et $B_{\mathbb{C}}$, qui vérifient, les conditions (1) à (5) de la Proposition 10 (en y changeant t en $\underline{t}$). Tenant compte du fait que $u = \bar{t}(t^f)^{-1}$ n'est pas changé par la multiplication de t par un élément de la forme $(t_1, \bar{t}_1)$, on voit qu 'il suffit de trouver t satisfaisant toutes les conditions à l'exception de (3). On vérifie aisément que si $t' \in J_0$ satisfait

$$t'^{\alpha} = t'^{A\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma_+, \tag{4.19}$$

$$t'^{\alpha} = t'^{A'\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma'_+, \tag{4.20}$$

on a

$$\mathcal{T}_{\mathcal{BD},\underline{t}\mathcal{W}} = \mathcal{T}_{\mathcal{BD},\underline{t}t'\mathcal{W}}.$$

Il reste à choisir t' vérifiant (4.19) et (4.20) de telle sorte que $t = \underline{t}t'$ vérifie les propriétés voulues.

On choisit un sous-ensemble Θ de Σ_+, tel que toute classe de C-équivalence soit de la forme $\mathcal{C}(\alpha)$ ou $\check{\mathcal{C}}(\alpha)$ pour un unique $\alpha \in \Theta$.

On remarque que si $A\alpha = A'\beta$, α et β sont C-équivalents. On caractérise alors t' par t'^{α}, $\alpha \in \Sigma$. On choisit pour tout $\alpha \in \Sigma_+$, une racine carrée z_α de $\overline{(\underline{u}^{\alpha})}^{-1}$, où $\underline{u} = \bar{\underline{t}}(\underline{t}^f)^{-1}$. On pose alors, pour $\alpha \in \Theta$,

$$t'^{\beta} = z_\alpha, \qquad \text{si } \beta \in \mathcal{C}(\alpha), \text{et si } \alpha \notin \Gamma_0, \tag{4.21}$$

$$t'^{\beta} = z_\alpha \ (\text{resp.}\ \overline{z_\alpha}),$$
$$\text{si } \beta \in \mathcal{C}(\alpha)\ \big(\text{resp. } \beta \in \check{\mathcal{C}}(\alpha)\big) \text{ et si } \mathcal{C}(\alpha) \neq \check{\mathcal{C}}(\alpha) \tag{4.22}$$

$$t'^{\beta} = |\underline{u}^{\alpha}|^{-1/2} \qquad \text{si } \alpha \in \Gamma_0 \text{ est tel que } \mathcal{C}(\alpha) = \check{\mathcal{C}}(\alpha), \text{et } \beta \in \mathcal{C}(\alpha). \tag{4.23}$$

Ceci détermine t'^{β} pour $\beta \in \Sigma_+$, et l'on pose

$$t'^{\beta^f} = \overline{(t'^{\beta})}^{-1}, \qquad \beta \in \Sigma_+. \tag{4.24}$$

Ainsi t' est entièrement caractérisé par les relations (4.21) à (4.24).

Il faut voir que t' vérifie (4.19) et (4.20). Soit $\beta \in \Gamma_+$. On suppose $\beta \in \mathcal{C}(\alpha)$, $\alpha \in \Theta$. D'après (4.24), on a

$$t'^{A\beta} = \bar{t}'^{-(A\beta)^f}.$$

Mais, d'après la condition (1) de la Proposition 10, et la définition de $\check{\mathscr{C}}(\alpha)$, on a $-(A\beta)^f = A^{-1}(-\beta^f) \in \check{\mathscr{C}}(\alpha)$, donc, d'après (4.22) et (4.23), on a

$$\overline{t'^{-(A\beta)^f}} = t'^{\beta}.$$

On traite de même le cas où $\beta \in \check{\mathscr{C}}(\alpha)$, $\alpha \in \Theta$. Ceci prouve que (4.19) est vérifié. On prouve (4.20) de la même manière.

Calculons $v_\beta := \bar{t}'^{\beta}(t'^{-1})^{\beta^f}$, $\beta \in \Sigma_+$. A l'aide de (4.22) à (4.24) et du Lemme 23 (ii), on voit que pour $\alpha \in \Theta$,

$$v_\beta = \underline{u}^{-\beta}, \qquad \text{si } \beta \in \mathscr{C}(\alpha) \cup \check{\mathscr{C}}(\alpha), \text{et si } \alpha \notin \Gamma_0 \text{ ou si } \mathscr{C}(\alpha) \neq \check{\mathscr{C}}(\alpha)$$

$$v_\beta = |\underline{u}|^{-\beta}, \qquad \text{si } \alpha \in \Gamma_0 \text{ est tel que } \mathscr{C}(\alpha) = \check{\mathscr{C}}(\alpha), \text{et } \beta \in \mathscr{C}(\alpha).$$

Par ailleurs il résulte du Lemme 23 (ii),

$$\underline{u}^{\beta} \textit{ est réel si } \alpha \in \Gamma_0 \textit{ est tel que } \mathscr{C}(\alpha) = \check{\mathscr{C}}(\alpha), \textit{ et si } \beta \in \mathscr{C}(\alpha).$$

Alors il est clair que si $t := t'\underline{t}$, $u := \bar{t}(t^f)^{-1}$ vérifie la condition (2) du Théorème et

$$u^\alpha = 1 \text{ ou } -1, \qquad \alpha \in \Sigma_+$$

$$u^f = \bar{u}^{-1}.$$

Il en résulte que $u^2 = 1$ comme désiré. ∎

4.2. *Une autre présentation d'une classification due à A. Panov*

On suppose maintenant que $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre de Lie complexe simple et on pose $B_1 = Im K_{\mathfrak{g}_1}$. On fixe une forme réelle $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ et σ_1 la conjugaison de $\mathfrak{g}_1$ par rapport à $\mathfrak{h}_1$.

On note G_1 le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_1$ (et non son recouvrement universel) et, si $\mathfrak{e}$ est une sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}_1$, on note E le sous-groupe analytique de G_1, d'algèbre de Lie $\mathfrak{e}$.

On s'intéresse aux triples de Manin réels de $\mathfrak{g}_1$, $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ tels que $\mathfrak{i}_1$ soit égal à $\mathfrak{h}_1$, qu'on appelle "$\mathfrak{h}_1$-triple," à conjugaison près par les élément de G_1, ou, ce qui revient au même, par ceux de $G_1^{\sigma_1}$, qui est l' ensemble des éléments de G_1 commutant à σ_1. Ces triples décrivent les structures de bigèbres de Lie sur $\mathfrak{h}_1$, dont le double est isomorphe à $\mathfrak{g}_1$, comme algèbre de Lie (cf. [P1]).

Soit $\mathfrak{k}_1$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}_1$ et soit $\mathfrak{j}_1$ la complexifiée de $\mathfrak{k}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$. On choisit une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{b}_1$, de $\mathfrak{g}_1$, contenant $\mathfrak{j}_1$ et telle que $\sigma_1(\mathfrak{b}_1)$ soit égal à la sous-algèbre de Borel de

$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{b}'_1$, opposée à $\mathfrak{b}_1$, relativement à $\mathfrak{j}_1$. On note Σ_1 l'ensemble des racines simples de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{b}_1$.

On note θ l'involution de Σ_1, caractérisée par

$$\sigma_1(\mathfrak{g}_1^{-\alpha}) = \mathfrak{g}_1^{\theta(\alpha)}. \tag{4.25}$$

En calculant de deux manières différentes $t(\sigma_1(X))$, pour $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on trouve

$$\overline{(t^{\sigma_1})^{\alpha}} = t^{-\theta(\alpha)}. \tag{4.26}$$

Il est facile de voir qu'on peut choisir un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}_1$, $\mathscr{W}_1$, relativement à Σ_1, tel que

$$\sigma_1(H_\alpha) = H_{-\theta(\alpha)}, \qquad \sigma_1(X_\alpha) = \varepsilon_\alpha Y_{\theta(\alpha)}, \qquad \sigma_1(Y_\alpha) = \varepsilon_\alpha X_{\theta(\alpha)} \tag{4.27}$$

où

$$\varepsilon_\alpha = 1 \text{ ou } -1, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_\alpha = 1 \text{ si } \theta(\alpha) \neq \alpha. \tag{4.28}$$

On note $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}'_1$. On note η_1 l'aplication de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\eta_1(X) = (X, \sigma_1(X)), \qquad X \in \mathfrak{g}_1,$$

dont l'image par η_1 est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On note j_1 la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à cette forme réelle, qui vérifie

$$j_1(X,Y) = (\sigma_1(Y), \sigma_1(X)), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}_1. \tag{4.29}$$

On note $\mathscr{W} = (\mathscr{W}_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathscr{W}_1)$. On note B la forme de Manin sur $\mathfrak{g}$, égale à $K_{\mathfrak{g}_1}$ sur le premier facteur et à $-K_{\mathfrak{g}_1}$ sur le deuxième facteur facteur. Alors $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_1 \times \{0\}$, $\mathfrak{g}_- = \{0\} \times \mathfrak{g}_1$ et $\Sigma_+ = \Sigma_1$, $\Sigma_- = \Sigma_1$.

Si V est un sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}_1$, on notera

$$V_{\mathbb{C}} := \eta_1(V) + i\eta_1(V).$$

On remarque que $\mathfrak{h}_{1\mathbb{C}}$ est égal à la diagonale, $diag(\mathfrak{g}_1)$, dans $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$.

Si $\mathscr{T}_1 = (B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$ est un triple de Manin réel dans $\mathfrak{g}_1$, on appelle triple complexifié de $\mathscr{T}_1$, le triple de Manin complexe dans $\mathfrak{g}$, $\mathscr{T}_{1\mathbb{C}} = (B, \mathfrak{i}_{1\mathbb{C}}, \mathfrak{i}'_{1\mathbb{C}})$. Alors $\mathfrak{i}_{1\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{i}'_{1\mathbb{C}}$ sont stables par j_1. De plus si on a deux triples réels dans $\mathfrak{g}_1$, comme ci-dessus, ils sont conjugués par un élément de G_1 si et seulement si leurs complexifiés sont conjugués par un élément de $\eta_1(G_1) = \{(g_1, g_1^{\sigma_1}) \mid g_1 \in G_1\}$. On remarque que si deux sous-espaces vectoriels complexes de $\mathfrak{g}$ sont conjugués par un élément de $\eta_1(G_1)$, si l'un est stable par j_1, l'autre l'est aussi.

De plus le complexifié d'un triple fortement standard relativement à $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{j}_1$, est fortement standard relativement à $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{j}_0$, car il est facile de voir que le complexifié d'un antécédent est l'antécédent du complexifié.

Comme tout triple de Manin réel dans $\mathfrak{g}_1$ est conjugué par un élément de G_1, à un triple fortement standard, d'après le Théorème 4, on a immédiatement

LEMMA 24. (i) *Si* $\mathcal{T}_1$ *est un "*$\mathfrak{h}_1$*-triple," son complexifié est conjugué par un élément de* $\eta_1(G_1)$ *à un triple fortement standard* $\mathcal{T} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *tel que*:

(1) $\mathfrak{i}$ *est conjugué par un élément de* $\eta_1(G_1)$ *à diag*$(\mathfrak{g}_1)$.

(2) $\mathfrak{i}$ *et* $\mathfrak{i}'$ *sont stables par* j_1.

(ii) *Si* $\mathcal{T} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ *est un triple de Manin fortement standard vérifiant* (1) *et* (2), *il existe un "*$\mathfrak{h}_1$*-triple," unique à conjugaison sous* G_1 *près* (*où plutôt* $G_1^{\sigma_1}$ *près*) *tel que son complexifié soit conjugué à* $\mathcal{T}$ *par un élément de* $\eta(G_1)$. *Deux triples fortement standard, associés à* B, *vérifant* (1) *et* (2), *conjugués sous* $\eta_1(G_1)$, *conduisent à la même classe de conjugaison sous* $G_1^{\sigma_1}$ *de "*$\mathfrak{h}_1$*-triple."*

LEMME 25. (i) *Tout triple de Manin complexe, fortement standard dans* $\mathfrak{g}$ *pour* $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{j}_0$, *associé à* B, *vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *du Lemme précédent, est conjugué par un élément de* $\eta_1(G_1)$ *à un triple* $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$, *vérifiant les mêmes conditions, où* $\mathcal{BD}$ *est une donnée de Belavin–Drinfeld* $(A, \mathfrak{i}_\alpha, A', \mathfrak{i}'_{\alpha'})$, *relativement à* B *et* t *est un élément de* J_1.

(ii) *Le fait que* $\mathcal{T}_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$ *vérifie les conditions* (1) *et* (2) *du Lemme précédent équivaut à*:

(1) *Il existe un élément* $g_1 \in G_1$, *tel que* $t = g_1^{\sigma_1} g_1^{-1}$. *En particulier on a* $t^{\sigma_1} = t^{-1}$.

(2) $\Gamma_+ = \Sigma_1$, *et* A *est l'identité*.

(3) $\mathfrak{i}_\alpha = \{0\}$.

(4) $\theta(\Gamma'_+) = \Gamma'_-$, *et* $\theta(A'\alpha) = A'^{-1}(\theta(\alpha))$, $\varepsilon_{A'\alpha} t^{A'\alpha} = \varepsilon_\alpha t^\alpha$, $\alpha \in \Gamma'_+$.

(5) *L'espace* $\mathfrak{i}_{\alpha'}$ *est stable par* j_1.

Démonstration. Soit $\underline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_{\mathcal{BD},(t_1,t_2)(\mathcal{W})}$ un triple de Manin fortement standard, vérifiant les conditions (1) et (2) du Lemme précédent, où $t_1, t_2 \in J_1$. Alors $\underline{\mathcal{T}}$ est conjugué par $(t_1, t_1^{\sigma_1}) \in \eta_1(G_1)$ à $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathcal{BD},(1,t)(\mathcal{W})}$, où $t = t_1^{-\sigma_1} t_2$, qui vérifie les conditions (1) et (2) du Lemme précédent. Montrons que cela implique les propriétés (1) à (5) ci-dessus.

Ecrivons $\mathcal{T} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$.

Comme $\mathfrak{i}$ est conjugué sous $\eta_1(G_2)$ a *diag* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{i}$ est semi-simple, donc sous $\mathfrak{g}$. Par suite, avec les notations du Théorème 1, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$ et

$\Gamma_+ = \Sigma_1$. Alors, utilisant les notations du Lemme 22, $\mathfrak{i} = \{(X, \tau(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$. Comme $\mathfrak{i}$ est conjugué par un élément de $\eta_1(G_1)$ à $diag(\mathfrak{g}_1)$, cela implique que l'automorphisme τ de $\mathfrak{g}_1$ est intérieur. Or, par définition, τ préserve $\mathfrak{j}_1$, et l'inverse du transposé de sa restriction à $\mathfrak{j}_1$ induit A sur Σ_1. Comme A préserve Σ_1, A doit être l'identité. On a donc prouvé 2. Cas 3 résulte du fait que $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{a} = \{0\}$. Alors $\mathfrak{i} = \{(X, tX) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$. On obtient (1) en écrivant que $\mathfrak{i}$ est conjugué par un élément de $\eta_1(G_1)$ a *diag* $\mathfrak{g}_1$.

On traduit maintenant le fait que $\mathfrak{i}'$ est stable par j_1. Cela implique que $\mathfrak{p}'$ est stable par j_1. Comme $\mathfrak{j}_0$ est stable par j_1, joint à (4.25), cela implique aussi que $\mathfrak{m}'$ est stable par j_1 et donc aussi $\mathfrak{h}'$. Cela conduit immédiatement à la première égalité de (4). Les deux autres sont obtenues en traduisant la stabilité de $\mathfrak{h}'$ par j_1. Plus précisément on pose

$$U = \left(X_\alpha, t^{A'\alpha} X_{A'\alpha}\right) \in \mathfrak{h}', \qquad \alpha \in \Sigma_1.$$

On a, en tenant compte de (4.27), (4.29) et de l'antilinéarité de σ_1,

$$j_1(U) = \left(\overline{t^{A'\alpha}} \varepsilon_{A'\alpha} Y_{\theta(A'\alpha)}, \varepsilon_\alpha Y_{\theta(\alpha)}\right).$$

La stabilité de $\mathfrak{h}'$ par j_1 implique que $\theta(A'\alpha)$ est élément de Γ'_+ et $j_1(U)$ doit être un multiple scalaire de

$$V = \left(Y_{\theta(A'\alpha)}, t^{A'\theta(A'\alpha)} Y_{A'\theta(A'\alpha)}\right).$$

Les deux premières égalités de (4) en résulte immédiatement, grâce à (4.26) et (1) et l'on obtient en outre

$$\varepsilon_{A'\alpha} t^{A'\alpha} = \varepsilon_\alpha \bar{t}^{\theta(\alpha)}.$$

En utilisant (4.26) et le fait que $t^{\sigma_1} = t^{-1}$, on aboutit à la troisième égalité de (4).

La condition (5) est immédiate.

On procède de même pour la réciproque. ∎

LEMME 26. *Soit t, $\mathscr{BD}$ vérifiant les conditions* (1) *à* (5) *du Lemme précédent. Soit $t' \in J_1$ tel que*

$$t'^{A'\alpha} = t'^{\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma'_+.$$

Alors, on a

(i) *Les triples de Manin $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},(1,t)(\mathscr{W})}$ et $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},(t',t't)(\mathscr{W})}$ sont égaux.*

(ii) *Le triple de Manin $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},(1,t)(\mathscr{W})}$ est conjugué par $(t', t'^{\sigma_1}) \in \eta_1(G_1)$ à $\mathscr{T}_{\mathscr{BD},(1,(t't'^{-\sigma_1})t)(\mathscr{W})}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},(1,t)\mathscr{W}} = (B, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}')$ et utilisons les notations du Théorème 1. La stabilité de $\mathfrak{i}$ par (t', t') est claire. Par ailleurs, $(t', t') \in J_0$ laisse stable $\mathfrak{p}'$, donc $\mathfrak{n}'$ et laisse fixe point par point les éléments de $\mathfrak{a}'$. Il reste à voir que $\mathfrak{h}'$ est invariant. Mais cette algèbre est engendrée par

$$\left(X_\alpha, t^{A'\alpha} X_{A'\alpha}\right), \left(Y_\alpha, t^{-A'\alpha} Y_{A'\alpha}\right), \qquad \alpha \in \Gamma'_+.$$

Le point (i) en résulte immédiatement. ∎

Si $\alpha \in \Gamma_0 := \Gamma'_+ \cup \Gamma'_-$, on note $\mathscr{C}(\alpha)$, l'ensemble des $\beta \in \Gamma_0$ tels qu' il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\alpha, A'\alpha, \dots, A'^{n-1}\alpha \in \Gamma'_+, \qquad \text{et} \qquad \beta = A'^n \alpha,$$

ou

$$\beta, A'\beta, \dots, A'^{n-1}\beta \in \Gamma'_+, \qquad \text{et} \qquad \alpha = A'^n \beta.$$

Les $\mathscr{C}(\alpha)$ sont soit distincts soit confondus. De plus la deuxième égalité de la condition (4) du Lemme 25, montre facilement

$$\theta(\mathscr{C}(\alpha)) = \mathscr{C}(\theta\alpha) \tag{4.30}$$

(cf. [P1, Lemme 4.11], pour un Lemme analogue). Par ailleurs, grâce à (4.27), (4.28), on a

$$\varepsilon_{\theta(\alpha)} = \varepsilon_\alpha, \qquad \alpha \in \Sigma_1. \tag{4.31}$$

Le Théorème suivant est une autre présentation de la classification de certains triples de Manin, correspondants à certaines structures de bigèbres de Lie sur $\mathfrak{h}_1$, due à Panov (cf. [P1, Théorèmes 4.5, 4.14], voir [P2] pour d'autres résultats).

THÉORÈME 8. (i) *Le complexifié d'un $\mathfrak{h}_1$-triple est conjugué par un élément de $\eta_1(G_1)$ à un triple $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},(1,u)(\mathscr{W})}$, où $u \in J_1$, $\mathscr{B}\mathscr{D}$ vérifient les conditions* (1) *à* (5) *du Lemme* 25 (*avec t remplacé par u*) *et u vérifie de plus*:

(1) $u^{\sigma_1} = u = u^{-1}$.

(2) $u^\alpha = 1$, *si* $\alpha \in \Sigma_1 \setminus \Gamma_0$ *et* $\theta(\alpha) \neq \alpha$, *ou si* $\alpha \in \Gamma_0$ *et* $\theta(\mathscr{C}(\alpha)) \neq \mathscr{C}(\alpha)$.

(ii) *Réciproquement si u et $\mathscr{B}\mathscr{D}$ vérifient les propriétés ci-dessus* (*i.e.* (1) *à* (2) *de* (i) *et les conditions* (1) *à* (5) *du Lemme* 25), $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},(1,u)\mathscr{W}}$ *est conjugué au complexifié d'un $\mathfrak{h}_1$-triple, unique modulo la conjugaison de $G_1^{\sigma_1}$.*

(iii) *Dans le cas où $\mathfrak{k}_1$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact dans G_1, θ est triviale, Γ_+ est vide et les conditions sur u ci-dessus se réduisent à la première, outre celles du Lemme* 25.

Démonstration. On sait (cf. Lemme 25) que le complexifié d'un $\mathfrak{h}_1$-triple est conjugué par un élément de $\eta_1(G_1)$ à un triple $\mathcal{T}_{\mathcal{B}\mathcal{D},(1,t)\mathcal{W}}$, où t, $\mathcal{B}\mathcal{D}$ vérifient les conditions 1 à 5 du Lemme 26 (avec t remplacé par u).

L'idée est d'appliquer le Lemme 25, avec t' bien choisi. Il suffit de définir t'^{α}, $\alpha \in \Sigma_1$.

On établit d'abord quelques résultats auxiliaires.

On rappelle que d'après (4.26) et la condition 1 du Lemme 25, on a

$$\overline{t^{\theta(\alpha)}} = t^{\alpha}, \qquad \alpha \in \Sigma_1. \tag{4.32}$$

Par ailleurs, d'après la troisième égalité de la condition 4 du Lemme 25, on a

$$t^{A'\alpha} = \varepsilon_{A'\alpha}\varepsilon_{\alpha}t^{\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma',$$

d'où l'on déduit

$$t^{\beta} = \varepsilon_{\beta}\varepsilon_{\beta'}t^{\beta'}, \qquad \beta, \beta' \in \mathcal{C}(\alpha),\ \alpha \in \Gamma_0. \tag{4.33}$$

Enfin la condition (4) du Lemme 25 montre que

$$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\theta(\alpha)}, \qquad \alpha \in \Sigma_1. \tag{4.34}$$

Pour définir t'^{α}, on distingue plusieurs cas. On note Σ_{1*}, un sous-ensemble de Σ_1 tel que tout $\beta \in \Sigma_1$ soit élément d'un $\mathcal{C}(\alpha)$ pour un unique α appartenant à $\Sigma_{1*} \cup \theta(\Sigma_{1*})$, et tel que les éléments de l'intersection de Σ_{1*} et $\theta(\Sigma_{1*})$ soient fixés par θ.

Soit $\alpha \in \Sigma_{1*}$:

(1) Si $\alpha \notin \Gamma_0$, et $\theta(\alpha) = \alpha$, (4.32) implique que t^{α} est réel et on pose

$$t'^{\alpha} = |t^{-\alpha}|^{1/2}.$$

(2) Si $\alpha \notin \Gamma_0$, et $\theta(\alpha) \neq \alpha$, on note z une racine carrée de $t^{-\alpha}$, et on pose

$$t'^{\alpha} = z, \qquad t'^{\theta(\alpha)} = \bar{z}.$$

(3) Si $\alpha \in \Gamma_0$ et $\theta(\mathcal{C}(\alpha)) = \mathcal{C}(\alpha)$, on a, d' après (4.32),

$$t^{\theta(\alpha)} = \varepsilon_{\theta(\alpha)}\varepsilon_{\alpha}t^{\alpha}.$$

Tenant compte de (4.32) et (4.33), cela implique que t^{α} est réel. On note z une racine carrée de $|t^{-\alpha}|$, et on pose

$$t'^{\beta} = z, \qquad \beta \in \mathcal{C}(\alpha).$$

(4) Si $\alpha \in \Gamma_0$ et $\theta(\mathscr{C}(\alpha)) \cap \mathscr{C}(\alpha) = \emptyset$, on note z une racine carrée de $t^{-\alpha}$, et on pose

$$t'^{\beta} = z, \quad t'^{\theta(\beta)} = \bar{z}, \qquad \beta \in C(\alpha).$$

On voit que les relations précédentes définissent $t' \in J_1$, qui vérifie

$$t'^{A'\alpha} = t'^{\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma'_+.$$

Le Lemme 25 et les conditions imposées à t' montrent que $u := t' t'^{-\sigma_1} t$ vérifie les conditions voulues.

Le point (ii) est un cas particulier du Lemme 25(ii).

Traitons le cas où $\mathfrak{k}_1$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact de $\mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{k}_1$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{j}_1$ sur lesquels toutes les racines sont imaginaires pures.

Tout $\mathfrak{h}_1$-triple est conjugué sous G_1 à un triple réel fortement standard $(B_1, \mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}'_1)$. Alors $\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{j}_1$, qui est conjugué par G_1 à $\mathfrak{k}_1$, est l'algèbre de Lie d'un tore maximal compact de G_1, donc est égal à $\mathfrak{k}_1$. Par ailleurs $\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{j}_1$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{h}'_1$. Son intersection avec $\mathfrak{k}_1$ est donc non réduite à zéro sauf si $\mathfrak{h}'_1$ est réduite à zéro. On en déduit que la sous-algèbre Lagrangienne $\mathfrak{i}'_1$ est sous une algèbre de Borel. Par complexification, il en résulte que dans (i), on doit avoir $\Gamma'_+ = \emptyset$. La définition de θ et le fait que les racines soient imaginaires pures sur $\mathfrak{k}_1$ montrent que θ est l'identité. Ceci achève la preuve du Théorème. ∎

ACKNOWLEDGMENTS

I thank very much C. Klimcik for suggesting this work and for many interesting discussions. I thank J. L. Brylinski for pointing out to me the work of E. Karolinsky. I thank also B. Enriquez and Y. Kosmann-Schwarzbach for telling me about the relations of my work, at an early stage, to the work of A. Belavin and G. Drinfeld [BD] and A. Panov [P1].

RÉFÉRENCES

[BD] A. Belavin and V. G. Drinfeld, "Triangle Equations and Simple Lie Algebras," Mathematical Physics Reviews, Vol. 4, pp. 93–165, Harwood Academic, Chur, 1984.

[Bor] A. Borel, "Linear Algebraic Groups," (2nd enlarged ed.), Graduate Texts in Mathematics, Vol. 126, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 1991.

[Bou] N. Bourbaki, "Groupes et Algèbres de Lie," Chap. I et Chaps. IV–VIII, Actualités Scientifiques et Industrielles, Vols. 1285, 1337, et 1364, Hermann, Paris, 1960, 1968, 1975.

[D] V. G. Drinfeld, Quantum groups, *dans* "Proceedings of the I.C.M.," pp. 798–817, Berkeley, CA, 1986.

[G] F. Gantmacher, Canonical representation of automorphism of a semisimple Lie group, *Math. Sb.* **47** (1939), 101–144.

[K1] E. Karolinsky, A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group, *Math. Phys. Anal. Geom.* **3** (1996), 545–563.

[K2] E. Karolinsky, A classification of Poisson homogeneous spaces of a compact Poisson Lie group, *Dokl. Akad. Nauk* **359** (1998), 13–15.

[K3] E. Karolinsky, A classification of Poisson homogeneous spaces of a reductive complex Poisson Lie group, Preprint math.QA.9901073, 1999.

[KS] Y. Kosmann-Schwarzbach, Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations, *dans* "Integrability of Nonlinear Systems, Proc. of the CIMPA School, Pondicherry University, India, 8–26 January 1996."

[M1] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 331–357.

[M2] T. Matsuki, Orbits of affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups, *Hiroshima J. Math.* **12** (1982), 307–320.

[OV] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg, "Lie Groups and Lie Algebras," Encyclopaedia of Math. Science, Vol. 41, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1990.

[P1] A. Panov, Manin triples of real simple Lie algebras, 1, Preprint math.QA.9904156.

[P2] A. Panov, Manin triples of real simple Lie algebras, 2, Preprint math.QA.9905028.

[S1] M. Semenov-Tian-Shansky, What is a classical *r*-matrix, *Funk. Anal. i Priloz.* **17** (1983), 69–70.

[S2] M. Semenov-Tian-Shansky, Dressing transformations and Poisson group actions, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1985), 1237–1260.

[W] G. Warner, "Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups," Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einz., Vol. 188, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

APPENDIX: TRIPLES DE MANIN ASSOCIÉS AUX

r-MATRICES DE BELAVIN–DRINFELD

Guillaume Macey[1]

A.1. *r-Matrices factorisables et triples de Manin diagonaux*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante, K, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{g}$ et son dual $\mathfrak{g}^*$. On note t l'élément de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ correspondant ainsi à K. Si R est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$, on note R^* l'endomorphisme de $\mathfrak{g}$ déduit du transposé de R et de l'identification de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. On note $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante.

[1] Ecole Normale Supérieure, DMA, CNRS, UMR 8553, Equipe Groupes et Géométrie, 45, rue d'Ulm, 75005 Paris. E-mail: macey@clipper.ens.fr.

Un élément r de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ est appelé r-matrice factorisable, pour K, si et seulement si r est solution de l'équation de Yang–Baxter modifiée,

$$r + r^{21} = t \tag{A.1}$$

$$[r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}] = 0, \tag{A.2}$$

avec, si $r = \sum_i a_i \otimes b_i$, $r^{21} = \sum_i b_i \otimes a_i \otimes 1$, $r^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $r^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$ et $r^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i \in U(\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ et $[r^{12}, r^{13}]$ est le crochet dans $U(\mathfrak{g})^{\otimes 3}, \dots$.

Un opérateur factorisable, pour K, est une application linéaire R: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que

$$R + R^* = id_{\mathfrak{g}} \tag{A.3}$$

$$[RX, RY] = R([RX, Y] + [X, RY] - [X, Y]), \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{A.4}$$

Si R est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$, l'isomorphisme canonique de l'espace des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ et l'isomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ lui associe un élément $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Alors R est un opérateur factorisable si et seulement si r est une r-matrice factorisable. Voir pour cela [BD, Paragraphe 6.2], où notre R correspond à leur f^*. Dans l.c. il est montré que f, i.e., R^* est un opérateur factorisable si et seulement si r est une r-matrice factorisable. Mais on vérifie sans peine que $R^* = id - R$ est un opérateur factorisable si et seulement si il en va de même de R^*. Cette interversion de R et R^* explique le choix de l'opposé du cobord de $-r$ au lieu de celui de r, dans (A.8), car celui-ci est égal au cobord de r^{21}. Soit B la forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par

$$B((X, Y), (X', Y')) = K(X, X') - K(Y, Y'), \qquad X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}. \tag{A.5}$$

Notons $diag\ \mathfrak{g} = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$. C'est clairement une sous-algèbre Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, isotrope maximale. Nous dirons qu'un triple de Manin dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ est *diagonal* s'il est de la forme $(B, diag\ \mathfrak{g}, \mathfrak{i}')$.

La proposition suivante est due à Semeno-Tian-Shansky [S2, Proposition 1], où il il faut noter que notre R correspond à son R_+'.

PROPOSITION 1. (i) *Soit R un opérateur factorisable correspondant. On note i_R l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par*

$$i_R(X) = (RX, -R^*X), \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Notons $\mathfrak{g}'_R$ son image. Alors $\mathcal{T}_R := (B, diag\ \mathfrak{g}, \mathfrak{g}'_R)$ est un triple de Manin diagonal.

(ii) *Cette correspondance, $R \mapsto \mathcal{T}_R$, établit une bijection entre les opérateurs factorisables et les triples de Manin diagonaux.*

Démonstration. Prouvons (i). Tenant compte de (A.3), on voit facilement que

$$(X, Y) \in \mathfrak{g}'_R \text{ si et seulement si } X = R(X - Y). \tag{A.6}$$

Le fait que $\mathfrak{g}'_R$ soit stable par le crochet de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ équivaut à la relation (1.4).

On note au passage que l'on a, pour $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$[i_R(X), i_R(Y)] = i_R(Z), \qquad \text{avec } Z = [RX, RY] - [R^*X, R^*Y]. \tag{A.7}$$

Par ailleurs, tenant compte de (A.3), le fait que $\mathfrak{g}'_R$ soit isotrope pour B est immédiat. Enfin $\mathfrak{g}'_R$ et *diag* $\mathfrak{g}$ sont supplémentaires car $R + R^* = id_{\mathfrak{g}}$. Ceci prouve que $\mathcal{T}_R$ est un triple de Manin et achève de prouver (i).

Prouvons (ii). Si $(B, \mathit{diag}\ \mathfrak{g}, \mathfrak{i}')$ est un triple diagonal, $\mathfrak{i}'$ est un sous-espace supplémentaire de *diag* $\mathfrak{g}$. Il en résulte qu'il existe un unique endomorphisme de $\mathfrak{g}$, R, tel que $\mathfrak{i}' = \{(RX, -R'X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$, où $R' = id_{\mathfrak{g}} - R$. En effet l'application linéaire j de $\mathfrak{i}'$ dans $\mathfrak{g}$ qui à $(X, Y) \in \mathfrak{i}'$ asssocie $X - Y$ est injective, puisque *diag* $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{i}'$ sont supplémentaires, donc bijective pour des raisons de dimension. Alors on voit que la composée, R, de l'inverse de j avec la première projection est la seule solution possible. Alors l'égalité (A.3) est une conséquence immmédiate du fait que $\mathfrak{i}'$ est isotrope. Ceci montre l'unicité de l'opérateur factorisable, R, s'il existe, tel que $\mathcal{T}_R = (B, \mathit{diag}\ \mathfrak{g}, \mathfrak{i}')$. Il reste à prouver que R défini ci-dessus est un opérateur factorisable, car $\mathfrak{i}' = \mathfrak{g}'_R$, d'après ce qui précède. Il reste à vérifier (A.4). On utilise pour cela le début de la preuve de (i). ∎

On rappelle que la donnée d'une structure de bigèbre de Lie sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathfrak{a}$ est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ avec des relations de compatiblités qui se résument comme suit (voir par exemple [KS, Paragaphe 1]):

Soit $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^*$, soit B' la forme bilinéaire symétrique non dégénérée pour laquelle $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ sont isotropes et induisant la forme bilinéaire canonique sur $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^*$. Les structures d'algèbres de Lie sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ donnent lieu à une structure de bigèbre de Lie si et seulement si il existe une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{d}$, induisant celles déjà données sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$, telle que B' soit $\mathfrak{d}$-invariante. Cette structure, si elle existe, est nécessairement unique et est appelé double de la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors $(B', \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^*)$ est un triple de Manin, appelé triple de Manin canonique de la bigèbre de Lie.

On sait que:

> *Toute r-matrice factorisable induit une structure de bigèbre de Lie sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ étant la structure de départ et le crochet sur $\mathfrak{g}^*$ étant donnée par la transposée de l'opposé du cobord δ_r de r, qui est l'application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, définie par*
>
> $$\delta_r(X) = (ad X \otimes 1 + 1 \otimes ad X)(r), \qquad X \in \mathfrak{g}. \tag{A.8}$$

En effet le cobord de $-r$, est égal au cobord de $\tilde{r} = r^{21} - (t/2)$, qui est antisymétrique et vérifie les conditions voulues pour que son cobord définisse structure de bigèbre de Lie (cf. [D, paragraphe 4] et [BD, équations 6.2 à 6.5], voir aussi [KS, Paragraphe 2.2], pour plus de détails). Cette bigèbre de Lie sera dites factorisable, pour K. Le triple de Manin canonique de cette bigèbre sera noté $(B', \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ étant muni de sa structure de double.

Proposition 2. *On note R l'opérateur factorisable associé à r. Si $X \in \mathfrak{g}$, on note X^* l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par $X^*(Y) = K(X,Y)$, $Y \in \mathfrak{g}$.*

Soit α l'application linéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{d}$ qui envoie diag $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'_R$ dans $\mathfrak{g}^*$, définie par

$$\alpha(X, X) = X, \quad \alpha(RX, -R^*X) = X^*, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

Alors α est un isomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{d}$ qui transforme le triple $\mathcal{T}_R$ dans $(B', \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$.

Démonstration. La restriction de α à *diag* $\mathfrak{g}$ est clairement un morphisme d'algèbre de Lie. Montrons qu'il en va de même de la restriction de α à $\mathfrak{g}'_R$. Il suffit, au vu de la définition de α, de prouver

$$\alpha([i_R(X), i_R(Y)]) = [X^*, Y^*], \qquad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Avec Z comme dans (A.7), il suffit de montrer que $[X^*, Y^*] = Z^*$. On calcule pour cela $[X^*, Y^*](T)$, $T \in \mathfrak{g}$. Tenant compte de la définition du crochet dans $\mathfrak{g}^*$ comme transposé du cobord de $-r$, un calcul immédiat conduit au résultat voulu et la restriction de α est bien un morphisme d'algèbre de Lie.

En tenant compte de (A.3), il est clair que les restrictions de α à *diag* $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'_R$ sont injectives, donc α est bijective. Montrons que α transporte B en B'. Tenant compte de l'isotropie des différentes sous-algèbres, il suffit pour cela de montrer

$$B'(\alpha(X, X), \alpha(i_R(Y)) = B((X, X), i_R(Y)), \qquad X, Y \in \mathfrak{g},$$

ce qui est immédiat en tenant compte de (A.5). Alors α transporte la structure d'algèbre de Lie dans une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{d}$ ayant la propriété caractéristique du double, i.e. l'invariance de B'. Elle doit donc coincider avec celle ci. Ceci achève la preuve de la Proposition. ∎

A.2. *Triples de Manin associés aux r-matrices de Belavin–Drinfeld*

On va utiliser les résultats précédents pour une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$, qu'on note $\mathfrak{g}_1$ pour se conformer aux notations du corps de l'article (cf. Théorème 6 et les notations qui le précèdent), et on prend pour K a forme de Killing de $\mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{j}_1$, une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{j}_0 = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$ et B la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$-invariante, égale à K sur le premier facteur et à $-K$ sur le deuxième facteur (cf. (A.5)).

On remarque que $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{g}_1 \times \{0\}$, $\mathfrak{g}_- = \{0\} \times \mathfrak{g}_1$. On fixe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ contenant $\mathfrak{j}_1$. On note $\mathfrak{b}'_1$ la sous-algèbre de Borel opposée, relativement à $\mathfrak{j}_1$. On pose $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}'_1$. Soit $\mathscr{W}_1$ un système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}_1$, relativement à l'ensemble, Σ_1, des racines simples de l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{b}_1$. On note $\mathscr{W}$ le système de générateurs de Weyl de $\mathfrak{g}$ égal à $(\mathscr{W}_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathscr{W}_1)$. On appelle donnée de Belavin–Drinfeld diagonale une donnée de Belavin–Drinfeld généralisée pour $\mathfrak{g}, B, \mathfrak{j}_0, \mathfrak{b}_0, (A, A', \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$ (cf. Définition 5 du corps de l'article), telle que A soit l'identité de Σ_1, ce qui implique que $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}}$ est réduit à zéro. On utilise librement les notations de la Définition 5 et de la Proposition 8. En particulier $\mathfrak{f}$ (resp. $\mathfrak{f}'$) est le sous-espace de $\mathfrak{j}_0$ engendré par les $(H_\alpha, H_{A\alpha})$, $\alpha \in \Gamma_+$ (resp. $(H_\alpha, H_{A'\alpha})$, $\alpha \in \Gamma'_+$). Donc $\mathfrak{f}$ est égal à la diagonale de $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$. On note K_1 la restriction de K à $\mathfrak{j}_1$, qui permet d'identifier $\mathfrak{j}_1$ et $\mathfrak{j}_1^*$. On note t_1 l'élément de $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$ correspondant à K_1 dans cette identification. Si R_1 est un endomorphisme de $\mathfrak{j}_1$, i.e un élément de $\mathfrak{j}_1^* \otimes \mathfrak{j}_1$, l'isomorphisme entre le premier facteur avec $\mathfrak{j}_1$ permet de lui associer un élément de $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$.

LEMMA 1. (i) *Il existe un unique endomorphisme R_1 de $\mathfrak{j}_1$ satisfaisant*

$$\mathfrak{f}' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'} = \{(R_1 X, -R_1^* X) \mid X \in \mathfrak{j}_1\} \tag{A.9}$$

$$R_1 + R_1^* = id_{\mathfrak{j}_1}. \tag{A.10}$$

(ii) *Notons r_1 l'élément de $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$ correspondant à R_1. Alors la correspondance qui à $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$ associe R_1, resp r_1, est une bijection ente les sous-espaces lagrangiens de $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$, tels que $(\mathfrak{f}' \oplus \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}) \cap diag\, \mathfrak{j}_1 = \{0\}$ et les endomorphismes R_1 de $\mathfrak{j}_1$ vérifiant* (A.10)) *et*

$$R_1(H_\alpha - H_{A'\alpha}) = H_\alpha, \qquad \alpha \in \Gamma'_+, \tag{A.11}$$

resp. les éléments r_1 *de* $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$ *satisfaisant*

$$r_1 + r_1^{21} = t_1 \tag{A.12}$$

$$(A'\alpha \otimes id)(r_1) + (id \otimes \alpha)(r_1) = 0, \qquad \alpha \in \Gamma'_+. \tag{A.13}$$

Démonstration. Notons $\mathfrak{d}' = \mathfrak{f}' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$. C'est un sous-espace de $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_1$ qui est supplémentaire de *diag* $\mathfrak{j}_1$ (cf. (3.16)). Il en résulte qu'il existe un unique endomorphisme de $\mathfrak{j}_1, R_1$, tel que $\mathfrak{d}' = \{(R_1 X, -R'_1 X) \mid X \in \mathfrak{j}_1\}$, où $R'_1 = id_{\mathfrak{j}_1} - R_1$ (cf. debut de la preuve de la Proposition A.1 (ii)). L'isotropie de $\mathfrak{d}'$ montre que R'_1 est égal à R_1^*, ce qui montre que (A.9) et (A.10) sont vérifiées. Ceci prouve (i).

Prouvons (ii). La discussion précédente montre que les opérateurs satisfaisant (A.10) sont en correspondance bijective avec les sous-espaces lagrangiens supplémentaires de la diagonale définis par le membre de droite de (A.9). Tenant compte de (A.10), on voit que la condition (A.11) équivaut à

$$(R_1(H_\alpha - H_{A'\alpha}), -R_1^*(H_\alpha - H_{A'\alpha})) = (H_\alpha, H_{A'\alpha}), \qquad \alpha \in \Gamma'_+.$$

Ceci équivaut à dire que le sous-espace lagrangien correspondant contient $\mathfrak{f}'$. Comme $\mathfrak{f}'$ est lagrangien dans l'orthogonal de $\mathfrak{a}'$, qui est un sous-espace de $\mathfrak{j}_0$ supplémentaire de $\mathfrak{a}'$, tout élément d'un sous-espace lagrangien $\mathfrak{d}'$ de $\mathfrak{j}_0$ contenant $\mathfrak{f}'$ est la somme d'un élément de $\mathfrak{f}'$ et d'un élément de $\mathfrak{a}'$. Donc $\mathfrak{d}' = \mathfrak{f}' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$, où $\mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}$ est un sous-espace lagrangien de $\mathfrak{a}'$. La partie de (ii) sur les opérateurs en résulte.

Maintenant, la condition (A.11) jointe à la condition (A.10) équivaut à la condition

$$R_1^*(H_\alpha) + R_1(H_{A'\alpha}) = 0, \qquad \alpha \in \Gamma'_+. \tag{A.14}$$

Alors la partie sur les r-matrices est immédiate puisque (A.12) est la reformulation de (A.10) et que (A.13) est la reformulation de (A.14), compte tenu du fait que, d'après les propriétés de A' (cf. Définition 5.2, équation (3.15)),

$$K_1(H_{A'\alpha}, H_{A'\alpha}) = K_1(H_\alpha, H_\alpha), \qquad \alpha \in \Gamma'_+.$$

∎

Il résulte immédiatement de ce Lemme que la correspondance qui associe à une donnée de Belavin–Drinfeld diagonale, $(A, A', \mathfrak{i}_\mathfrak{a}, \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'})$, le triplet, admissible au sens de [BD, paragraphe 6.1], $(\Gamma'_+, \Gamma'_-, A')$ et d'un élément r_1 de $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$ défini ci dessus est une bijection entre l' ensemble des données de Belavin–Drinfeld diagonales et les paires formées d'un triplet admissible au sens de [BD, paragraphe 6.1], $(\Gamma'_+, \Gamma'_-, A')$, et d'un élément r_1 de $\mathfrak{j}_1 \otimes \mathfrak{j}_1$ vérifiant (A.12) et (A.13). A une telle paire, Belavin et Drinfeld ([BD, Thèorème 6.1]) associent une r-matrice factorisable, dépendant du choix de $\mathscr{W}_1$, que nous allons décrire. On va décrire l'opérateur factorisable correspondant. On note R_1 l'endomorphisme de $\mathfrak{j}_1$ correspondant à r_1.

On note encore A' l'extension par $\mathbb{R}$-linéarité de A' à l' ensemble R'_+ des racines de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$ qui sont des combinaisons linéaires d'éléments de Γ'_+.

On note $\mathfrak{m}'_+$ l'algèbre de Lie engendrée par les sous-espaces radiciels correspondants à des éléments de R'_+. On définit $\mathfrak{m}'_-$ de facon similaire.

On rappelle que τ' est le morphisme d'algèbres de Lie, de $\mathfrak{m}'_+$ vers $\mathfrak{m}'_-$, caractérisé par

$$\tau'(X_\alpha) = X_{A'\alpha}, \quad \tau'(Y_\alpha) = Y_{A'\alpha}, \qquad \alpha \in \Gamma'_+. \tag{A.15}$$

On définit un ordre sur l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$, défini par $\alpha \preceq \beta$ s'il existe $k \geq 0$ tel que $\beta = A'^k(\alpha)$, où, par convention A^0, est l'identité sur l'ensemble de toutes les racines.

On peut choisir, pour toute racine de $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$, α, un éléments E_α de $\mathfrak{g}_1^\alpha$ de sorte que

$$K(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1 \tag{A.16}$$

$$\tau'(E_\alpha) = E_{A'\alpha}, \qquad \alpha \in R'_+. \tag{A.17}$$

Pour cela on commence par choisir les E_α pour les éléments α minimaux pour $\preceq$. On remarque que (A.16) implique que E^*_α est égal à 1 sur $E_{-\alpha}$ et nul sur tous les sous-espaces radiciels sous $\mathfrak{j}_1$ distinct de $\mathfrak{g}_1^\alpha$. Alors le Théorème 6.1 de [BD] se reformule comme suit, en termes d'opérateurs factorisables (on a échangé le role des racines positives avec les racines négatives dans notre reformulation).

L' endomorphisme $R = R_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1}$ de $\mathfrak{g}_1$ défini par:

$$R_{|\mathfrak{j}_1} = R_1 \tag{A.18}$$

$$RE_\alpha = -\sum_{\beta \prec \alpha} E_\beta,\ RE_{-\alpha} = \sum_{\alpha \preceq \beta} E_{-\beta},\ \alpha \text{ racine positive de } \mathfrak{j}_1 \text{ dans } \mathfrak{g}_1 \tag{A.19}$$

est un opérateur factorisable et tout opérateur factorisable est de cette forme, pour un choix convenable de $\mathfrak{j}_1$ et $\mathscr{W}_1$.

PROPOSITION 3. *Le triple de Manin, dit de Belavin–Drinfeld, $\mathscr{T}_R$, associé par la Proposition 1 à l'opérateur factorisable $R = R_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1}$ et le triple $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1}$, défini dans la Proposition 8 du corps de l'article, coincident.*

Démonstration. On note $\mathscr{T}_R = (B, diag\ \mathfrak{g}_1, \mathfrak{i}'_R)$ et $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1} = (B, diag\ \mathfrak{g}_1, \mathfrak{i}')$. Il faut voir que $\mathfrak{i}'_R$ est égal à $\mathfrak{i}'$. Pour des raisons de dimension, il suffira de prouver que $\mathfrak{i}'_R$ est contenu dans $\mathfrak{i}'$. Rappelons que $\mathfrak{i}'_R = \{(RX, -R^*X) \mid X \in \mathfrak{g}_1\}$. D'abord, d' aprés la définition de R et R_1, on a

$$\{(RX, -R^*X), X \in \mathfrak{j}_1\} = \mathfrak{k}' + \mathfrak{i}_{\mathfrak{a}'}.$$

Puis on a, pour α racine positive $\mathfrak{j}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$, en tenant compte de (A.19) et du fait que $R + R^* = id_{\mathfrak{g}_1}$,

$$(RE_\alpha, -R^*E_\alpha) = \Big(-\sum_{\beta \prec \alpha} E_\beta, -\sum_{\beta \preceq \alpha} E_\beta\Big).$$

S'il n'existe pas de racine strictement plus petite que α pour $\preceq$, α n'est pas élément de Γ'_- et $(RE_\alpha, -R^*E_\alpha)$ est égal à $(0, E_\alpha)$. Mais avec les choix de signes, $(0, E_\alpha)$ est élément du radical nilpotent de $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{m}'$ (cf. ci dessus et Proposition 8 de l'article). Sinon, on note γ la plus petite racine parmi celles qui sont plus petites que α, pour $\preceq$, dont on vérifie sans peine qu'elle existe. Alors γ n'est pas élément de Γ'_- et $(0, E_\gamma)$ est élément de $\mathfrak{n}'$. En outre un calcul immédiat montre que

$$(RE_\alpha, -R^*E_\alpha) = \big(RE_\alpha, \tau'(RE_\alpha)\big) + \big(0, E_\gamma\big)$$

qui est donc la somme de 2 éléments de $\mathfrak{i}'$, donc est aussie élément de $\mathfrak{i}'$, comme désiré. On démontre de même que $(RE_{-\alpha}, -R^*E_{-\alpha})$ est un élément de $\mathfrak{i}'$. Ceci prouve l'inclusion cherchée et achève de prouver la Proposition. ∎

Remarque 5. Comme $\mathscr{T}_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1}$ dépend pas du choix des E_α, la Proposition montre qu'il en va de même de $\mathscr{T}_R$, donc de $R = R_{\mathscr{B}\mathscr{D},\mathscr{W}_1}$, d'après la Proposition 1 de l'Appendice.