Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
Journal of Functional Analysis 217 (2004) 314–346
JOURNAL OF Functional Analysis
http://www.elsevier.com/locate/jfa

Filtration de certains espaces de fonctions sur un espace symétrique réductif

P. Delorme[a] and S. Souaifi[b,*,1]

[a] Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 du C.N.R.S, Université de la Méditerranée, 163, avenue de Luminy - Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France
[b] IRMA-UFR de Mathématique et d'Informatique de Strasbourg, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Received 3 December 2003; revised 20 February 2004; accepted 20 February 2004

Communicated by M. Vergne

Abstract

We introduce a filtration of a $(\mathfrak{g}, K)$-module of some space of functions on a reductive symmetric space G/H, and compute the associated grading as a direct sum of induced representations. As an application of this result to the reductive groups viewed as symmetric spaces, we are able to realize any Harish-Chandra module as a subquotient of a direct sum of induced representations from parabolic subgroups, the inducing representations being trivial on the unipotent radical.

Keywords: Reductive symmetric spaces; Invariant differential operators; Eigenfunctions; Generalized principal series; Harish-Chandra modules; Sub-quotient theorem

Introduction

Let G be a real reductive Lie group in the Harish-Chandra class, and H an open subgroup of the fixed point group for an involution σ of G. We fix a Cartan involution θ of G commuting with σ. We denote by K the group of fixed points for θ. Let $\mathbb{D}(G/H)$ be the algebra of left G-invariant differential operators on G/H. Let $\mathscr{A}(G/H)$ be the space of K-finite $\mathbb{D}(G/H)$-finite smooth functions on G/H. This

*Corresponding author. Fax: 33-390-2403-28.
E-mail addresses: delorme@iml.univ-mrs.fr (P. Delorme), souaifi@math.u-strasbg.fr (S. Souaifi).
[1] Partially supported by the N.W.O (Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek), The Netherlands.

0022-1236/$ - see front matter
doi:10.1016/j.jfa.2004.02.006

space carries a natural structure of $(\mathfrak{g}, K)$-module induced by the left regular representation. This means that $\mathscr{A}(G/H)$ is a $\mathfrak{g}$ and K-module with compatible actions of $\mathfrak{g}$ and K such that each element is K-finite. For a fixed character χ of $\mathbb{D}(G/H)$, let $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$ be the $(\mathfrak{g}, K)$-submodule of $\mathscr{A}(G/H)$ of elements annihilated by some power of the kernel of χ.

We introduce a filtration of this $(\mathfrak{g}, K)$-submodule, and compute the associated grading as a direct sum of induced representations. This is the version for real reductive symmetric spaces of a result established in [12] for reductive p-adic groups. However the main techniques for the proof are coming from [18], whose influence on [12] is obvious.

As an application of this result to the reductive groups viewed as symmetric spaces, we are able (cf. Theorem 3) to realize any Harish-Chandra module as a subquotient of a direct sum of some successive derivatives of (compact realization of) generalized principal series with respect to standard parabolic subgroups (see Appendix A for a definition and some properties on successive derivatives). If $P = MAN$ is the Langlands decomposition of such a parabolic subgroup, the successive derivatives of (compact realization of) generalized principal series are in particular induced representations from representations π of P trivial on N. Each π is, as a representation of MA, the tensor product of an irreducible representation of M and of a finite dimensional representation of A, whose all irreducible subquotients are equivalent. The interest here is that we induce from representation which are trivial on N.

For a suitable class of reductive groups, including connected linear ones, we show that it is possible, in the above result, to choose the successive derivatives of generalized principal series such that their minimal K-types are of length greater or equal to the length of the minimal K-types of the original module. Notice that this result is used by the first author in a new proof of the Arthur's Paley-Wiener Theorem (cf. [13]).

We describe in the sequel the results on the filtration in more details.

Let $\mathfrak{a}_\emptyset$ be a fixed maximal abelian subspace in the intersection of the -1-eigenspaces for the differential of σ and θ in $\mathfrak{g}$. Let $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ be the set of $\sigma\theta$-stable parabolic subgroups of G, whose Lie algebra contains $\mathfrak{a}_\emptyset$, containing a given minimal parabolic subgroup of the group $G^{\sigma\theta}$ of fixed points for $\sigma\theta$.

We first describe the $(\mathfrak{g}, K)$-submodule $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)$ of $\mathscr{A}(G/H)$ consisting of its tempered elements.

Let $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ and $P = MAN$ its Langlands σ-decomposition, δ an element of the unitary dual $\widehat{M}$ of M and $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ (where $\mathfrak{a}^*$ is the dual vector space of $\mathfrak{a}$). We define $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda)$ to be the set of linear combinations of (higher order partial) derivatives of normalized "Eisenstein integrals" for the generalized principal series $(I^P_{\delta,\nu})_{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}}$ at λ. Normalized "Eisenstein integrals" are particular K-finite and right H-invariant matrix coefficients of $(I^P_{\delta,\nu})_{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}}$ meromorphic as functions of $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, regular on $i\mathfrak{a}^*$. Any simple subquotient of $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda)$ is a $(\mathfrak{g}, K)$-submodule of the semisimple G-module $I^P_{\delta,\lambda}$.

Let $\mathbb{F}$ be a suitable choice of representatives of σ-association classes of $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ used here to describe the decomposition of $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)$. We obtain the following (cf. Theorem 1):

$$\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H) = \oplus \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda),$$

where the direct sum is taken over a set of representatives of the conjugacy classes of the pairs $(\delta, \lambda) \in \widehat{M} \times i\mathfrak{a}^*$, *for* $P = MAN$ *ranging over* $\mathbb{F}$.

The fact that the left-hand side is contained in the right-hand side comes essentially from [18]. And the sum is direct according to the description of the Fourier transform of the Schwartz space on G/H (see [11]).

We now introduce a filtration $\mathscr{F}_\chi$ of $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$ by use of the theory of asymptotic expansions (see [22] and also [3]) using projections on convex cones, following an idea due to J. Franke for automorphic forms (cf. [14] and also [21]).

Let $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ and $P = MAN$ its Langlands σ-decomposition. For $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, denote by λ_P the projection on the closed convex cone $\overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$ of P-dominant elements in $\mathfrak{a}^*$. Let $\mathscr{E}_\chi$ be the set of pairs (P, ξ) with $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ and ξ a leading asymptotic exponent along P for at least one element in $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$. This set is finite since there is a finite number of leading asymptotic exponents yielded by elements of $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$. We define $\mathscr{E}_\chi^{n+1}$ by induction on n as the set of elements (P, ξ) in $\mathscr{E}_\chi \backslash \bigcup_{k=0}^n \mathscr{E}_\chi^k$ for which $\operatorname{Re} \xi_P$ has minimal length. Let a_n denote the common length $||\operatorname{Re} \xi_P||$ for any $(P, \xi) \in \mathscr{E}_\chi^n$.

The filtration $\mathscr{F}_\chi$ is the finite ascending chain of $(\mathfrak{g}, K)$-submodules $\mathscr{F}_\chi^n$, each defined as the set of elements whose leading asymptotic exponents ξ along P are such that $(P, \xi) \in \bigcup_{k=0}^n \mathscr{E}_\chi^k$, P ranging over $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$. The associated grading satisfies the following (cf. Theorem 2):

The subquotient $\mathscr{F}_\chi^n / \mathscr{F}_\chi^{n-1}$ *is isomorphic to the direct sum* $\mathscr{G}_\chi^n$ *of the induced* $(\mathfrak{g}, K)$-*modules* $I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H)_{(\omega)} \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^\xi)$. *The sum is taken over* $P = MAN \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$, ω *character of* $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ *and* $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (*both depending on* χ) *with* $\operatorname{Re} \xi$ *strictly* P-*dominant and* $||\operatorname{Re} \xi|| = a_n$.

Here, if V is a suitable $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-module, extended trivially to $\mathfrak{n}$, $I^P(V)$ denotes the induced $(\mathfrak{g}, K)$-module. Also the symmetric algebra $S(\mathfrak{a}^*)$ of the complexified Lie algebra $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ and $\mathbb{C}e^\xi$ are both viewed as $(\mathfrak{l}, K \cap L)$-modules, $\mathfrak{l}$ and $K \cap L$ acting by left translations.

Let us say something about the proof. We construct a homomorphism of $(\mathfrak{g}, K)$-modules from $\mathscr{F}_\chi^n$ into $\mathscr{G}_\chi^n$, with kernel equal to $\mathscr{F}_\chi^{n-1}$ by construction. It remains to show the surjectivity. This is done by using the "K-finite version" of the crucial Proposition 8.0.1 in [18].

Then the proof of the "subquotient theorem" for general Harish-Chandra modules (cf. Theorem 3) is easily deduced from the case where the module is cyclic and generated by a $K \times K$-finite function on G, annihilated by a power of a maximal ideal of the center of the enveloping algebra of the complexification of $\mathfrak{g}$. The space of such functions is a particular case of the spaces previously studied, when one views the group as a symmetric space for $G \times G$. The proof is made by an induction on the level of the filtration in which this function is contained, and using the previous results.

1. Notations

Si E est un espace vectoriel, on note Id_E l'application identique de E, E^* son dual. S'il est réel, $E_{\mathbb{C}}$ désigne son complexifié et $S(E)$ l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$. Le symbolé indiquera soit le dual topologique d'un espace vectoriel topologique, soit l'application transposée d'une application linéaire continue, soit la contraposée d'une représentation.

Si S est un groupe de Lie réel, e ou e_S désigne son élément neutre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}, Z(\mathfrak{s})$ le centre de $U(\mathfrak{s})$, $\widehat{S}$ son dual unitaire.

Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe d'Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ. Soit $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de la différentielle de θ (resp. σ), notée encore de même, pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note L_P ou L son sous-groupe de Levi stable par θ, i.e. $L = \theta(L), N_P$ son radical unipotent et $P = M_P A_P N_P$ sa σ-décomposition de Langlands, i.e., si $P = M_0 A_0 N_0$ est la décomposition de Langlands de P, on pose $M := M_0(A_0 \cap H)$ et $A := \{x \in A_0 |\, \sigma(x) = x^{-1}\}$. En particulier on note $G = M_G A_G$ la σ-décomposition de Langlands de G. Ici A_G est le sous-groupe de la composante déployée du centre de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a) = a^{-1}$. On l'appelle composante σ-déployée de G. Clairement, si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de $G, (L, \sigma_{|L}, \theta_{|L}, H \cap L)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H), et de même pour M. Toutes les notations introduites pour (G, σ, θ, H) sont étendues aux quadruplets vérifiants les mêmes hypothèses.

On dispose d'une application H_G de G/H dans $\mathfrak{a}_G$ qui, à gH, associe $\log a \in \mathfrak{a}_G$ où $g = ma$ avec $m \in M_G, a \in A_G$. Notez que H est contenu dans M_G. De plus, on a:

$$\begin{aligned} &(M_G/H) \times \mathfrak{a}_G \text{ est difféomorphe à } G/H \text{ par l'application} \\ &\qquad (x, X) \mapsto (\exp X)x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

On se fixe dans toute la suite de l'article un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_\emptyset$ de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$. On note $L_\emptyset$ le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_\emptyset$. C'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal. Il admet pour σ-décomposition de Langlands $L_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset$ où $A_\emptyset = \exp \mathfrak{a}_\emptyset$. On a $G = K L_\emptyset H$.

Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $L_\emptyset$. Alors $L_\emptyset$ est contenu dans $L (= L_P)$ et A_L est contenu dans $A_\emptyset$. On note Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$. On appelle σ-sous-groupe de Levi de G, toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $L_\emptyset$. On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des σ-sous-groupes de Levi de G. Si $L\in\mathscr{L}$, on note $\mathscr{P}^L$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta_{|L}$-stables de L. Si $L=G$, on notera $\mathscr{P}$ au lieu de $\mathscr{P}^G$. On notera $\mathscr{P}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de sous-groupe de Levi $L=MA$.

On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans K par son centralisateur. Soit $W_\emptyset^H$ (resp. $W_\emptyset^M$) l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ admettant un représentant dans l'intersection de H (resp. M) avec $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On fixe dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ un ensemble $\mathscr{W}_M$ (noté aussi $\mathscr{W}_L$) de représentants des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes. C'est, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G de sous-groupe de Levi L, un ensemble de représentants des (H,Q)-doubles classes ouvertes de G.

On se fixe dans toute la suite de l'article un ensemble de racines positives, $\Sigma_{\sigma\theta}$, du système de racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\sigma\theta}$, formée des points fixes pour $\sigma\theta$. Soient $L\in\mathscr{L}$ et $P_\emptyset$ un élément minimal dans $\mathscr{P}^L$. On dit que $P_\emptyset$ est standard si l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset\cap\mathfrak{l}$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$ contient les éléments de $\Sigma_{\sigma\theta}$ nuls sur $\mathfrak{a}_L$. On note $\mathscr{P}^L_{\mathrm{st}}$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}^L$ formé des P contenant un tel $P_\emptyset$. Si $L=G$, on notera $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ au lieu de $\mathscr{P}^G_{\mathrm{st}}$.

On dit que deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, P et Q, sont σ-associés si $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_Q$ sont conjugués par un élément de K. On choisit un ensemble $\mathbb{F}$ de représentants des classes de σ-association de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables, qui soit contenu dans $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ (cf. [7, Lemme 8]).

On se fixe une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad}\,G$-invariante, telle que la forme quadratique sur $\mathfrak{g}, X\mapsto ||X||^2 := -B(X,\theta X)$, soit définie positive et on note $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire que l'on définit sur $\mathfrak{g}$, sur ses sous-espaces vectoriels et leurs duaux. On suppose en outre que B est invariante par σ et θ, coïncide avec la forme de Killing sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et que le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est orthogonal à $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Si $L\in\mathscr{L}$, on notera $\mathfrak{a}_L^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_L$ pour B. Si $P\in\mathscr{P}$, soit $\rho_P\in\mathfrak{a}_\emptyset^*$ la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$, comptées avec leurs multiplicités. On dit que $X\in\mathfrak{a}_P$ (resp. $\lambda\in\mathfrak{a}_P^*$) est strictement P-dominant si $\alpha(X)$ (resp. (λ,α)) est strictement positif pour tout $\alpha\in\Sigma_P$.

Soit (τ, V_τ) une représentation unitaire de dimension finie de K. Si $L\in\mathscr{L}$ (resp. $P\in\mathscr{P}$), on notera τ_L, ou τ_M si $L=MA$ est sa σ-décomposition de Langlands, (resp. $\tau_{|P}$) la restriction de τ à $L\cap K$ (resp. $P\cap K$).

On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par les translations àgauche par les éléments de G.

Soit $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)$ (resp. $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$) l'espace des fonctions C^∞, K-finies à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. τ-sphériques) sur G/H, qui sont $\mathbb{D}(G/H)$-finies et tempérées (cf. [10, Eq. (5.1)]).

On choisit un sous-espace $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ stable sous σ et θ, abélien maximal dans $\mathfrak{s}^d := i(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q})\oplus(\mathfrak{s}\cap\mathfrak{q})$, contenant $\mathfrak{a}_\emptyset$. On note $W(\mathfrak{a}^d)$ le groupe formé des restrictions à $\mathfrak{a}^d$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ préservant $\mathfrak{a}^d$. On note $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra entre $\mathbb{D}(G/H)$ et l'algèbre $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$ des invariants sous $W(\mathfrak{a}^d)$ de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a}^d)$ de $\mathfrak{a}^d_\mathbb{C}$ (cf. [1, Eq. (18)]). Si $\Lambda\in(\mathfrak{a}^d)^*_\mathbb{C}$, on note χ_Λ le caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ défini par:

$$\chi_\Lambda(D) = (\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))(\Lambda), \quad D \in \mathbb{D}(G/H).$$

On note avec l'indice supérieur L les objets obtenus en remplaçant G par $L = MA \in \mathscr{L}$. Notons $\mathfrak{a}^{d,M}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}^d$ et $W^M(\mathfrak{a}^d)$ le groupe des restrictions à $\mathfrak{a}^{d,M}$ des éléments de $W^L(\mathfrak{a}^d)$. Alors on dispose également de l'isomorphisme d'Harish-Chandra, $\gamma^M_{\mathfrak{a}^d}$, entre $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ et $S(\mathfrak{a}^{d,M})^{W^M(\mathfrak{a}^d)}$. On définit de même χ^M_Λ, $\Lambda \in (\mathfrak{a}^{d,M})^*_{\mathbb{C}}$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note χ^A_λ le caractère de $S(\mathfrak{a})$ donné par l'évaluation en λ. Alors on a un isomorphisme naturel de $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ avec $\mathbb{D}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a})$, où $S(\mathfrak{a})$ agit par représentation régulière droite, (cf. [1, Eq. (19)]) et, dans cet isomorphisme, on a:

$$\chi^L_{\Lambda+\lambda} = \chi^M_\Lambda \otimes \chi^A_\lambda, \quad \Lambda \in (\mathfrak{a}^{d,M})^*_{\mathbb{C}}, \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}. \tag{1.2}$$

Enfin, si χ est un caractère de $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ de la forme $\chi^L_\lambda, \lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, on note $\widetilde{\chi}$ le caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ égal à χ_λ.

Pour χ caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ et V un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $C^\infty(G/H)$, stable par $\mathbb{D}(G/H)$, on note $V_{(\chi)}$ l'ensemble des $f \in V$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant:

$$(D - \chi(D))^n f = 0, \quad D \in \mathbb{D}(G/H).$$

Alors $V_{(\chi)}$ est sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de V.

2. Description de $\mathscr{A}_{\mathbf{temp}}(G/H)$

2.1. "Intégrales d'Eisenstein"

Soit $L = MA$ la σ-décomposition de Langlands d'un élément L de $\mathscr{L}, P$ un élément de $\mathscr{P}$ de composante de Levi $L, (\delta, V_\delta)$ un élément du dual unitaire de M, et λ un élément de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On note $(\pi^P_{\delta,\lambda}, I^P_{\delta,\lambda})$ la série principale généralisée correspondante. Ici $I^P_{\delta,\lambda}$ est l'espace des fonctions $C^\infty, \varphi : G \to V^\infty_\delta$, vérifiant $\varphi(gman) = a^{-\lambda-\rho_P}\delta(m^{-1})\varphi(g), g \in G, m \in M, a \in A, n \in N$, et le groupe G agit par représentation régulière gauche. La restriction des fonctions à K induit un isomorphisme de $I^P_{\delta,\lambda}$ sur l'espace noté $C^\infty(K, \delta)$, ou I_δ, des fonctions $C^\infty, \varphi : K \to V^\infty_\delta$, vérifiant $\varphi(km) = \delta(m^{-1})\varphi(k),\ k \in K,\ m \in K \cap M$. On note $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}$ la représentation de G dans I_δ déduite de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ par transport de structure. Soit w un élément de $\mathscr{W}_M$. On note $\mathscr{V}(\delta, w) \coloneqq (V^{-\infty}_\delta)^{M \cap w^{-1}Hw}_{\mathrm{disc}}$, où le second membre désigne l'espace des vecteurs distributions η de (δ, V_δ), invariants par $M \cap w^{-1}Hw$ et tels que, pour tout $v \in V_\delta$, la fonction $m \mapsto \langle \delta'(m)\eta, v \rangle$ soit de carré intégrable sur $M/M \cap w^{-1}Hw$. Le produit scalaire L^2 permet de définir un produit scalaire naturel sur cet espace (cf. [7, Eq. (1.6)]). On note $\mathscr{V}(\delta)$ la somme directe orthogonale des $\mathscr{V}(\delta, w)$ pour $w \in \mathscr{W}_M$.

On note $\mathscr{A}_2(M/M\cap w^{-1}Hw)^{\delta}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions sur $M/M\cap w^{-1}Hw$ de la forme $m\mapsto\langle\delta'(m)\eta,v\rangle, \eta\in\mathscr{V}(\delta,w), v\in(V_\delta)_{(K)}$.

On suppose que $\mathrm{Re}(\lambda-\rho_P)$ est strictement P-dominant. Soit $\eta\in\mathscr{V}(\delta)$. On dispose d'une fonction continue sur G à valeurs dans $V_{\bar\delta}^{-\infty}$, $j(P,\delta,\lambda,\eta)$, H-invariante à gauche valant η_w pour $w\in\mathscr{W}_P$ et se transformant par $a^{\lambda-\rho_P}\delta'(m^{-1})$ par translation à droite par $man, m\in M, a\in A, n\in N_P$. Ces propriétés sont caractéristiques de cette fonction qui détermine un vecteur distribution H-invariant de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ (cf. [6, Eq. (2.4.6) et Proposition 2]). On notera $\bar{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ la forme linéaire continue correspondante sur $C^\infty(K,\delta)$. L'application $\lambda\mapsto\bar{j}(P,\delta,\lambda,\eta)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans le dual topologique de $C^\infty(K,\delta)=I_\delta$, qu'on note de même (cf. [6, Théorème 3]).

Pour φ élément de $C^\infty(K,\delta)$, on définit les "intégrales d'Eisenstein" en posant:

$$E(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)(gH) := \langle(\bar\pi^P_{\delta,\lambda})'(g)\bar{j}(P,\delta,\lambda,\eta),\varphi\rangle,\quad \eta\in\mathscr{V}(\delta),\ g\in G. \tag{2.1}$$

Soit Q un autre élément de $\mathscr{P}(L)$. On note $\lambda\mapsto A(P,Q,\delta,\lambda)$ le prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacement qui envoient $I^Q_{\delta,\lambda}$ dans $I^P_{\delta,\lambda}$. On note $\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)$ l'opérateur correspondant dans la réalisation compacte. Alors $\lambda\mapsto B(P,Q,\delta,\lambda)$ est l'application méromorphe de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans l'espace des endomorphismes de $\mathscr{V}(\delta)$ telle que l'on ait l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (cf. [9, Théorème 2]):

$$A'(P,Q,\delta,\lambda)j(P,\delta,\lambda,\eta)=j(Q,\delta,\lambda,B(Q,P,\delta,\lambda)\eta). \tag{2.2}$$

Par ailleurs, il existe (cf. [15, Lemme 13.1 et Théorème 25.1]; voir aussi [23, Théorème 10.5.8] et [7, après Eq. (3.10)] pour une autre démonstration) une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, non identiquement nulle, holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*, \mu_P(\delta,\lambda)$, telle que l'on ait l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$\bar{A}(P,\bar{P},\delta,\lambda)\bar{A}(\bar{P},P,\delta,\lambda)=\mu_P(\delta,\lambda)^{-1}\mathrm{Id}_{C^\infty(K,\delta)}. \tag{2.3}$$

Ici $\bar{P}$ désigne le sous-groupe parabolique opposé à P. En outre $\mu_P(\delta,\lambda)$ est holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ et positive ou nulle sur $i\mathfrak{a}^*$.

On définit les vecteurs distributions H-invariants normalisés (cf. [7, Eq. (3.13)]):

$$j^0(P,\delta,\lambda,\eta) := (\bar{A}(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1})'j(P,\delta,\lambda,\eta). \tag{2.4}$$

On définit les "intégrales d'Eisenstein" normalisées, $E^0(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)$, en changeant j en j^0 dans la définition des "intégrales d'Eisenstein" (cf. [6, Eq. (3.4)]). Ce sont des fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et holomorphes sur $\mathfrak{a}^*\varepsilon := \{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \,||\mathrm{Re}\,\lambda||<\varepsilon\}$, pour un $\epsilon>0$ (cf. [7, Proposition 8(i)]).

On note $\mathscr{C}(G/H)$ l'espace de Schwartz de G/H (voir par exemple [10, Eq. (5.3)]). Soient $f\in\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ et $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$. Il existe un unique vecteur $(\mathscr{F}^0_P f)(\delta,\lambda)$ de

$(I_\delta)_{(K)} \otimes \mathscr{V}(\delta)$ (cf. [7, Proposition 8(ii)]) tel que:

$$((\mathscr{F}_P^0 f)(\delta,\lambda), \varphi\otimes\eta) = \int_{G/H} f(x) \quad \overline{E^0(P,\delta,\lambda,\eta,\varphi)(x)}\, dx, \qquad \varphi \in (I_\delta)_{(K)},\ \eta\in\mathscr{V}(\delta). \tag{2.5}$$

On définit l'espace:

$$\mathscr{S}_P^1 = \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\left(\bigoplus_{\delta\in\widehat{M}}((I_\delta)_{(K)}\otimes\mathscr{V}(\delta))\right) \tag{2.6}$$

sur lequel K agit par représentation régulière gauche sur le premier facteur de chaque terme de la somme (i.e. sur $(I_\delta)_{(K)}$).

On dispose d'une représentation U_P de $W(\mathfrak{a})$ sur $\mathscr{S}_P^1$ (cf. [11, Eq. (3.25)]), qui possède la propriété suivante:

Si $\delta\in\widehat{M}, \lambda\in i\mathfrak{a}^*$ et $s\in W(\mathfrak{a})$, on note $\delta_1 = \delta^{s^{-1}}, \lambda_1 = s^{-1}\lambda$. Alors il existe une application linéaire:

$$T_{P,\delta,\lambda,s} : (I_{\delta_1})_{(K)}\otimes\mathscr{V}(\delta_1)\to(I_\delta)_{(K)}\otimes\mathscr{V}(\delta)$$

telle que:

$$(U_P(s)\Psi)(\delta,\lambda) = T_{P,\delta,\lambda,s}(\Psi(\delta_1,\lambda_1)), \quad \Psi\in\mathscr{S}_P^1. \tag{2.7}$$

On note $\mathscr{S}_P^0$ l'espace des invariants de $\mathscr{S}_P^1$ sous U_P. Alors (cf. [11, Théorème 3(ii)]): $\mathscr{F}_P^0 f\in\mathscr{S}_P^0$ pour tout $f\in\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ et l'application

$$\mathscr{F}^0 : \mathscr{C}(G/H)_{(K)} \to \bigoplus_{P\in\mathbb{F}} \mathscr{S}_P^0, \tag{2.8}$$

donné par $\mathscr{F}^0 f = (\mathscr{F}_P^0 f)_{P\in\mathbb{F}}$, est une bijection.

2.2.

Avec les notations de a Section 2.1, on suppose $P\in\mathbb{F}$. Si $\delta\in\widehat{M}$ et $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$, on note $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions de la forme $\partial(u)(E^0(P,\delta,\nu,\eta,\varphi))_{|\nu=\lambda}$, où $u\in S(\mathfrak{a}^*), \eta\in\mathscr{V}(\delta)$ et $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$. Ici $\partial(u)$ est l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ naturellement associé à $u\in S(\mathfrak{a}^*)$.

Lemme 1.

(i) *L'espace* $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda)$ *est un sous-*$(\mathfrak{g},K)$*-module de* $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)$.

(ii) *Si* (δ,λ) *et* $(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})$ *sont conjugués sous* G, *on a*:

$$\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda) = \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tilde{\delta},\tilde{\lambda}).$$

(iii) *Tout sous-quotient simple de* $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda)$ *est sous-module du G-module semi-simple* $I^P_{\delta,\lambda}$.

Démonstration. (i) Les actions de $U(\mathfrak{g})$ et K commutent aux opérateurs $\partial(u)$. Donc $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda)$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $\mathscr{A}(G/H)$. Il faut démontrer que les fonctions considérées sont tempérées. D'après [7, Proposition 8(i)], $v \mapsto E^0(P, \delta, v, \eta, \varphi)$ est une fonction $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$, donc en particulier $\mathrm{II}_{\mathrm{hol}}$. Le résultat voulu résulte des propriétés des fonctions $\mathrm{II}_{\mathrm{hol}}$ (cf. [2, Lemme 2]).

(ii) Soit w un élément normalisant L et conjuguant (δ, λ) et $(\tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$, ce qui implique que w normalise M et A. Les opérateurs $A_P(w, \delta, v)$ définis dans [17, Eq. (1.9)], entrelacent, lorsqu'ils sont définis, $I^P_{\delta,v}$ et $I^P_{\tilde{\delta},v^w}$. Ces opérateurs sont liés simplement aux opérateurs $A(P^{w^{-1}}, P, \delta, v)$ (cf. [17]). La multiplication par une fonction scalaire convenable permet de définir les opérateurs d'entrelacement normalisés $A^0_P(w, \delta, v)$ et leurs réalisations compactes $\overline{A^0_P}(w, \delta, v)$, qui forment une famille C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$ (cf. [17, Section 8]). Plus précisément, pour tout $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}, v \mapsto \overline{A^0_P}(w, \delta, v)\varphi$ est C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$. De plus, $A^0_P(w, \delta, v)$ est bijectif pour tout $v \in i\mathfrak{a}^*$. Le lien de $A^0_P(w, \delta, v)$ avec les opérateurs normalisés $A^0(P^{w^{-1}}, P, \delta, v)$, la définition de j^0 (cf. Eq. (2.4)) et la définition des matrices B (cf. Eq. (2.2)) montrent qu'il existe une famille méromorphe d'endomorphismes de $\mathscr{V}(\tilde{\delta})$ dans $\mathscr{V}(\delta)$, $(B(v))_{v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}}$, telle que:

$$(A^0_P(w, \delta, v))' j^0(P, \tilde{\delta}, v^w, \tilde{\eta}) = j^0(P, \delta, v, B(v)\tilde{\eta}).$$

Mais le membre de gauche est C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$ (cf. [6, Lemme 7]). Comme $B(v)\tilde{\eta}$ est obtenu par évaluation en certains points de G, on conclut grâce à la Proposition 3(ii) de [6] que $B(v)$ est C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$. Les opérateurs $A^0_P(w, \delta, v)$ étant inversibles pour $v \in i\mathfrak{a}^*$, on voit que $B(v)$ est inversible. Ceci permet d'écrire les éléments de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, v)$ à l'aide de ceux de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tilde{\delta}, \tilde{v})$. Donc $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, v) \subset \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \tilde{\delta}, \tilde{v})$ et (ii) en résulte.

(iii) Soit J un sous-quotient simple du $(\mathfrak{g}, K)$-module $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H, \delta, \lambda)$. C'est donc le quotient d'un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module X. Considérant le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module engendré par un élément Φ ayant une projection non nulle sur J, on peut supposer X cyclique et engendré par Φ. Son générateur étant annulé par un idéal de codimension finie de $Z(\mathfrak{g}), X$ est un module d'Harish-Chandra. Mais, tenant compte de la définition de Φ et de la Remarque A.1, on voit que Φ est une combinaison linéaire de dérivées successives en λ (cf. Appendice A.3 pour la définition) de coefficients de la famille $C^\infty, (\bar{\pi}^P_{\delta,v})_{v \in i\mathfrak{a}^*}$, de représentations C^∞ admissibles (cf. Définition A.1 et Lemme A.1(iv)). C'est donc, grâce à une itération du Lemme A.3, le coefficient d'une somme directe de dérivées successives en λ de $(\bar{\pi}^P_{\delta,v})_{v \in i\mathfrak{a}^*}$. Alors (cf. Lemme A.2), le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module engendré par Φ est un sous-quotient de cette somme. Mais d'après l'Appendice A.1, Lemme A.1(i), les dérivées successives de $(\bar{\pi}^P_{\delta,v})_{v \in i\mathfrak{a}^*}$ en λ admettent une suite de composition dont les sous-quotients sont isomorphes à $\pi^P_{\delta,\lambda}$. Donc les sous-quotients simples de X, en particulier J, sont des sous-quotients de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ qui est semi-simple car unitarisable. $\square$

Théorème 1. *On note Θ l'ensemble des couples $(\delta,\lambda)\in\widehat{M}\times i\mathfrak{a}^*$, où $P=MAN$ décrit $\mathbb{F}$, et on note $\Theta/conj$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison de ces couples. Alors*

$$\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)=\bigoplus_{(\delta,\lambda)\in\Theta/\mathrm{conj}}\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda).$$

Démonstration. Montrons d'abord l'égalité:

$$\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)=\sum_{(\delta,\lambda)\in\Theta}\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda).$$

Tenant compte de la correspondance entre "intégrales d'Eisenstein" et intégrales d'Eisenstein normalisées (cf. [7, Eqs. (8.9), (2.2), (2.9) à (2.13)]), le Théorème 5.1 de [18] implique cette égalité. Tenant compte du Lemme précédent, on voit que:

$$\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H)=\sum_{(\delta,\lambda)\in\Theta/\mathrm{conj}}\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda).$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Raisonnons par l'absurde et supposons:

$$\sum_{(\delta,\lambda)\in I}F_{\delta,\lambda}=0, \tag{2.9}$$

où I est un sous-ensemble fini non vide de Θ/conj, et $F_{\delta,\lambda}\in\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\delta,\lambda)$ non nul pour tout $(\delta,\lambda)\in I$. On note (η_i) une base de $\mathscr{V}(\delta)$ et on écrit :

$$F_{\delta,\lambda}(gH)=\sum_{i,j}\partial(u_{ij})\langle(\bar\pi^P_{\delta,\nu})'\quad(g)\bar{j}^0(P,\delta,\nu,\eta_i),\varphi_{ij}\rangle_{|\nu=\lambda},$$
$$u_{ij}\in S(\mathfrak{a}^*),\ \varphi_{ij}\in(I_\delta)_{(K)}.$$

Soit $f\in\mathscr{C}(G/H)$. Calculons $\int_{G/H}f(x)F_{\delta,\lambda}(x)\,dx$. On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme: les "intégrales d'Eisenstein" normalisées sont des fonctions $\mathrm{II}'_{\mathrm{hol}}$ et le Lemme 2 de [2] fournit les majorations voulues. Donc

$$\int_{G/H}f(x)F_{\delta,\lambda}(x)\,dx=\sum_{i,j}\partial(u_{ij})\left(\int_{G/H}f(gH)\langle(\bar\pi^P_{\delta,\nu})'(g)\bar{j}^0(P,\delta,\nu,\eta_i),\varphi_{ij}\rangle\,dgH\right)_{|\nu=\lambda}.$$

D'après (2.5) et la définition de E^0, on en déduit}

$$\int_{G/H} f(x)F_{\delta,\lambda}(x)\,dx = \sum_{i,j} \partial(u_{ij})\langle(\mathscr{F}^0_P f)(\delta,v),\varphi_{ij}\otimes\eta_i\rangle_{|v=\lambda}.$$

Finalement

$$\int_{G/H} f(x)F_{\delta,\lambda}(x)\,dx = \sum_{i,j} \langle\partial(u_{ij})(\mathscr{F}^0_P f)(\delta,v)_{|v=\lambda},\varphi_{ij}\otimes\eta_i\rangle \tag{2.10}$$

car le produit scalaire est continu.

Comme $F_{\delta,\lambda}\neq 0$, on peut choisir $f\in\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ non nul avec

$$\int_{G/H} f(x)F_{\delta,\lambda}(x)\,dx\neq 0.$$

Soit $W(\mathfrak{a})\delta$ l'orbite de δ sous $W(\mathfrak{a})$. On choisit une fonction réelle C^∞ à support compact sur $W(\mathfrak{a})\delta\times i\mathfrak{a}^*, \Psi$, qui soit $W(\mathfrak{a})$-invariante et égale à 1 au voisinage de (δ,λ). On définit une fonction φ sur l'ensemble des triples $(\tilde{P},\tilde{\delta},\tilde{\lambda})$ où $\tilde{P}=\tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}\in\mathbb{F}, \tilde{\delta}\in(\tilde{M})^\wedge, \tilde{\lambda}\in i\tilde{\mathfrak{a}}^*$ par:

$$\varphi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tilde{P}\neq P \text{ ou si } \tilde{P}=P \text{ et } \tilde{\delta}\notin W(\mathfrak{a})\delta, \\ \Psi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})\mathscr{F}^0_P f(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) & \text{si } \tilde{P}=P \text{ et } \tilde{\delta}\in W(\mathfrak{a})\delta. \end{cases}$$

Montrons que c'est un élément de $\mathscr{S}^0_P$. Toutes les propriétés se vérifient immédiatement excepté les relations:

$$(U_P(s)\varphi)(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) = \varphi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}),\quad s\in W(\mathfrak{a}), \tilde{\delta}\in W(\mathfrak{a})\delta, \tilde{\lambda}\in i\mathfrak{a}^*.$$

Mais d'après (2.7),

$$(U_P(s)\varphi)(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) = T_{P,\tilde{\delta},\tilde{\lambda},s}(\varphi(\tilde{\delta}^{s^{-1}},s^{-1}\tilde{\lambda})).$$

Tenant compte de la définition de φ et de la $W(\mathfrak{a})$-invariance de Ψ, on a

$$\begin{aligned}(U_P(s)\varphi)(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) &= T_{P,\tilde{\delta},\tilde{\lambda},s}\Psi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})\mathscr{F}^0_P f(\tilde{\delta}^{s^{-1}},s^{-1}\tilde{\lambda})\\ &= \Psi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})T_{P,\tilde{\delta},\tilde{\lambda},s}\mathscr{F}^0_P f(\tilde{\delta}^{s^{-1}},s^{-1}\tilde{\lambda}).\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{F}^0_P f\in\mathscr{S}^0_P$, on a finalement:

$$(U_P(s)\varphi)(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) = \Psi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})\mathscr{F}^0_P f(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}) = \varphi(\tilde{\delta},\tilde{\lambda}).$$

On choisit maintenant le support de Ψ assez petit pour que φ soit nulle au voisinage de tout $(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})\in I$ avec $(\tilde{\delta},\tilde{\lambda})\neq(\delta,\lambda)$. Soit f_1 l'élément de $\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ tel que $\mathscr{F}^0 f_1=\varphi$, dont l'existence est assurée par (2.8). Alors la formule (2.10) appliquée à f_1 et f, et le fait que $\varphi(\delta, \nu) = \mathscr{F}_P^0 f(\delta, \nu)$ pour ν voisin de λ, impliquent que:

$$\int_{G/H} f_1(x) F_{\delta,\lambda}(x)\, dx = \int_{G/H} f(x) F_{\delta,\lambda}(x)\, dx \neq 0. \tag{2.11}$$

Comme, pour $(\tilde{\delta}, \tilde{\lambda}) \in I$ distinct de (δ, λ), $(\mathscr{F}_P^0 f_1)(\tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$ est nulle au voisinage de $(\tilde{\delta}, \tilde{\lambda})$, on voit, par un calcul analogue à celui de l'équation (2.10), que:

$$\int_{G/H} f_1(x) F_{\tilde{\delta},\tilde{\lambda}}(x)\, dx = 0.$$

Ceci joint aux équations (2.9) et (2.11) conduit à une contradiction. Ceci achève de prouver que la somme est directe. $\square$

3. Filtration de $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$

3.1.

Soient χ un caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ et $P = MAN$ un élément de $\mathscr{P}$ avec $L = MA$. On a (cf. [5, Proposition 1]):

Pour tout $\Phi \in \mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$ il existe un sous-ensemble fini, S_P, de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, tel que, pour tout $g \in G$ et $\xi \in S_P - \mathbb{N}\Sigma_P$ (où $\mathbb{N}\Sigma_P$ est l'ensemble des $\sum_{\alpha \in \Sigma_P} n_\alpha \alpha, n_\alpha \in \mathbb{N}$), il existe une fonction polynômiale sur $\mathfrak{a}, p_\xi(P|\Phi, g)$, vérifiant:

pour tout $X \in \mathfrak{a}$ strictement P-dominant, $\Phi(g(\exp tX)H)$ admet un développement asymptotique au sens de [3] (voir aussi [22]) quand $t \to +\infty$:

$$\sum_{\xi \in S_P - \mathbb{N}\Sigma_P} p_\xi(P|\Phi, g, tX) e^{t(\xi - \rho_P)(X)}.$$

On dit que ξ est un exposant asymptotique de Φ le long de P si $\xi \in S_P - \mathbb{N}\Sigma_P$ et est tel que la fonction $g \mapsto p_\xi(P|\Phi, g)$ est non identiquement nulle sur G. On note $e(P, \Phi)$ l'ensemble des exposants asymptotiques de Φ le long de P. Les coefficients correspondants sont appelés coefficients asymptotiques de Φ le long de P. Par unicité des développements asymptotiques (cf. [3, Section 3]), les coefficients asymptotiques sont linéaires en Φ.

Un exposant asymptotique le long de P est dit directeur si c'est un élément maximal de $e(P, \Phi)$ pour la relation d'ordre $\preccurlyeq_P$ sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ définie par:

$$\xi \preccurlyeq_P \xi' \text{ si et seulement si } \xi' - \xi \in \mathbb{N}\Sigma_P.$$

On note $e_l(P, \Phi)$ l'ensemble des exposants asymptotiques directeurs de Φ le long de P.

Maintenant, un exposant asymptotique de Φ le long de P est la restriction à $\mathfrak{a}$ d'un exposant asymptotique de Φ le long de $P_\emptyset$, pour $P_\emptyset$ minimal dans $\mathscr{P}$ contenu dans

P, et réciproquement, la restriction à $\mathfrak{a}$ d'un exposant asymptotique de Φ le long de $P_\emptyset$ est un exposant asymptotique de Φ le long de P (cf. e.g. [5, Proposition 5]). Donc, si $\xi \in e_l(P, \Phi)$, il existe $\xi' \in e(P_\emptyset, \Phi)$ tel que $\xi'_{|\mathfrak{a}} = \xi$. On prend $\xi'' \in e_l(P_\emptyset, \Phi)$ avec $\xi' \preccurlyeq_{P_\emptyset} \xi''$. Alors $\xi = \xi'_{|\mathfrak{a}} \preccurlyeq_P \xi''_{|\mathfrak{a}}$. Comme ξ est directeur et $\xi''_{|\mathfrak{a}} \in e(P, \Phi)$, on a alors $\xi = \xi''_{|\mathfrak{a}}$. On peut donc choisir ξ' ci-dessus dans $e_l(P_\emptyset, \Phi)$.

En résumé, $e_l(P, \Phi) \subset \{\xi'_{|\mathfrak{a}} | \xi' \in e_l(P_\emptyset, \Phi)\}$. D'après [18, Lemme 6], on a donc:

$$\bigcup_{\Phi \in \mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}} e_l(P, \Phi) \text{ est fini} \tag{3.1}$$

ce qui implique que l'on peut prendre S_P indépendant de Φ. D'autre part, pour $\Phi \in \mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$, les fonctions $g \mapsto p_\xi(P|\Phi, g)$ sont C^∞ à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $S(\mathfrak{a}^*)$ (cf. [5, Proposition 1(a)]). De plus, notant L la représentation régulière gauche de G et $U(\mathfrak{g})$ sur $C^\infty(G)$, on a:

$$\begin{aligned} p_\xi(P|\mathrm{L}_u\Phi, \cdot) &= \mathrm{L}_u p_\xi(P|\Phi, \cdot), \quad u \in U(\mathfrak{g}), \\ p_\xi(P|\mathrm{L}_k\Phi, \cdot) &= \mathrm{L}_k p_\xi(P|\Phi, \cdot), \quad k \in K, \end{aligned} \tag{3.2}$$

(cf. [5, Proposition 1(b)]). D'où l'on déduit

$$e(P, \mathrm{L}_u\Phi) \subset e(P, \Phi), \quad u \in U(\mathfrak{g}). \tag{3.3}$$

D'après [5, Proposition 2(a)], on a aussi

$$\begin{aligned} p_\xi(P|\Phi, gh_L \exp X, Y) = p_\xi(P|\Phi, g, X + Y) e^{(\xi - \rho_P)(X)}, \\ \mathfrak{g} \in G,\ h_L \in L \cap H,\ X, Y \in \mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Enfin, les exposants asymptotiques directeurs satisfont les propriétés suivantes (cf. [5, Proposition 3(a) et Eq. (10)], et [1, Eq. (21)]):

$$p_\xi(P|\Phi, gn) = p_\xi(P|\Phi, g), \quad g \in G,\ n \in N, \xi \in e_l(P, \Phi) \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_P(D) p_\xi(P|\Phi, lL \cap H) = p_\xi(P|D\Phi, lL \cap H), \\ l \in L,\ D \in \mathbb{D}(G/H), \xi \in e_l(P, \Phi), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\mu_P(D) = ((\gamma^L_{\mathfrak{a}^d})^{-1} \circ \gamma_{\mathfrak{a}^d})(D) \in \mathbb{D}(L/L \cap H)$.

3.2. *Définition d'une représentation induite*

On conserve les notations précédentes. Soit V un sous-$(\mathfrak{l}, K \cap L)$-module d'une représentation C^∞ de $L, (\pi, V_\pi)$, dans un espace de Fréchet. On note $I(V)$ l'espace des applications φ de K dans V, ayant une image contenue dans un espace de dimension finie, et C^∞ de K dans cet espace, qui sont de plus K-finies par les translations à gauche par K et vérifiant:

$$\varphi(km) = \pi(m^{-1})(\varphi(k)), \quad k \in K, m \in L \cap K. \tag{3.7}$$

On note $ind_{P\uparrow G}V_\pi$ l'espace de la représentation induite C^∞ de la représentation π de L, étendue trivialement à N. Plus précisément, $ind_{P\uparrow G}V_\pi$ est l'espace des fonctions φ, C^∞ de G dans V_π, telles que:

$$\varphi(gman) = a^{-\rho_P}\pi(ma)^{-1}\varphi(g), \quad g \in G, m \in M, a \in A.$$

Lemme 2. *On note $I^P(V)$ le sous-espace de $ind_{P\uparrow G}V_\pi$ formé des éléments dont la restriction à K est élément de $I(V)$. Alors*:

(i) *$I^P(V)$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $ind_{P\uparrow G}V_\pi$.*
(ii) *L'espace $I(V)$ de même que la structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module sur $I(V)$ déduite de celle de $I^P(V)$ par transport de structure ne dépend que de la structure de $(\mathfrak{l}, L\cap K)$-module de V.*
(iii) *Si $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, où les V_n sont des $(\mathfrak{l}, L\cap K)$-modules vérifiant $V_n \subset V_{n+1}$, on a $I^P(V) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^P(V_n)$.*

Démonstration. (i) On écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{s}) \oplus \mathfrak{n}$. On fixe une base $(X_1, \ldots, X_l)$ de $\mathfrak{k}, (Y_1, \ldots, Y_p)$ une base de $(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{s})$ et $(Z_1, \ldots, Z_q)$ une base de $\mathfrak{n}$. Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $k \in K$, on écrit

$$(\mathrm{Ad}\,k)X = \sum_{r=1}^{l} x_r(k^{-1})(\mathrm{Ad}\,k)X_r + \sum_{s=1}^{p} y_s(k^{-1})Y_s + \sum_{t=1}^{q} z_t(k^{-1})Z_t,$$

où les fonctions x_r, y_s et z_t sont C^∞.

Soit $\varphi \in I^P(V)$. Il suffit, pour prouver (i) de voir que, pour $X \in \mathfrak{g}$, l'action régulière gauche de X sur φ est élément de $I^P(V)$. Mais cette action régulière gauche est donnée par la convolution à gauche par la distribution sur G, à support l'élément neutre, associée à X, notée encore X. Notons $\psi = X * \varphi$. Donc, pour $k \in K$, on a

$$\psi(k) = \sum_{r=1}^{l} x_r(k^{-1})(X_r * \varphi)(k) + \sum_{s=1}^{p} y_s(k^{-1})(\varphi * Y_s)(k) + \sum_{t=1}^{q} z_t(k^{-1})(\varphi * Z_t)(k).$$

Mais la définition de l'induite $ind_{P\uparrow G}V_\pi$ montre que:

$$\varphi * Z_t = 0, (\varphi * Y_s)(k) = (-Y_s - \rho_P(Y_s))(\varphi(k)),$$

où $\rho_P \in \mathfrak{a}^*$ est prolongée par 0 sur $\mathfrak{m}$. Donc

$$\psi(k) = \sum_{r=1}^{l} x_r(k^{-1})(X_r * \varphi)(k) + \sum_{s=1}^{p} (-Y_s - \rho_P(Y_s))(\varphi(k)). \tag{3.8}$$

La K-finitude de φ montre que les $(X_r * \varphi)(k)$ sont contenus dans le sous-espace de V, engendré par $\{\varphi(k)|\, k \in K\}$, qui est de dimension finie. De même $\{(-Y_s - \rho_P(Y_s))(\varphi(k))|\, k \in K\}$ engendre un espace de dimension finie. Ceci montre que ψ est à valeurs dans un espace de dimension finie. La formule (3.8) montre également que ψ est C^∞. La K-finitude de ψ résulte de la formule:

$$\mathrm{L}_k(X * \varphi) = (\mathrm{Ad}\, k)X * (\mathrm{L}_k \varphi), \quad k \in K.$$

(ii) La définition de $I(V)$ est clairement indépendante de π. Le fait que l'action de $\mathfrak{g}$ ne dépende que de V résulte de (3.8).

(iii) Clairement, $I^P(V)$ contient la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^P(V_n)$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $\varphi \in I^P(V)$. Comme l'image de K par φ est contenue dans un sous-espace de dimension finie de V, celle-ci est contenue dans un V_n. Donc $\varphi \in I^P(V_n)$, comme désiré. □

3.3. *Définition de la filtration de $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$*

Rappelons un fait élémentaire sur la projection sur un cône convexe fermé $\mathscr{C}$ d'un espace vectoriel réel euclidien E de dimension finie.

On notera $\mathscr{C}^0$ le cône dual de $\mathscr{C}$, i.e. $\mathscr{C}^0 = \{v \in E|\, (v|c) \leqslant 0, c \in \mathscr{C}\}$. La projection de $v \in E$ sur $\mathscr{C}$ est l'unique élément $v^{\mathscr{C}}$ de $\mathscr{C}$ de distance minimale avec v. Alors (cf. [18, Eqs. (21) et (23)]):

$$\begin{gathered}\text{Soient } v, v' \in E. \text{ On a } v - v^{\mathscr{C}} \in \mathscr{C}^0 \text{ et } v - v^{\mathscr{C}} \text{ est orthogonal à } v^{\mathscr{C}}.\\ \text{De plus, si } v - v' \in \mathscr{C}^0 \text{ ou } (v' - v|v^{\mathscr{C}}) \geqslant 0, \text{ on a } \|v^{\mathscr{C}}\| \leqslant \|v'^{\mathscr{C}}\|\\ \text{avec égalité seulement si } v^{\mathscr{C}} = v'^{\mathscr{C}}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Soit $P \in \mathscr{P}$, on note $\mathfrak{a}_P^{*+}$ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}_P^*$ strictement P-dominants de $\mathfrak{a}_P$, i.e. tels que $(\lambda, \alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_P$. On note $\overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$ son adhérence, qui est un cône convexe fermé. On note ${}^+\overline{\mathfrak{a}}_P^*$ le cône formé des $\sum_{\alpha \in \Sigma_P} x_\alpha \alpha,\ x_\alpha \geqslant 0$. Le cône dual de $\overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$ est égal à $-{}^+\overline{\mathfrak{a}}_P^*$.

Si $\lambda \in \mathfrak{a}_P^*$, on note λ_P sa projection sur $\overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$. Montrons:

$$\text{Soient } P, Q \in \mathscr{P} \text{ avec } P \subset Q. \text{ Si } \lambda \in \mathfrak{a}_Q^* \subset \mathfrak{a}_P^*, \text{on a } \lambda_P = \lambda_Q. \tag{3.10}$$

Ecrivons $\lambda_P = \lambda^Q + \lambda' \in \overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$ avec $\lambda' \in \mathfrak{a}_Q^*$ et λ^Q orthogonal à $\mathfrak{a}_Q^*$. Montrons que $\lambda' \in \overline{\mathfrak{a}}_Q^{*+}$. Soit $\alpha \in \Sigma_Q$. Il existe $\beta \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$, poids de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{n}_Q \subset \mathfrak{n}_P$ qui étend α. Donc, pour un tel β, $(\beta, \lambda_P) \geqslant 0$. Si $w \in W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)$, $w\beta$ vérifie la même propriété. On a donc:

$$\sum_{w \in W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)} (w\beta, \lambda_P) \geqslant 0.$$

Mais les invariants de $W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ dans $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ sont contenus dans $\mathfrak{a}_Q^*$. Donc:

$$\sum_{w \in W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)} w\beta = (\# W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset))\alpha$$

et:

$$\sum_{w \in W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset)} (w\beta, \lambda_P) = (\# W^{M_Q}(\mathfrak{a}_\emptyset))(\alpha, \lambda').$$

Donc $(\alpha, \lambda') \geqslant 0$ pour $\alpha \in \Sigma_Q$, i.e $\lambda' \in \overline{\mathfrak{a}}_Q^{*+}$. D'après ce qui précède, on a $(\alpha, \lambda') \geqslant 0$ pour $\alpha \in \Sigma_P$, car le produit scalaire (α, λ') est égal au produit scalaire $(\alpha_{|\mathfrak{a}_Q}, \lambda')$, c'est à dire $\lambda' \in \overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$, soit encore $(\lambda')_P = \lambda'$. D'après la définition de la projection λ_P, on doit avoir:

$$||\lambda - \lambda_P|| \leqslant ||\lambda - \lambda'||.$$

Mais clairement $||\lambda - \lambda_P||^2 = ||\lambda - \lambda'||^2 + ||\lambda^Q||^2$. Donc on doit avoir $\lambda^Q = 0$ et $\lambda_P = \lambda'$. Mais alors λ_P satisfait les propriétés caractéristiques de la projection de λ sur $\overline{\mathfrak{a}}_Q^{*+}$. Donc $\lambda_P = \lambda_Q$ comme désiré. Ceci achève de prouver (3.10).

On note $\mathscr{E}_\chi$ l'ensemble des paires (P, ξ) où $P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et ξ est un exposant asymptotique directeur le long de P d'au moins un élément de $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$. Comme $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ est fini, $\mathscr{E}_\chi$ est fini d'après (3.1). On note $\mathscr{E}_\chi^0$ l'ensemble des éléments (P, ξ) de $\mathscr{E}_\chi$ pour lesquels la norme de $\mathrm{Re}\,\xi_P$ est minimale. On définit par récurrence $\mathscr{E}_\chi^{n+1}$ comme l'ensemble des éléments (P, ξ) de $\mathscr{E}_\chi \setminus \bigcup_{k=0}^n \mathscr{E}_\chi^k$ pour lesquels la norme de $\mathrm{Re}\,\xi_P$ est minimale.

La filtration $\mathscr{F}_\chi$ de $\mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}$ est définie comme suit:

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_\chi^n \text{ est l'ensemble des éléments de } \mathscr{A}(G/H)_{(\chi)} \text{ dont}\\ &\text{les exposants asymptotiques directeurs } \xi \text{ le long de } P\\ &\text{sont tels que } (P, \xi) \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{E}_\chi^k \text{ pour } P \text{ décrivant } \mathscr{P}_{\mathrm{st}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Montrons que:

$$\mathscr{F}_\chi^n \text{ est un sous-}(\mathfrak{g}, K)\text{-module de } \mathscr{A}(G/H)_{(\chi)}. \tag{3.12}$$

Soient $\Phi \in \mathscr{F}_\chi^n, u \in U(\mathfrak{g}), P \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$. Alors, d'après (3.3), $e(P, \mathrm{L}_u\Phi) \subset e(P, \Phi)$. Donc, si $\xi \in e_l(P, \mathrm{L}_u\Phi)$, il existe $\xi' \in e_l(P, \Phi)$ avec $\xi \preccurlyeq_P \xi'$. Alors, d'après (3.9), on a $||\mathrm{Re}\,\xi'_P|| \geqslant ||\mathrm{Re}\,\xi_P||$. Comme $\phi \in \mathscr{F}_\chi^n$, on a (P, ξ') élément de $\bigcup_{k=0}^n \mathscr{E}_\chi^k$ et il en va alors de même de (P,ξ). Donc $\mathrm{L}_u\Phi\in\mathscr{F}^n_\chi$. De même, d'après (3.2), pour $k\in K, e_l(P,\mathrm{L}_k\Phi)=e_l(P,\Phi)$ ce qui implique $\mathrm{L}_k\Phi\in\mathscr{F}^n_\chi$. Ceci achève de prouver (3.12).

Soit a_n la valeur commune des nombres $||\mathrm{Re}\,\xi_P||$ pour $(P,\xi)\in\mathscr{E}^n_\chi$.

Lemme 3. *Soient $\Phi\in\mathscr{F}^n_\chi$, $P=MAN\in\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$. Supposons que ξ est un exposant asymptotique de Φ le long de P avec $||\mathrm{Re}\,\xi_P||=a_n$.*

(i) *Si* $\mathrm{Re}\,\xi$ *est strictement P-dominant, alors ξ est élément de $e_l(P,\Phi)$.*
(ii) *On ne suppose plus* $\mathrm{Re}\,\xi$ *strictement P-dominant. On note E^n_χ l'ensemble des paires $(P',\xi')\in\mathscr{E}^n_\chi$ avec* $\mathrm{Re}\,\xi'$ *strictement P'-dominant. Soit Q l'élément de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ contenant P dont le sous-groupe de Levi a pour algèbre de Lie la somme des sous-espaces poids sous $\mathfrak{a}_\emptyset$ pour des poids orthogonaux à* $\mathrm{Re}\,\xi_P$. *Alors*:

$$\mathrm{Re}\,\xi_P\in\mathfrak{a}^*_Q,\quad \mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_Q}=\mathrm{Re}\,\xi_P, \tag{3.13}$$

$(\mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q=\mathrm{Re}\,\xi_P$ *est strictement Q-dominant, et*

$$\xi_{|\mathfrak{a}_Q}\in e_l(Q,\Phi)\ \textit{et}\ (Q,\xi_{|\mathfrak{a}_Q})\in E^n_\chi. \tag{3.14}$$

Démonstration. (i) On suppose $\mathrm{Re}\,\xi$ strictement P-dominant. Soit ξ' un exposant asymptotique de Φ le long de P. Montrons que si $\xi\preccurlyeq_P\xi'$, alors $\xi'=\xi$. D'après (3.9), on a:

$$||\mathrm{Re}\,\xi'_P||\geqslant||\mathrm{Re}\,\xi_P||=a_n.$$

Comme $\Phi\in\mathscr{F}^n_\chi$, on doit avoir égalité et, toujours d'après (3.9), on a $\mathrm{Re}\,\xi'_P=\mathrm{Re}\,\xi_P=\mathrm{Re}\,\xi$. On a donc: $\mathrm{Re}\,\xi'=\mu+\mathrm{Re}\,\xi$ avec $\mu\in-{}^+\overline{\mathfrak{a}}^*_P$ et μ orthogonal à $\mathrm{Re}\,\xi$. Comme $\mathrm{Re}\,\xi$ est strictement P-dominant, cela implique que $\mu=0$, donc $\mathrm{Re}\,\xi'=\mathrm{Re}\,\xi$. Finalement $\xi=\xi'$ comme désiré, puisque $\mathrm{Im}(\xi-\xi')$ est nul d'après l'hypothèse $\xi\preccurlyeq_P\xi'$.

(ii) On ne suppose plus que $\mathrm{Re}\,\xi$ est strictement P-dominant. Soit Q comme dans l'énoncé. Par construction $\eta=\mathrm{Re}\,\xi_P\in\mathfrak{a}^*_Q$ et η est strictement Q-dominant. Ecrivons:

$$\mathrm{Re}\,\xi=\mu+\mathrm{Re}\,\xi_P\ \text{avec}\ \mu\in-{}^+\overline{\mathfrak{a}}^*_P,\quad \mu\,\text{orthogonal à}\ \mathrm{Re}\,\xi_P=\eta.$$

On restreint les deux membres de l'égalité à $\mathfrak{a}_Q$ et on trouve:

$$\mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_Q}=\mu'+\mathrm{Re}\,\xi_P\,\text{avec}\ \mu'\in-{}^+\overline{\mathfrak{a}}^*_Q,\quad \mu'\,\text{orthogonal à}\ \mathrm{Re}\,\xi_P=\eta. \tag{3.15}$$

Comme $\eta\in\mathfrak{a}^*_Q$ est strictement Q-dominant, on voit que μ' est nul, donc μ est nul sur $\mathfrak{a}_Q$. Donc, d'après (3.15), on a $\mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_Q}=\mathrm{Re}\,\xi_P$. Ceci achève de prouver (3.13). En outre, comme η $(=\mathrm{Re}\,\xi_P)$ est strictement Q-dominant, $\eta_Q=\eta$, i.e. $(\mathrm{Re}\,\xi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q=\eta=\mathrm{Re}\,\xi_P$. Maintenant $\xi_{|\mathfrak{a}_Q}\in e(Q,\Phi)$ d'après [5, Proposition 5(b)]. Alors, d'après (i) et les hypothèses, on a $\xi_{|\mathfrak{a}_Q}\in e_l(Q,\Phi)$ et $(Q,\xi_{|\mathfrak{a}_Q})\in E^n_\chi$ ce qui achève de prouver (3.14). $\square$

Soit $P=MAN\in\mathscr{P}$ avec $L=MA$. On identifie, grâce à la décomposition (1.1) pour L, les fonctions sur $M/M\cap H$ et sur $\mathfrak{a}$ à des fonctions sur $L/L\cap H$. Ainsi toute fonction polynômiale sur $\mathfrak{a}, p \in S(\mathfrak{a}^*)$, s'identifie à une fonction sur $L/L \cap H$ par composition avec H_L. De même, on notera, pour $\xi \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, e^{ξ} au lieu de $e^{\xi \circ H_L}$. On fait agir $\mathfrak{l}, L \cap K$ par action régulière gauche sur les espaces de fonctions sur $L/L \cap H, \mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H), S(\mathfrak{a}^*)$ et $\mathbb{C}e^{\xi}$. On note $\mathbb{C}_{-\xi}$ le L-module de dimension 1 trivial sur M et dont la différentielle sur $\mathfrak{a}$ est égale à $-\xi$, de sorte que $\mathbb{C}_{-\xi}$ est isomorphe à $\mathbb{C}e^{\xi}$. On remarque que $\mathscr{A}(L/L \cap H)$ est un sous-$(\mathfrak{l}, L \cap K)$-module de $C^{\infty}(L/L \cap H)$.

Lemme 4. *Soient $(P, \xi) \in E^n_{\chi}$, avec $P = LN$, et $\Phi \in \mathscr{F}^n_{\chi}$. On écrit $L = MA$. On définit:*

$$(T_{P,\xi}\Phi)(g, l) = p_{\xi}(P|\Phi, gl, 0), \quad g \in G, l \in L.$$

(i) *On a:*

$$T_{P,\xi}\Phi \in I^P(\mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}) \tag{3.16}$$

et même

$$\begin{aligned} &T_{P,\xi}\Phi \textit{ est élément de la somme directe, sur } \omega \in \mathbb{D}(M/M \cap H)^{\wedge} \\ &\quad \textit{tels que } (\omega \otimes \chi^A_{\xi})^{\sim} = \chi, \textit{ de } I^P(\mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H)_{(\omega)} \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

(ii) *L'intersection des noyaux des $T_{P,\xi}, (P, \xi) \in E^n_{\chi}$, est égale à $\mathscr{F}^{n-1}_{\chi}$.*

Démonstration. Si $T_{P,\xi}\Phi$ est non nul, on a $\xi \in e(P, \Phi)$ et d'après le Lemme précédent, on a $\xi \in e_l(P, \Phi)$. Alors les équations (3.2)à (3.6) montrent que:

$$T_{P,\xi}\Phi \in I^P(\mathscr{A}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}).$$

Montrons que:

$$T_{P,\xi}\Phi(k) \in \mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}, \quad k \in K. \tag{3.18}$$

Par équivariance (cf. Eq. (3.2)), on se réduit à $k = e$. D'après [10, après Eq. (5.1)], la tempérance de $(T_{P,\xi}\Phi)(e)e^{(-\xi+\rho_P) \circ H_L}$ est équivalente au fait que tous les exposants asymptotiques directeurs de $(T_{P,\xi}\Phi)(e)$, le long de tout élément Q de $\mathscr{P}^L_{\text{st}}, \eta \in (\mathfrak{a}^*_Q)_{\mathbb{C}}$, vérifient:

$$\operatorname{Re} \eta \preccurlyeq_Q \operatorname{Re} \xi. \tag{3.19}$$

Mais d'après [5, Proposition 5(b)], η est un exposant de Φ le long de $Q' := QN \in \mathscr{P}_{\text{st}}$ ($Q \in \mathscr{P}^L_{\text{st}}$ et $P \in \mathscr{P}_{\text{st}}$) qui vérifie $\eta_{|\mathfrak{a}_P} = \xi$. Comme $\Phi \in \mathscr{F}^n_{\chi}$, on doit avoir $\|\operatorname{Re} \eta_{Q'}\| \leqslant a_n$. On écrit $\operatorname{Re} \eta = \mu + \operatorname{Re} \xi$ avec μ orthogonal à $\mathfrak{a}^*_P$. Comme d'après (3.10), $\operatorname{Re} \xi_{Q'} = \operatorname{Re} \xi_P$ qui est égal à $\operatorname{Re} \xi$, on a $(\operatorname{Re} \eta - \operatorname{Re} \xi, \operatorname{Re} \xi_{Q'}) = (\mu, \operatorname{Re} \xi) = 0$, et donc, d'après (3.9), $\|\operatorname{Re} \eta_{Q'}\| \geqslant \|\operatorname{Re} \xi\|$. Comme $\|\operatorname{Re} \eta_{Q'}\| \leqslant a_n$ et $\|\operatorname{Re} \xi\| = a_n, \|\operatorname{Re} \eta_{Q'}\| = \|\operatorname{Re} \xi\|$, puis, toujours grâce à (3.9), on a $\operatorname{Re} \eta_{Q'} = \operatorname{Re} \xi$. Alors, d'après (3.9), on a $\mu \in -{}^{+}\overline{\mathfrak{a}}^*_{Q'}$. Il découle alors de l'orthogonalité de μ à $\mathfrak{a}^*_P$ que $\mu \preccurlyeq_Q 0$. Donc (3.19) est vérifié, ce qui implique (3.18) et achève de prouver (3.16). Prouvons (3.17). Il s'agit de décomposer $(T_{P,\xi}\Phi)(k)$ en somme sur i d'éléments de $\mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M\cap H)_{(\chi^M_{\Lambda_i})} \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}$, où $\Lambda_i \in (\mathfrak{a}^{d,M})^*_{\mathbb{C}}$ vérifie $(\chi^L_{\Lambda_i+\xi})^{\sim} = \chi$. Par équivariance, on se ramène à $k = e$. Ecrivons $\chi = \chi_\Lambda$ pour un $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$. Soit $I_\chi = \operatorname{Ker} \chi$. On suppose Φ annulé par I^p_χ. Comme $\xi \in e_l(P, \Phi)$, on déduit de [5, Eq. (10), Proposition 3, Eq. (18)] et [1, Eq. (21)], que $\Psi := (T_{P,\xi}\Phi)(e)$ est annulé par J^p_χ où $J_\chi = \{D \in \mathbb{D}(L/L\cap H) \mid \gamma^L_{\mathfrak{a}^d}(D) \in S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)},\ \chi^L_\Lambda(D) = 0\}$. D'autre part, décomposant l'action de $\mathbb{D}(L/L\cap H)$ sur Ψ, on peut écrire Ψ comme une somme de fonctions sur $L/L\cap H, \Psi_i,\ i = 1, \dots, q$, non nulles, annulées par une puissance $J^{p_i}_{\Lambda'_i}$ de l'idéal $J_{\Lambda'_i} = \operatorname{Ker} \chi^L_{\Lambda'_i}$, où $\Lambda'_i \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$. En outre, d'après (3.18), on voit que $\Lambda'_i = \Lambda_i + \xi$ avec $\Lambda_i \in (\mathfrak{a}^{d,M})^*_{\mathbb{C}}$. Soit $D \in \mathbb{D}(L/L\cap H)$ avec $\gamma^L_{\mathfrak{a}^d}(D) \in S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{a}^d)}$. Les valeurs propres de D agissant sur $\mathbb{D}(L/L\cap H)\Psi$ sont les $\chi^L_{\Lambda'_i}(D)$. Mais aussi, comme Ψ est annulé par J^p_χ, les valeurs propres de D se réduisent à $\chi^L_\Lambda(D)$. Ceci montre que les Λ'_i et Λ sont $W(\mathfrak{a}^d)$-conjugués. Donc on a:

$$\chi_{\Lambda_i+\xi} = \chi_\Lambda, \quad \text{i.e. } (\chi^L_{\Lambda_i+\xi})^{\sim} = \chi.$$

Ceci achève de prouver (3.17) et (i).

Montrons (ii). Soit $\Phi \in \mathscr{F}^n_\chi$ appartenant à l'intersection des noyaux des $T_{P,\xi}, (P,\xi) \in E^n_\chi$. Supposons $\Phi \notin \mathscr{F}^{n-1}_\chi$. Alors il existe (P,ξ) avec $\xi \in e_l(P,\Phi)$ et $\|\operatorname{Re} \xi_P\| = a_n$. Mais alors, d'après le Lemme 3(ii), on peut choisir $Q \in \mathscr{P}_{\text{st}}$, contenant P, tel que, notant $\eta = \xi_{|\mathfrak{a}_Q}$, on a $(Q,\eta) \in E^n_\chi$ et $\eta \in e_l(Q,\Phi)$. Alors $T_{Q,\eta}\Phi$ est non nul puisque $p_\eta(Q|\Phi,\cdot)$ est non identiquement nul. Une contradiction avec l'hypothèse sur Φ. Donc $\Phi \in \mathscr{F}^{n-1}_\chi$. Il reste maintenant à montrer l'inclusion inverse, i.e. $\mathscr{F}^{n-1}_\chi \subseteq \bigcap_{(P,\xi)\in E^n_\chi} \operatorname{Ker} T_{P,\xi}$. Soit donc $\Phi \in \mathscr{F}^{n-1}_\chi$. Supposons par l'absurde, qu'il existe $(P,\xi) \in E^n_\chi$ tel que $T_{P,\xi}\Phi \neq 0$. Par équivariance (cf. Eq. (3.2)), cela implique que $T_{P,\xi}\Phi(e) \neq 0$, i.e. ξ est un exposant asymptotique de Φ le long de P. Comme $(P,\xi) \in E^n_\chi$, il résulte alors du Lemme 3(i) que ξ est un exposant asymptotique directeur de Φ le long de P. Maintenant, comme $\Phi \in \mathscr{F}^{n-1}_\chi$, on a $(P,\xi) \notin \mathscr{E}^n_\chi$, d'où une contradiction. Ceci achève de prouver (ii). $\square$

Théorème 2. *La somme directe T_n des $T_{P,\xi}$, $(P,\xi) \in E^n_\chi$, passe au quotient en un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules entre $\mathscr{F}^n_\chi/\mathscr{F}^{n-1}_\chi$ et la somme directe, $\mathscr{G}^n_\chi$, sur $P = MAN \in \mathscr{P}_{\text{st}}$, ω caractère de $\mathbb{D}(M/M\cap H)$, et $\xi \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ avec* $\operatorname{Re} \xi$ *strictement P-dominant vérifiant $\|\operatorname{Re} \xi\| = a_n$ et $(\omega \otimes \chi^A_\xi)^{\sim} = \chi$, de*

$$I^P(\mathscr{A}_{\text{temp}}(M/M\cap H)_{(\omega)} \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi}).$$

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules est immédiat. D'après le Lemme précédent, l'image de T_n est contenue dans $\mathscr{G}^n_\chi$ et son noyau est $\mathscr{F}^{n-1}_\chi$. Avant de finir la démonstration, on va montrer la Proposition suivante.

Proposition 1. *Soient* $P = MAN \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$, *avec* $L := MA, \omega$ *un caractère de* $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ *avec* $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H)_{(\omega)} \neq 0$, *et* $\xi \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *avec* $\mathrm{Re}\, \xi$ *strictement P-dominant*, $||\mathrm{Re}\, \xi|| = a_n$ *et* $(\omega \otimes \chi^A_\xi)^\sim = \chi$. *Alors*:

(i) $(P, \xi) \in E^n_\chi$.
(ii) *Si* $\phi \in I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H)_{(\omega)} \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^\xi)$, *il existe* $F \in \mathscr{F}^n_\chi$ *tel que*:

$$T_{P,\xi} F = \phi,$$
$$T_{P',\xi'} F = 0 \text{ si } (P', \xi') \in E^n_\chi \text{ est distinct de } (P, \xi).$$

(iii) *Si de plus* $Q = M_Q A_Q N_Q \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ *est contenu dans* $P, \delta \in \widehat{M}_Q, \nu \in i(\mathfrak{a}^P_Q)^*$ *et* $\phi \in I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H, \delta, \nu) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^\xi)$, *alors* F *peut être choisi comme combinaison linéaire de fonctions de la forme*:

$$\partial(u)(p(\lambda) E(\bar{Q}, \delta, \lambda, \eta, \varphi))_{|\lambda = \nu - \xi}$$

où $\varphi \in I_\delta, \eta \in \mathscr{V}(\delta), u \in S(\mathfrak{a}^*_Q)$, *et* $p \in S(\mathfrak{a}_Q)$ *est tel que*:

$$\lambda \mapsto p(\lambda) E(\bar{Q}, \delta, \eta, \lambda, \varphi) \text{ est holomorphe}$$
$$\text{au voisinage de } \nu - \xi \text{ dans } (\mathfrak{a}^*_Q)_{\mathbb{C}}.$$

Ici $\bar{Q}$ *est le sous-groupe parabolique opposé à* Q.

Démonstration. On va utiliser les résultats de [18] sur les fonctions τ-sphériques, en utilisant le dictionnaire entre les fonctions τ-sphériques et les fonctions K-finies, dont on va rappeler quelques éléments.

Soit V_τ un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(K)$ invariant par les translations à droite et à gauche par K. On note τ la représentation régulière droite de K dans V_τ. Si (π, H_π) est une représentation de K, on notera $(H_\pi)_{V_\tau}$ la somme des composantes isotypiques de type $\gamma \in \widehat{K}$ où γ est contenu dans τ. On note l_τ la forme linéaire sur V_τ donnée par l'évaluation en l'élément neutre de K. On note $(H_\pi)_{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis de H_π. On regarde l'action régulière gauche de K dans $C^\infty(G/H)$. A toute fonction $f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}$, on associe l'application de classe C^∞, f_τ de G/H dans V_τ telle que:

$$(f_\tau(x))(k) = f(kx), \quad k \in K,\ x \in G/H. \tag{3.20}$$

Alors $f_\tau \in C^\infty(G/H, \tau)$, l'espace des fonctions C^∞ sur G/H, τ-sphériques. On définit, pour $f \in C^\infty(G/H, \tau)$, une fonction f^τ, de classe C^∞ sur G/H par:

$$f^\tau(x) = \langle f(x), l_\tau \rangle, \quad x \in G/H. \tag{3.21}$$

Lorsqu'on munit $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ de la topologie induite par celle de $C^\infty(G/H)$, l'application $f \mapsto f_\tau$ définit un isomorphisme linéaire continu de $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ sur $C^\infty(G/H, \tau)$ car:

$$\begin{aligned} (f^\tau)_\tau &= f, \quad f \in C^\infty(G/H, \tau), \\ (f_\tau)^\tau &= f, \quad f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

On fait agir $K_M = M \cap K$ sur $C^\infty(K)$ par représentation régulière droite et naturellement sur V_δ^∞. Alors, l'espace des invariants sous l'action de $K_M, (C^\infty(K) \otimes V_\delta^\infty)^{K_M}$, est l'espace de la réalisation compacte des séries principales généralisées associées à δ et P, noté dans la Section 2.1 $C^\infty(K, \delta)$ ou encore I_δ, et l'espace:

$$C^\infty(K, \delta, \tau) := (C^\infty(K, \delta) \otimes V_\tau)^K$$

s'écrit également

$$C^\infty(K, \delta, \tau) = (C^\infty(K) \otimes V_\delta^\infty \otimes V_\tau)^{K_M \times K}.$$

A tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$, on associe l'application φ_τ de $K \times K$ dans V_δ définie par:

$$\varphi_\tau(k, x) = \varphi(kx), \qquad k,\ x \in K. \tag{3.23}$$

Pour E espace vectoriel de dimension finie et X, Y variétés, on identifie l'espace $C^\infty(Y, E) \otimes C^\infty(X)$ à un sous-espace de $C^\infty(X \times Y, E)$. Il est facile de vérifier que l'appartenance de φ à $C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$ implique $\varphi_\tau \in C^\infty(K, \delta) \otimes V_\tau$. De plus, φ_τ est un élément de $C^\infty(K, \delta, \tau)$. De même, à tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta, \tau)$, on associe la fonction $\varphi^\tau \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$ par:

$$\varphi^\tau(k) = \langle \varphi(k), l_\tau \rangle, \quad k \in K. \tag{3.24}$$

Alors:

$$\begin{aligned} &\text{L'application } \varphi \mapsto \varphi_\tau \text{ est un isomorphisme linéaire continu} \\ &\text{de } C^\infty(K, \delta)_{V_\tau} \text{ dans } C^\infty(K, \delta, \tau), \text{et } (\varphi_\tau)^\tau = \varphi \text{ pour tout} \\ &\varphi \text{ dans } C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On rappelle maintenant la définition des intégrales d'Eisenstein.

On note $\mathscr{A}(G/H, \tau)$ l'espace des éléments F de $\mathscr{A}(G/H) \otimes V_\tau$ tels que $F(kx) = \tau(k)F(x), k \in K, x \in G/H$. Pour w élément de $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, on définit l'involution σ_w de G par $\sigma_w(g) = w^{-1}\sigma(wgw^{-1})w,\ g \in G$. Le quadruplet $(G, \sigma_w, \theta, w^{-1}Hw)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H) et on lui applique les notations déjà introduites pour de tels quadruplets. Soit L un σ-sous-groupe de Levi de G avec $L = MA$. On note τ_M la restriction de τ à $M \cap K$. On définit:

$$\mathscr{A}_2(M, \tau) \coloneqq \bigoplus_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M) \tag{3.26}$$

où $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$ est l'espace des fonctions C^∞, τ_M-sphériques sur $M/M \cap w^{-1}Hw$, qui sont de carré intégrable et $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$-finies. Ces espaces sont de dimension finie (cf. [10, Proposition 1]).

Soit $P = LN$ un élément de $\mathscr{P}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda - \rho_P$ soit strictement P-dominant. A tout $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathscr{W}_M} \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, on associe la fonction Ψ_λ définie pour $x \in G/H$ par:

$$\Psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w \in \mathscr{W}_M} Pw^{-1}H \\ a^{-\lambda+\rho_P}\psi_w(m) & \text{si } x = namw^{-1}H, \text{avec } n \in N_P, a \in A, m \in M, w \in \mathscr{W}_M. \end{cases}$$

L'intégrale d'Eisenstein $E(P, \psi, \lambda)$ est définie pour $x \in G/H$ par:

$$E(P, \psi, \lambda)(x) = \int_K \tau(k^{-1})\Psi_\lambda(kx)\, dk.$$

Cette intégrale converge et définit une fonction de classe C^∞, τ-sphérique et $\mathbb{D}(G/H)$-finie. De plus $E(P, \psi, \lambda)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [7, Section 3.1]). On notera, pour $w \in \mathscr{W}_M$, $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta$ l'espace des éléments τ_M-sphériques de $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw)^\delta \otimes V_\tau$. On note

$$\mathscr{A}_2(M, \tau)^\delta = \bigoplus_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta.$$

Pour $w \in \mathscr{W}_M$, on introduit l'application linéaire de $C^\infty(K, \delta, \tau) \otimes \mathscr{V}(\delta, w)$ dans $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^\delta$:

$$f \otimes \eta \mapsto \psi_{f \otimes \eta} \text{ où } \psi_{f \otimes \eta}(mM \cap w^{-1}Hw) = \langle \delta'(m)\eta, f(e) \rangle.$$

C'est un isomorphisme linéaire (cf. [7, Eq. (2.13)]).

Soient $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$. Alors $E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)$ appartient à $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ et l'on a l'identité:

$$E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)_\tau = E(P, \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}, \lambda) \tag{3.27}$$

(cf. [7, Eq. (8.8)]). De même (cf. [7, Eq. (8.9)]), on a l'identité de fonctions méromorphes:

$$E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)_\tau = E^0(P, \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}, \lambda). \tag{3.28}$$

Revenons à la Proposition 1. Soit ϕ comme dans l'énoncé de (ii). On choisit V_τ assez grand pour que $\phi \in I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H)\otimes S(\mathfrak{a}^*)\otimes \mathbb{C}e^{\xi})_{V_\tau}$. On définit $\phi_\tau \in C^\infty(K, \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H)\otimes S(\mathfrak{a}^*)\otimes \mathbb{C}e^{\xi}\otimes V_\tau)$ par:

$$\phi_\tau(k,k') = \phi(kk') \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H)\otimes S(\mathfrak{a}^*)\otimes \mathbb{C}e^{\xi}, \quad k\in K, k'\in K\cap L.$$

Rassemblons dans un Lemme des résultats importants de [18] dont nous aurons besoin (cf. [18, Théorème 8.1, Proposition 8.0.1 et Section 9]).

Lemme 5. *Il existe $F\in \mathscr{F}^n_\chi \otimes V_\tau$, τ-sphérique, telle que*:

(i) $p_\xi(P|F,m,X)e^{(\xi-\rho_P)(X)} = \phi_\tau(e, m\exp X), m\in M/M\cap H, X\in\mathfrak{a}$, *où ϕ_τ est regardé comme une application de $K\times(L/L\cap H)$ à valeurs dans V_τ.*

(ii) *ξ est un exposant asymptotique directeur de F le long de P.*

(iii) *Si $Q\in\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et $\lambda\in e(Q,F)$, alors $\|\mathrm{Re}\,\lambda_Q\|\leqslant a_n$. De plus, si $\mathrm{Re}\,\lambda$ est strictement Q-dominant et $\|\mathrm{Re}\,\lambda\| = a_n$, alors $Q=P$ et $\lambda=\xi$.*

(iv) *Soient $Q = M_QA_QN_Q\in\mathscr{P}_{\mathrm{st}}, Q\subset P, \delta\in(M_Q)^\wedge, \nu\in i\mathfrak{a}^*_Q$. Si ϕ est élément de $I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H,\delta,\nu)\otimes S(\mathfrak{a}^*)\otimes\mathbb{C}e^{\xi}), F$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme*:

$$\partial(u)(p(\lambda)E(\bar{Q},\psi,\lambda))_{|\lambda=\nu-\xi}$$

où $\psi\in\mathscr{A}_2(M_Q,\tau)^\delta, u\in S(\mathfrak{a}^*_Q)$, et $p\in S(\mathfrak{a}_Q)$ est tel que:

$$\lambda\mapsto p(\lambda)E(\bar{Q},\psi,\lambda) \textit{ est holomorphe au voisinage de } \nu-\xi \textit{ dans } (\mathfrak{a}^*_Q)_{\mathbb{C}}.$$

Démonstration. Grâce au Théorème 1, on se ramène au cas où ϕ est un élément de $I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M\cap H,\delta,\nu)\otimes S(\mathfrak{a}^*)\otimes\mathbb{C}e^{\xi})$. La Proposition 8.0.1 de [18] et sa preuve, dans lesquelles on change P en $\bar{P}$ et on prend $\lambda=-\xi$ et $f:(mM\cap H,X)\mapsto \phi_\tau(e,m\exp X)e^{(-\xi+\rho_P)(X)}$, jointe au Théorème 8.1 de [18] dans lequel on change P en $\bar{P}$, Q en $\bar{Q}$ et on prend $\lambda=-\xi$, montrent qu'il existe $F\in\mathscr{A}(G/H,\tau)_{(\chi)}$ vérifiant (i), (ii) et (iv) (pour (i) voir [18, Proposition 8.0.1(i) et (iv)], pour (ii) voir [18, Proposition 8.0.1(iv)], et pour (iv) voir la preuve de la Proposition 8.0.1 et le Théorème 8.1 de [18]). En outre, on peut supposer que, pour $P_\emptyset$ élément minimal de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et $\xi'\in e(P_\emptyset,F)$, on a (cf. [18, Eq. (161), sa preuve et Proposition 8.0.1(iii)]):

$$\begin{aligned}&\text{Si } P_\emptyset\subseteq P, \text{ on a } \|\mathrm{Re}\,\xi'_{P_\emptyset}\|\leqslant\|\mathrm{Re}\,\xi\|\\ &\text{avec égalité seulement si } \mathrm{Re}\,\xi'_{P_\emptyset} = \mathrm{Re}\,\xi \text{ et } \xi'_{|\mathfrak{a}_P}=\xi\end{aligned} \tag{3.29}$$

ainsi que (cf. [18, Eq. (164) et sa preuve]):

$$\text{Si } P_\emptyset\nsubseteq P, \text{ on a } \|\mathrm{Re}\,\xi'_{P_\emptyset}\| < \|\mathrm{Re}\,\xi\|. \tag{3.30}$$

Montrons que cela implique (iii). Soient $Q \in \mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ et $\lambda \in e(Q, F)$. Soit $P_\emptyset$ un élément minimal de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ contenu dans Q. Il existe $\xi' \in e(P_\emptyset, F)$ avec $\xi'_{|\mathfrak{a}_Q} = \lambda$. Utilisons (3.9) pour $v = \mathrm{Re}\,\lambda$ et $v' = \mathrm{Re}\,\xi'$, en tenant compte du fait que $\mathrm{Re}\,\lambda_Q = \mathrm{Re}\,\lambda_{P_\emptyset}$ d'après (3.10). On en déduit:

$$||\mathrm{Re}\,\xi'_{P_\emptyset}|| \geqslant ||\mathrm{Re}\,\lambda_Q||.$$

D'après (3.29) et (3.30), on en déduit:

$$||\mathrm{Re}\,\lambda_Q|| \leqslant a_n$$

car $||\mathrm{Re}\,\xi|| = a_n$ (cf. l'hypothèse de la Proposition 1). Ceci prouve la première partie de (iii). En outre, s'il y a égalité, on doit avoir (cf. Eq. (3.30)) $P_\emptyset \subseteq P$ et (cf. Eqs. (3.9) et (3.29)):

$$\mathrm{Re}\,\xi'_{P_\emptyset} = \mathrm{Re}\,\lambda_Q = \mathrm{Re}\,\xi \text{ et } \xi'_{|\mathfrak{a}_P} = \xi. \tag{3.31}$$

Donc $\mathrm{Re}\,\xi = \mathrm{Re}\,\lambda_Q$. Comme $\mathrm{Re}\,\xi$ est strictement P-dominant par hypothèse, le sous-groupe de Levi de P, L_P, a pour algèbre de Lie la somme des sous-espaces poids sous $\mathfrak{a}_\emptyset$, pour les poids orthogonaux à ξ. Donc $L_Q \subset L_P$. Par ailleurs, $P_\emptyset$ est contenu dans P et Q. Donc P (resp. Q) est engendré par $P_\emptyset$ et L_P (resp. L_Q). Donc Q est contenu dans P. Si en outre $\mathrm{Re}\,\lambda$ est strictement Q-dominant, on a: $\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda_Q = \mathrm{Re}\,\xi$. Donc $\mathrm{Re}\,\xi$ est strictement P et Q-dominant. Ce n'est possible que si $P = Q$. Alors, d'après (3.31) et le fait que $\lambda = \xi'_{|\mathfrak{a}_Q}$, on a $\lambda = \xi$ comme désiré. Ceci achève la preuve du Lemme 5. □

Fin de la démonstration de la Proposition 1. Achevons de prouver que ϕ, comme dans l'énoncé de la Proposition 1(ii), est dans l'image de T_n. Soit F comme dans l'énoncé du Lemme 5. On va prouver que $F^\tau \in \mathscr{F}^n_\chi$ et $T_n(F^\tau) = \phi$ (cf. Eq. (3.21) pour la définition de F^τ). On déduit de (3.21) que, pour tout $(Q, \eta) \in \mathscr{E}_\chi$:

$$p_\eta(Q|F^\tau, g, X) = \langle p_\eta(Q|F, g, X), l_\tau \rangle, \quad g \in G,\ X \in \mathfrak{a}_Q. \tag{3.32}$$

Il résulte alors du Lemme 5 que:

$$F^\tau \in \mathscr{F}^n_\chi \text{ et } T_{Q,\eta}(F^\tau) = 0 \text{ si } (Q, \eta) \in E^n_\chi \text{ est tel que } (Q, \eta) \neq (P, \xi). \tag{3.33}$$

Enfin, d'après le Lemme 5(i) et la τ-sphéricité des deux membres de l'équation suivante, on a:

$$p_\xi(P|F, kl, 0) = \phi_\tau(k, l), \quad k \in K, l \in L.$$

Joint à (3.32), on en déduit:

$$(T_{P,\xi}F^\tau)(k, l) = (\phi_\tau)^\tau(k, l), \quad k \in K, l \in L.$$

Mais $(\phi_\tau)^\tau = \phi$ (cf. Eq. (3.22)). On a donc prouvé $T_{P,\xi}F^\tau = \phi$ comme désiré. Finalement, tenant compte du Lemme 5(i) et (iv) et du lien entre intégrales d'Eisenstein et "intégrales d'Eisenstein" (cf. Eq. (3.27)), on a prouvé la Proposition 1. □

La Proposition 1 montre la surjectivité de T_n, et cela achève la preuve du Théorème 2. □

4. Application aux groupes regardés comme espaces symétriques

On suppose que $G = G_0 \times G_0$ et que σ est l'inversion des facteurs de sorte que H est la diagonale, $\mathrm{Diag}\, G_0$, de $G_0 \times G_0$. Alors G/H s'identifie à G_0 par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}, \theta$ est égal à (θ_0, θ_0) où θ_0 est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, et $K = K_0 \times K_0$ où K_0 est un sous-groupe compact maximal de G_0. Les éléments de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ sont de la forme $P = P_0 \times \theta_0(P_0)$ où P_0 est un sous-groupe parabolique de G_0, contenant un sous-groupe parabolique minimal fixé, $P_{\min,0}$, de G_0. On note $P_0 = M_0A_0N_0$ la décomposition de Langlands de P_0, avec $M_0A_0 = P_0 \cap \theta_0(P_0)$. On note $\overline{P_0}$ le sous-groupe parabolique $\theta_0(P_0)$. La σ-décomposition de Langlands de P s'écrit $P = MAN$ où $M = (M_0 \times M_0)\mathrm{Diag}\, A_0, A = \{(a, a^{-1}) |\, a \in A_0\}$ et $N = N_0 \times \theta_0(N_0)$.

Soient $(\delta_0, V_{\delta_0}) \in \widehat{M}_0$ et (δ, V_δ) la représentation de M triviale sur $\mathrm{Diag}\, A_0$ et dont la restriction à $M_0 \times M_0$ est égale à $\delta_0 \otimes \delta_0'$. On se limite aux δ de cette forme, car dans les autres cas $\mathscr{V}(\delta) = 0$. On note η l'élément de V_δ' donné par:

$$\eta(v \otimes v') = \langle v, v' \rangle, \quad v \in V_{\delta_0},\ v' \in V_{\delta_0'}.$$

Alors:

$$\mathscr{W}_M \text{ est réduit à un élément et } \mathscr{V}(\delta) = \mathbb{C}\eta.$$

Pour $v \in \mathfrak{a}^*$, on définit $v_0 \in \mathfrak{a}_0^*$ par $v_0(X) = v(X, -X)/2, X \in \mathfrak{a}_0$. Les fonctions $v \mapsto j(P, \delta, v, \eta)$ sont liées aux intégrales d'entrelacement $v \mapsto A(\theta_0(P_0), P_0, \delta_0, v_0)$ (cf. [4, Section 4]) et les intégrales d'Eisenstein $E(v)$, où $E(v) = E(P, \delta, v, \eta, \varphi)$, Eq. (2.1), resp. $E^0(P, \delta, v, \eta, \varphi)$, définies après Eq. (2.4), s'écrivent comme des fonctions du type:

$$g \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(v) \langle \bar{\pi}^{\overline{P_0}}_{\delta_0, v_0}(g^{-1})\varphi_i, \varphi_i' \rangle$$

où les φ_i (resp. φ_i') $\in I_{\delta_0}$ (resp. $I_{\delta_0'}$), et les $f_i(v)$ sont méromorphes en v et, en chaque point, le produit de $f_i(v)$ par un polynôme en v convenable est holomorphe. Mais on a un énoncé similaire en remplaçant $\overline{P_0}$ par P_0: cela résulte de la méromorphie des intégrales d'entrelacement et de leurs inverses. Il résulte du Lemme 10 de [12] que l'ensemble $\mathscr{E}$ des combinaisons linéaires de fonctions $\partial(u)(p(v)E(v))_{|v=\lambda}$, lorsque $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}, u \in S(\mathfrak{a}^*)$ et $p \in S(\mathfrak{a})$ est tel que $p(v)E(v)$ est holomorphe en λ, ne change pas si on multiplie les p par un polynôme q tel que les $q(v)f_i(v)$ soient en outre holomorphes en λ. Alors:

$$\begin{aligned}&\mathscr{E} \text{ est contenu dans l'ensemble des combinaisons linéaires de}\\&\partial(u_0)\langle \bar{\pi}^{P_0}_{\delta_0,\nu_0}(g^{-1})\varphi_0, \varphi'_0\rangle_{|\nu_0=\lambda_0},\ \ \varphi_0 \in (I_{\delta_0})_{(K_0)},\ \ \varphi'_0 \in (I_{\delta'_0})_{(K_0)}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Théorème 3.

(i) *Soit V un $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module d'Harish-Chandra admettant un caractère infinitésimal généralisé χ_0, i.e. annulé par une puissance d'un idéal maximal de $Z(\mathfrak{g}_0)$. Alors V est un sous-quotient d'une somme directe de représentations $V^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0}$, où $Q_0 = M_{Q_0}A_{Q_0}N_{Q_0}$ contient $P_{\min,0}$, δ_0 est une série discrète de M_0, $\lambda_0 \in (\mathfrak{a}^*_{Q_0})_{\mathbb{C}}$ est tel que* $\operatorname{Re}\lambda_0$ *est strictement Q_0-anti-dominant, et $V^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0}$ est une somme directe de certaines dérivées successives de (la réalisation compacte de) la famille $(I^{Q_0}_{\delta_0,\nu_0})_{\nu_0 \in (\mathfrak{a}^*_{Q_0})_{\mathbb{C}}}$ en λ_0 (cf. Appendice A).*

(ii) *On suppose ici que G_0 est un groupe réel réductif satisfaisant les hypothèses de* [8], *et on définit la notion de longueur des K_0-types et de K_0-type minimal comme dans* [20, *Définition* 5.4.18]. *Alors, si les K_0-types de V sont de longueur supérieure ou égale à l, on peut choisir les données $(Q_0, \delta_0, \lambda_0)$ telles que les K_0-types minimaux de $I^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0}$ soient également de longueur supérieure ou égale à l.*

Démonstration. Montrons que si le Théorème est vrai pour tout module d'Harish-Chandra cyclique, il est vrai pour tout module d'Harish-Chandra. En effet, soit V un module d'Harish-Chandra, soit (v_j) un ensemble fini de générateurs du $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module V, et soit V_j le sous-$(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module de V engendré par v_j. Alors $\oplus_j V_j$ vérifie les mêmes propriétés que V et l'application, qui à $(x_j) \in \oplus_j V_j$ associe $\sum_j x_j$, est un $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-homomorphisme surjectif de $\oplus_j V_j$ sur V. Donc V est un $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module quotient de la somme des V_j. Si le Théorème est vrai pour les V_j, il est vrai pour la somme directe des V_j. Cette somme apparait comme un sous-quotient d'une somme de $V^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0}$ satisfaisant (ii) pour $\oplus_j V_j$. Alors V, qui est un quotient de la somme des V_j, est à son tour un sous-quotient de cette somme de $V^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0}$ qui satisfont (ii), comme désiré.

On suppose donc désormais que V est cyclique.

Supposons le Théorème démontré pour les modules d'Harish-Chandra cycliques dont le module d'Harish-Chandra contragrédient est cyclique. Montrons que le Théorème est vrai pour V. Soit V' le module d'Harish-Chandra contragrédient de V. Comme V' est de type fini, on écrit $V' = \sum_j V'_j$ où les V'_j sont des $(\mathfrak{g}, K)$-modules cycliques. On note W_j l'orthogonal de V'_j dans V de sorte que $\bigcap_j W_j = \{0\}$. L'application naturelle $V \to \oplus_j V/W_j$ est donc une injection. Par ailleurs, $V_j := V/W_j$ satisfait $(V_j)' = V'_j$. Comme V et V'_j sont cycliques, V_j est cyclique ainsi que son module d'Harish-Chandra contragrédient. Par ailleurs, les V_j vérifient les mêmes hypothèses que V. Comme précédemment, si le Théorème est vrai pour les V_j, il est vrai pour V.

On est donc ramené au cas où V est engendré par v_0 et son module d'Harish-Chandra contragrédient, V', par v'_0. On note Φ le coefficient associé à $(v_0, v'_0), c_{v_0,v'_0}$ (cf. Appendice A.2, Eq. (A.4)), et notons V_Φ le $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module engendré par Φ sous la représentation régulière gauche de $\mathfrak{g}_0$ et K_0. Alors (cf. Lemme A.2(iii)) V est isomorphe à V_Φ.

On rappelle qu'on a identifié G/H à G_0. Alors $\mathbb{D}(G/H)$ s'identifie à $Z(\mathfrak{g}_0)$. Ainsi on a $\Phi \in \mathscr{A}(G_0)_{(\chi_0)}$. Il suffit donc de prouver le Théorème pour les $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-modules de la forme V_Φ, i.e. les sous-$(\mathfrak{g}_0, K_0)$-modules de $\mathscr{A}(G_0)_{(\chi_0)}$ engendrés par un élément Φ sous l'action régulière gauche. Supposons $\Phi \in \mathscr{F}^n_{\chi_0}$. On procède par récurrence sur n. On pose $\mathscr{F}^{-1}_{\chi_0} := 0$. Donc, si $n = -1$, il n'y a rien à prouver. On suppose maintenant $n \in \mathbb{N}$ et le Théorème vrai si $\Phi \in \mathscr{F}^{n-1}_{\chi_0}$. On suppose donc $\Phi \in \mathscr{F}^n_{\chi_0} \backslash \mathscr{F}^{n-1}_{\chi_0}$. Donc $T_n\Phi$ est non nul et s'écrit (cf. Théorèmes 2 et 1) sous la forme d'une somme finie de:

$$\phi_{\delta,v,\xi} \in I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M/M \cap H, \delta, v) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^\xi)$$

où $P = MAN \in \mathscr{P}^G_{\mathrm{st}}$, i.e. contient $P_{\min,0} \times \theta_0(P_{\min,0})$ et $\xi = (\xi_0, -\xi_0) \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \subset (\mathfrak{a}^*_0)_{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{a}^*_0)_{\mathbb{C}}$, avec $\mathrm{Re}\,\xi$ strictement P-dominant et $\|\mathrm{Re}\,\xi\| = a_n$.

De plus, on a pris $Q = M_Q A_Q N_Q \in \mathscr{P}^G_{\mathrm{st}}$ contenu dans P et $Q = Q_0 \times \theta_0(Q_0), Q_0 = M_{Q_0} A_{Q_0} N_{Q_0}, \delta = \delta_0 \otimes \delta'_0$, avec δ_0 une série discrète de M_{Q_0}, et $v \in i\mathfrak{a}^*_Q$ de la forme $(v_0, -v_0)$, avec $v_0 \in i\mathfrak{a}^*_{Q_0}$.

Le Théorème 2 joint à la Proposition 1 et à (4.1) montre que, si $\phi_{\delta,v,\xi} \neq 0$, il existe $F_{\delta,v,\xi} \in \mathscr{F}^n_{\chi_0}$, combinaison linéaire de dérivées de coefficients de $(\bar{\pi}^{\overline{Q_0}}_{\delta_0,\, v_0})_{v_0 \in (\mathfrak{a}^*_{Q_0})_{\mathbb{C}}}$ en $v_0 = v_0 - \xi_0$, tel que $T_n F_{\delta,v,\xi} = \phi_{\delta,v,\xi}$. On note Θ l'ensemble des triples (δ, v, ξ) comme ci-dessus avec $\phi_{\delta,v,\xi} \neq 0$. Alors, par itération du Lemme A.3, $F_{\delta,v,\xi}$ est un coefficient d'une somme directe $V_{\delta,v,\xi}$ de dérivées successives de $(\bar{\pi}^{\overline{Q_0}}_{\delta_0,\, v_0})_{v_0 \in \mathfrak{a}^*_{Q_0}}$ en $v_0 = v_0 - \xi_0$. On note $X_{\delta,v,\xi}$ ou X le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $C^\infty(G_0)$ engendré par $F_{\delta,v,\xi}$, qui est un sous-espace de l'espace engendré par les coefficients de $V_{\delta,v,\xi}$. Ici le premier (resp. le second) facteur de $G = G_0 \times G_0$ agit par représentation régulière gauche (resp. droite) sur $C^\infty(G_0)$. On note $X^0_{\delta,v,\xi}$ ou X_0 le sous-$(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module de $C^\infty(G_0)$ engendré par $F_{\delta,v,\xi}$ sous la représentation régulière gauche de $\mathfrak{g}_0$ et K_0. Alors X_0 forme un ensemble de générateurs de X sous l'action régulière droite. D'autre part, d'après le Lemme A.2(i), X_0 est un sous-quotient de $V_{\delta,v,\xi}$. Or, d'aprés le Lemme A.1(i), $V_{\delta,v,\xi}$ admet une filtration dont les sous-quotients sont isomorphes à $(I^{\overline{Q_0}}_{\delta_0, v_0 - \xi_0})_{(K_0)}$. Donc:

$$\begin{aligned} &\text{Les } K_0\text{-types minimaux de } X_0 \text{ sont de longueur} \\ &\text{supérieure ou égale à celle des } K_0\text{-types minimaux de } (I^{\overline{Q_0}}_{\delta_0,v_0-\xi_0})_{(K_0)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

On considère le $(\mathfrak{g}, K)$-module Y, image de X par T_n, engendré par $T_n F_{\delta,\nu,\xi} = \phi_{\delta,\nu,\xi} \neq 0$, qui est donc contenu dans $I^P(\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M_0, \delta, \nu) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi})$. Comme Y est non nul et K-invariant, l'évaluation en e, ev_e, détermine un homomorphisme non nul de $(\mathfrak{p}, M \cap K)$-modules de Y vers $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M_0, \delta, \nu) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi-\rho_P}$. Ainsi l'image de cet homomorphisme est un $(\mathfrak{l}, M \cap K)$-module qui est un quotient de $Y/\mathfrak{n}Y$. Cette image est donc un sous-module d'Harish-Chandra pour $(\mathfrak{l}, M \cap K)$ (cf. [16, Proposition 2.24]) non nul. D'après le Lemme 1(iii), cela implique que cette image a un quotient isomorphe à $(I_{\delta,\nu}^{Q\cap M})_{(K\cap M)} \otimes \mathbb{C}e^{\xi-\rho_P}$. Munissant $(I_{\delta,\nu}^{Q\cap M})_{(K\cap M)} \otimes \mathbb{C}e^{\xi-\rho_P}$ d'une structure de $(\mathfrak{p}, K \cap M)$-module triviale sur $\mathfrak{n}_P$, Y possède donc un morphisme de $(\mathfrak{p}, K \cap M)$-modules non nul vers $(I_{\delta,\nu}^{Q\cap M})_{(K\cap M)} \otimes \mathbb{C}e^{\xi-\rho_P}$. Par réciprocité de Frobenius, on en déduit un élément non nul, q, de $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(Y, (I_{\delta,\nu-\xi}^{Q})_{(K)})$. Avec nos choix, l'action régulière gauche sur $C^\infty(G)$ est l'action du premier facteur de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$. La représentation de ce premier facteur sur $(I_{\delta,\nu-\xi}^{Q})_{(K)}$ est simplement une somme de copies de $(I_{\delta_0,\nu_0-\xi_0}^{Q_0})_{(K_0)}$. Soit q_0 la restriction de q à l'image Y_0 de X_0 par T_n. Comme X_0 engendre X sous la représentation régulière droite, on voit, par équivariance, que l'image de q_0 ne peut être nulle. On en déduit que:

$$\begin{aligned}&Y_0 \text{ admet un quotient simple qui est un sous-}(\mathfrak{g}_0, K_0)\text{-module}\\ &\text{d'Harish-Chandra pour } (I_{\delta_0,\nu_0-\xi_0}^{Q_0})_{(K_0)}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Comme $\mathrm{Re}\,\xi_0$ est strictement Q_0-dominant, i.e. $-\mathrm{Re}\,\xi_0$ est strictement Q_0-anti-dominant, et ν_0 est imaginaire, on déduit de [19, Théorème 10.14 et Corollaire 10.15] (voir aussi l'Appendice de [13]), que ce sous-module contient un K_0-type minimal de $(I_{\delta_0,\nu_0-\xi_0}^{Q_0})_{(K_0)}$. Mais, comme le $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module X_0 est engendré par $F_{\delta,\nu,\xi}$, Y_0 est engendré par $T_n F_{\delta,\nu,\xi} = \phi_{\delta,\nu,\xi}$. Par ailleurs, si $\Psi \in V_\Phi$, on peut définir pour $k \in K$ la composante $\psi_{\delta,\nu,\xi}(k)$ de $T_{P,\xi}\Psi(k)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M_0, \delta, \nu) \otimes S(\mathfrak{a}^*) \otimes \mathbb{C}e^{\xi-\rho_P}$, et l'application $\Psi \mapsto \psi_{\delta,\nu,\xi}$ est un morphisme surjectif de $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-modules de V_Φ dans Y_0. Il en résulte que Y_0 est un quotient du $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module V_Φ. Donc les K_0-types de Y_0 ont des longueurs supérieures ou égales à l. Tenant compte de (4.3), on voit que:

$$\begin{aligned}&\text{Les } K_0\text{-types minimaux de } (I_{\delta_0,\nu_0-\xi_0}^{\overline{Q_0}})_{(K_0)} \text{ sont}\\ &\text{de longueur supérieure ouégale à } l.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Comme $V_{\delta,\lambda,\xi}$ est une somme directe de dérivées successives de $(\bar{\pi}_{\delta_0,\,\nu_0}^{\overline{Q_0}})_{\nu_0 \in (\mathfrak{a}_{Q_0}^*)_{\mathbb{C}}}$ en $\nu_0 = \nu_0 - \xi_0$, il résulte de (4.4) que:

$$\begin{aligned}&\text{Les } K_0\text{-types minimaux de } V_{\delta,\lambda,\xi} \text{ sont}\\ &\text{de longueur supérieure ou égale à } l.\end{aligned} \tag{4.5}$$

On notera $\lambda_0 := v_0 - \xi_0$ et $V^{Q_0}_{\delta_0,\lambda_0} := V_{\delta,\lambda,\xi}$. Par construction,

$$\Phi' := \Phi - \sum_{(\delta,\lambda,\xi)\in\Theta} F_{\delta,\lambda,\xi} \text{ est un élément de } \mathscr{F}^{n-1}_{\chi_0}. \tag{4.6}$$

On note $V_{\Phi'}$ (resp. $V_{F_{\delta,\lambda,\xi}}$) le $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-module engendré par Φ' (resp. $F_{\delta,\lambda,\xi}$) sous l'action régulière gauche. Comme $F_{\delta,\lambda,\xi}$ est un coefficient de $V_{\delta,\lambda,\xi}$:

$$V_{F_{\delta,\lambda,\xi}} \text{ est un sous-quotient de } V_{\delta,\lambda,\xi}. \tag{4.7}$$

L'application de $V_\Phi \oplus (\oplus_{(\delta,\lambda,\xi)\in\Theta} V_{F_{\delta,\lambda,\xi}})$ dans $C^\infty(G_0)$ donnée par la somme des fonctions est un morphisme de $(\mathfrak{g}_0, K_0)$-modules dont l'image contient $V_{\Phi'}$. Donc, d'après (4.5) et l'hypothèse faite sur $V = V_\Phi$:

$$\text{Les } K_0\text{- types de } V_{\Phi'} \text{ sont de longueur supérieure ou égale à } l. \tag{4.8}$$

On remarque, comme ci-dessus, que V_Φ est contenu dans la somme de $V_{\Phi'}$ et des $V_{F_{\delta,\lambda,\xi}}, (\delta,\lambda,\xi)\in\Theta$. L'hypothèse de récurrence s'applique à $V_{\Phi'}$, d'après (4.6) et (4.8). Donc les équations (4.5), (4.6) et (4.7) montrent que V_Φ est de la forme voulue. Ceci achève la preuve du Théorème 3. $\square$

Appendice A. Familles de représentations

A.1.

On adapte au cas réel les définitions et résultats de [12, Appendice B].

Définition A.1. Soit $\mathcal{O}$ une variété C^∞. On appelle famille C^∞ de représentations C^∞ admissibles de G (resp. $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles) toute famille de G-modules admissibles (resp. $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles) indexée par $\mathcal{O}$, $(\pi_\nu, V_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$, telle que:

(i) L'espace V_ν est un espace de Fréchet (resp. un espace vectoriel) V indépendant de ν. De plus la représentation π_ν restreinte à K est indépendante de ν.
(ii) Pour tout $v\in V$, l'application $(\nu, g)\mapsto\pi_\nu(g)v$ est C^∞ sur $\mathcal{O}\times G$ à valeurs dans V (resp. l'application $\nu\mapsto\pi_\nu(u)v$ est à valeurs dans un espace de dimension finie et est C^∞ pour tout $u\in U(\mathfrak{g})$).

Lemme A.1. *Soit D un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathcal{O}$.*

(i) *On définit une famille $(D.\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ de représentations admissibles de G (resp. de $(\mathfrak{g}, K)$-modules admissibles) dans $V\times V$ par:*

$$D.\pi_\nu(\cdot)(v_1, v_2) = (\pi_\nu(\cdot)v_1 + D(\pi_\nu(\cdot)v_2), \pi_\nu(\cdot)v_2) \tag{A.1}$$

où v_1, $v_2\in V, \cdot\in G$ (resp. K ou $\mathfrak{g}$). Alors $D.\pi_\nu$ admet $V_\nu\times\{0\}$ comme sous-représentation, qui est équivalente à π_ν, et le quotient par cette représentation est également isomorphe à π_ν.

(ii) *La famille* $(D.\pi_v)_{v\in\mathcal{O}}$ *est une famille* C^∞ *de représentations* C^∞ *admissibles de* G (*resp. de* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules admissibles*).

(iii) *Si* $(\pi_v, V_v)_{v\in\mathcal{O}}$ *est une famille* C^∞ *de représentations* C^∞ *admissibles de* G, *on note* $((\pi_v)_{(K)}, (V_v)_{(K)})$ *le* $(\mathfrak{g}, K)$*-module admissible de ses vecteurs K-finis. Alors* $((\pi_v)_{(K)}, (V_v)_{(K)})_{v\in\mathcal{O}}$ *est une famille* C^∞ *de* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules admissibles et*

$$(D.\pi_v)_{(K)} = D.((\pi_v)_{(K)}).$$

(iv) *Soit* $P = LN$ *un sous-groupe parabolique de* G *avec* $L = P\cap\theta(P), (\pi_v, V_v)_{v\in\mathcal{O}}$ *une famille* C^∞ *de représentations* C^∞, *admissibles, de* L. *On note* (π, V) *la restriction de* π_v *à* $L\cap K$. *La restriction des fonctions à* K *induit un isomorphisme de l'espace de l'induite* C^∞ *de* P *à* $G, ind_{P\uparrow G}\pi_v$, *sur l'espace* $C^\infty(K,\pi) := \{\varphi : K\to V \mid \varphi$ *est* C^∞, $\varphi(kl) = \pi(l^{-1})\varphi(k),\ k\in K,\ l\in L\cap K\}$. *La famille de représentations de* G, $(ind_{P\uparrow G}\pi_v)_{v\in\mathcal{O}}$, *dans sa réalisation dans* $C^\infty(K,\pi)$, *dite réalisation compacte, est une famille* C^∞ *de représentations* C^∞ *admissibles. En outre*:

$$ind_{P\uparrow G}(D.\pi_v) \text{ s'identifie naturellement à } D.ind_{P\uparrow G}\pi_v. \tag{A.2}$$

(v) *De plus*:

$$D.(ind_{P\uparrow G}\pi_v)_{(K)} \text{ et } I^P(D.(\pi_v)_{(L\cap K)}) \text{ sont des } (\mathfrak{g}, K)\text{-modules isomorphes.} \tag{A.3}$$

Démonstration. (i) se vérifie immédiatement. Pour (ii), voir une démonstration analogue à celle du Lemme 16(ii) de [12].

Le fait que la famille $((\pi_v)_{(K)}, (V_v)_{(K)})_{v\in\mathcal{O}}$ soit une famille C^∞ résulte du (ii) de la Définition A.1. L'égalité $(D.\pi_v)_{(K)} = D.(\pi_v)_{(K)}$ est immédiate, ce qui prouve (iii). Prouvons (iv). Soit $g\in G$. On note $g = k_P(g)l_P(g)n_P(g)$ où $k_P(g)\in K, l_P(g)\in\exp(\mathfrak{s}\cap\mathfrak{l}), n_P(g)\in N_P$. Alors l'application $g\mapsto(k_P(g), l_P(g), n_P(g))$ est un difféomorphisme et

$$((ind_{P\uparrow G}\pi_v)(g)\varphi)(k) = \pi_v((l_P(g))^{-1})\varphi(k_P(g^{-1}k)).$$

On en déduit aisément (iv). Enfin (v) est immédiat. □

A.2.

On rappelle qu'un module d'Harish-Chandra pour G est un $(\mathfrak{g}, K)$-module de type fini dont tout élément est $Z(\mathfrak{g})$-fini.

Si V est un module d'Harish-Chandra, on note V' le $(\mathfrak{g}, K)$-module contragrédient formé des éléments K-finis du dual de V. On note $(\pi, \bar{V})$ la complétion à croissance modérée de V (cf. [23, Section 11.5.6]): c'est une représentation C^∞ dans le Fréchet $\bar{V}$, dont le $(\mathfrak{g}, K)$-module est égal à V. Notons que V' s'identifie au sous-espace $\bar{V}'_{(K)}$

des vecteurs K-finis du dual topologique $\bar{V}'$ de $\bar{V}$. En effet, si $\bar{v}' \in \bar{V}'_{(K)}, \bar{v}'$ définit par restriction une forme linéaire, v', sur V. D'après la densité de V dans $\bar{V}$, cette restriction n'est nulle que si $\bar{v}'$ est nul. Donc $\bar{v}' \mapsto v'$ est une injection. Maintenant, la dimension de la composante isotypique de type $\gamma \in \widehat{K}$ de $\bar{V}'_{(K)}$ est égale à la dimension de la composante isotypique de type $\gamma' \in \widehat{K}$ de V. Il en va de même pour la dimension de la composante isotypique de type $\gamma \in \widehat{K}$ de V'. On en déduit que l'application $\bar{v}' \mapsto v'$ est bijective comme annoncé.

Pour $v \in \bar{V}, v' \in \bar{V}'$, on note:

$$c_{v,v'}(g) = \langle \pi(g^{-1})v, v' \rangle, \quad g \in G \tag{A.4}$$

le coefficient de $\bar{V}$ relatif à (v, v'). On note Coeff $(\bar{V})$ l'ensemble des coefficients de $\bar{V}$ et Coeff (V) l'ensemble de ceux pour lesquels $v \in V$.

Lemme A.2. *Si $\Phi = c_{v_0,v'_0} \in \mathrm{Coeff}(V)$, soit V_Φ le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $C^\infty(G)$ engendré par l'action régulière gauche de $\mathfrak{g}$ et K sur Φ.*

(i) *L'application $v \in V \mapsto c_{v,v'_0} \in C^\infty(G)$ entrelace l'action de $\mathfrak{g}$ (resp. K) sur V et l'action régulière gauche sur $C^\infty(G)$.*
(ii) *Si v_0 engendre V comme $(\mathfrak{g}, K)$-module, l'application précédente est un morphisme surjectif sur V_Φ.*
(iii) *Si v_0 engendre V comme $(\mathfrak{g}, K)$-module et v'_0 est élément de V' et engendre V' comme $(\mathfrak{g}, K)$-module, ce morphisme est un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules.*

Démonstration. (i) et (ii) résultent des définitions. Il faut voir qu'avec les hypothèses de (iii), $c_{v,v'_0} = 0$ implique $v = 0$. Mais, si c_{v,v'_0} est une fonction C^∞, par différentiation, on en déduit que v est orthogonal au sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de V' engendré par v'_0, i.e. V'. Mais la dualité entre V et V' est séparante. Donc $v = 0$ comme désiré. □

A.3.

On conserve les notations des sections précédentes.

Soit $(\pi_\nu, V_\nu)_{\nu \in \mathcal{O}}$ une famille C^∞ de représentations C^∞ admissibles de G. On appelle dérivée de coefficients de $(\pi_\nu, V_\nu)_{\nu \in \mathcal{O}}$ en $\nu = \nu_0$, toute fonction sur G de la forme:

$$g \mapsto D \langle \pi_\nu(g^{-1})v, v' \rangle_{|\nu=\nu_0}$$

où $v \in V, v' \in V'$ et D est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathcal{O}$.

Définition A.2. On appelle dérivée successive de $(\pi_\nu, V_\nu)_{\nu \in \mathcal{O}}$, toute famille obtenue par itération du processus de dérivation. On a la même notion pour les coefficients.

Lemme A.3. *Les coefficients de $D.\pi_{v_0}$ sont les sommes d'un coefficient de π_{v_0} avec des dérivées par rapport à D en v_0 de coefficients de $(\pi_v)_{v\in\mathcal{O}}$.*

Démonstration. Cf. [12, preuve du Lemme 16(iii)]. $\square$

Remarque A.1. Si $j(v)$ est une fonction C^∞ sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans V' et $v\in V, D\langle \pi_v(g^{-1})v, j(v)\rangle_{|v=v_0}$ est un coefficient de $D.\pi_{v_0}$. En effet,

$$D\langle \pi_v(g^{-1})v, j(v)\rangle_{|v=v_0} = \langle \pi_{v_0}(g^{-1})v, Dj(v)_{|v=v_0}\rangle + D\langle \pi_v(g^{-1})v, j(v_0)\rangle_{|v=v_0},$$

et on utilise le Lemme précédent.

References

[1] E.P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space. II. Eisenstein integrals, J. Funct. Anal. 109 (2) (1992) 331–441.

[2] E.P. van den Ban, J. Carmona, P. Delorme, Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, J. Funct. Anal. 139 (1) (1996) 225–243.

[3] E.P. van den Ban, H. Schlichtkrull, Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces, J. Reine Angew. Math. 380 (1987) 108–165.

[4] J.-L. Brylinski, P. Delorme, Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein, Invent. Math. 109 (3) (1992) 619–664.

[5] J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, J. Reine Angew. Math. 491 (1997) 17–63.

[6] J. Carmona, P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs: équation fonctionnelle, J. Funct. Anal. 122 (1) (1994) 152–221.

[7] J. Carmona, P. Delorme, Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, Invent. Math. 134 (1) (1998) 59–99.

[8] L. Clozel, P. Delorme, Le théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, Invent. Math. 77 (3) (1984) 427–453.

[9] P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs: tempérance, majorations. Petite matrice B, J. Funct. Anal. 136 (2) (1996) 422–509.

[10] P. Delorme, Troncature pour les espaces symétriques réductifs, Acta Math. 179 (1) (1997) 41–77.

[11] P. Delorme, Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, Ann. Math. (2) 147 (2) (1998) 417–452.

[12] P. Delorme, Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif p-adique, in: P. Delorme, M. Vergne (Eds.), Non Commutative Harmonic Analysis. In honor of Jacques Carmona, Vol. 220, Progr. Math., Birkhäuser, 2004, pp. 131–176.

[13] P. Delorme, Sur le Théorème de Paley-Wiener d'Arthur, preprint, 2003.

[14] J. Franke, Harmonic analysis in weighted L_2-spaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 31 (2) (1998) 181–279.

[15] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass–Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. Math. (2) 104(1) (1976) 117–201.

[16] H. Hecht, W. Schmid, Characters, asymptotics and n-homology of Harish-Chandra modules, Acta Math. 151 (1–2) (1983) 49–151.

[17] A.W. Knapp, E.M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups. II, Invent. Math. 60 (1) (1980) 9–84.

[18] S. Souaifi, Fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-finies sur un espace symétrique réductif, J. Funct. Anal. 195 (2) (2002) 371–443.
[19] D.A. Vogan, Jr., The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. II, preprint.
[20] D.A. Vogan Jr., Representations of Real Reductive Lie Groups, Birkhäuser, Boston, MA, 1981.
[21] J.-L. Waldspurger, Cohomologie des espaces de formes automorphes (d'après J. Franke), Astérisque (1997), 241, Exp. No. 8093, 139–156, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96.
[22] N.R. Wallach, Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups, Lie Group Representations, I (College Park, MD., 1982/1983), Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1983, pp. 287–369.
[23] N.R. Wallach, Real Reductive Groups. II, Academic Press Inc., Boston, MA, 1992.