Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif p-adique

Patrick Delorme

En l'honneur de Jacques Carmona

Introduction

Soit G le groupe des points sur $\mathbf{F}$ d'un groupe linéaire algébrique réductif et connexe défini sur $\mathbf{F}$, où $\mathbf{F}$ est un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note A_G le plus grand tore déployé du centre de G.

On note $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des représentations lisses de G sur des espaces vectoriels complexes, i.e. dont tout vecteur est fixé par un sous-groupe compact ouvert. Le centre de Bernstein, $ZB(G)$, est l'algèbre des transformations naturelles du foncteur identité de $\mathcal{M}(G)$. Pour V objet de $\mathcal{M}(G)$, tout élément z de $ZB(G)$ définit un endomorphisme z_V de V. Pour ω un élément de l'ensemble $\hat{ZB}(G)$, des caractères de $ZB(G)$, i.e. des morphismes de l'algèbre $ZB(G)$ dans $\mathbb{C}$, on note V_ω, l'espace
$\{v \in V | il\ existe\ n \in \mathbb{N}\ avec\ (z_V - \omega(z))^n v = 0,\ \ pour\ tout\ z \in ZB(G)\}$.
Si ν est un caractère non ramifié de G et $ZB(G)$ agit sur une représentation (π, V) par ω, $ZB(G)$ agit sur le produit tensoriel $(\pi \otimes \nu, V)$, par un caractère, qu'on note ω_ν.

On note $\mathcal{A}(G)$ l'espace des fonctions sur G qui sont biinvariantes par un sous-groupe compact ouvert et qui sont $ZB(G)$-finies. On montre facilement que c'est aussi l'espace des coefficients des représentations admissibles de G. Le groupe $G \times G$ agit sur cet espace : par représentation régulière gauche (resp. droite) pour le premier (resp. deuxième) facteur.

On dispose aussi de l'espace $\mathcal{A}_{temp}(G)$ formé des éléments tempérés de $\mathcal{A}(G)$.

Si $P = MN$ est un sous groupe parabolique de G, π une représentation de M sur laquelle $ZB(M)$ agit par un caractère θ, $ZB(G)$ agit par un caractère de $ZB(G)$, $\tilde{\theta}$, sur la représentation induite $i_{G,P}\pi$. L'induction est ici normalisée de telle sorte que les induites de représentations unitaires soient unitaires.

On note $P_0 = M_0N_0$ un sous-groupe parabolique minimal de G et on note $\mathcal{P}_{st}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant P_0. Si $P = MN$ est un

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 22E46; Secondary 17B10, 20G20.

sous-groupe parabolique contenant M_0, on note, par un abus de notation dans cette introduction (voir le corps du texte pour plus détails) , $\mathfrak{a}_M^*$, l'ensemble des caractères non ramifiés de A_M, ou de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, qui a une structure naturelle d'espace vectoriel. On note $\mathfrak{a}_0^*$ au lieu de $\mathfrak{a}_{M_0}^*$. On muni $\mathfrak{a}_0^*$ d'un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl, W^G. Par des identifications naturelles $\mathfrak{a}_0^*$ contient $\mathfrak{a}_M^*$. On note $\mathfrak{a}_P^{*+}$, l'ensemble des caractères non ramifiés de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et strictement P-dominants. On note $\overline{P}$ le sous groupe parabolique opposé à P.

Soit ω un caractère de $ZB(G)$. Le but de ce travail est d'introduire une filtration, $\mathcal{F}_\omega$, de $\mathcal{A}(G)_\omega$, où G agit par représentation régulière droite et de montrer (cf. Théorème 2) que le gradué $\mathcal{G}_\omega$ de celle-ci est naturellement isomorphe à la somme directe sur $P \in \mathcal{P}_{st}$, $\theta \in \hat{ZB}(M)$, $\nu \in \mathfrak{a}_P^{*+}$ tels que $\tilde{\theta}_\nu = \omega$ de

$$i_{G\times G, P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M)_\theta \nu)$$

et $\mathcal{A}_{temp}(M)_\theta \nu$ est l'espace des produits par ν des éléments de $\mathcal{A}_{temp}(M)_\theta$, muni de l'action de $M \times M$ donnée par la représentation régulière gauche (resp. droite) du premier (resp. deuxième facteur).

La preuve nécessite, entre autres, une description de $\mathcal{A}_{temp}(G)$ à l'aide des dérivées de coefficients de représentations induites que nous allons préciser. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique standard, δ une représentation irréductible de carré intégrable de M (la représentation est unitaire et les coefficients sont de carré intégrable modulo le centre de M). Lorsque ν décrit l'ensemble $ImX(M)$ des caractères non ramifiés unitaires de M, la représentation induite $i_{G,P}(\delta \otimes \nu)$ peut être réalisée dans un espace indépendant de ν, par restriction des fonctions à un bon sous-groupe compact ouvert maximal, de même que sa contragrédiente. On peut alors considérer les coefficients de ces représentations, correspondants à des vecteurs fixés de ces réalisations:

$$E_\nu(g) = < i_{G,P}(\delta \otimes \nu)(g)v, v' >, g \in G.$$

Alors pour g fixé, $E_\nu(g)$ est une application C^∞ sur la variété $ImX(M)$. Si on applique à cette application différentiable, un opérateur différentiel sur $ImX(M)$, D, l'application, pour ν fixé, $g \mapsto DE_\nu(g)$ est un élément de $\mathcal{A}_{temp}(G)$. On note $\mathcal{A}_{temp}(G, \delta)$, l'espace des fonctions ainsi obtenues lorsque D varie et ν est égal au caractère trivial. Alors nous montrons (cf. Théorème 1) que l'espace $\mathcal{A}_{temp}(G)$ est égal à la somme directe, sur les (M, δ), comme ci-dessus, modulo conjugaison par un élément de G, des espaces $\mathcal{A}_{temp}(G, \delta)$. Ce résultat est une conséquence de la caractérisation par Harish-Chandra de la transformée de Fourier de l'espace de Schwartz de G (cf. [W2]) et de l'utilisation de la description du centre de Bernstein (cf. [BD]).

Décrivons maintenant la filtration $\mathcal{F}_\omega$. On rappelle à cette fin la notion de terme constant et d'exposant d'un élément de $\mathcal{A}(G)$ le long d'un sous-groupe parabolique $P = MN$, contenant M_0. On note δ_P sa fonction module. Soit λ un élément du plus grand tore déployé, A_M, du centre de M, qui est strictement $\overline{P}$-dominant. Alors, on sait que, pour tout $f \in \mathcal{A}(G)$, il existe un unique élément $f_P \in \mathcal{A}(M)$ tel que, pour tout $m \in M$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$: $f_P(m\lambda^n) = \delta_P^{-1/2}(m\lambda^n) f(m\lambda^n)$.

Cet élément ne dépend pas de choix de λ. Comme nous sommes amenés à considérer des familles de fonctions, il est important pour nous d'utiliser le fait, du à J. Bernstein (cf. [B], voir aussi [Bu], Theorem 1), que N peut être choisi indépendamment de f biinvariante par un sous-groupe compact ouvert donné, pour un choix judicieux de λ, dépendant de ce sous-groupe compact ouvert et de m.

On appelle exposant de f le long de P tout caractère à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ de A_M qui intervient comme sous-quotient de la représentation, par action régulière droite de A_M, dans l'espace, de dimension finie, des translatés de f_P par les éléments de A_M.

On appelle exposant asymptotique de f, tout exposant d'une fonction obtenue à l'aide des translatés de f, à gauche et à droite, par des éléments de G.

On note $\overline{\mathfrak{a}}_P^{*+}$, le cône convexe fermé des éléments P-dominants de $\mathfrak{a}_P^*$. Si $\nu \in \mathfrak{a}_P^*$, on note ν_P sa projection sur ce cône convexe fermé. Si χ est un caractère continu, à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, de A_M, son module est un caractère non ramifié de A_M, noté, par abus de notation dans cette introduction, $Re\chi$.

On note $\mathcal{E}_\omega$ l'ensemble des paires (P, χ), où $P \in \mathcal{P}_{st}$ et χ est un exposant asymptotique le long de $\overline{P}$, d'au moins un élément de $\mathcal{A}(G)_\omega$. On voit facilement que c'est un ensemble fini. On note $\mathcal{E}_\omega^0$, l'ensemble des éléments (P, χ) de $\mathcal{E}_\omega$ pour lesquels la norme de $Re\chi_P$ est minimale. On définit par récurrence $\mathcal{E}_\omega^{n+1}$ comme l'ensemble des éléments (P, χ) de $\mathcal{E}_\omega \setminus \cup_{k=0\ldots n}\mathcal{E}_\omega^k$ pour lesquels la norme de $Re\chi_P$ est minimale.

Alors, la filtration $\mathcal{F}_\omega$ est définie comme suit : $\mathcal{F}_\omega^n$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}(G)_\omega$ dont les exposants asymptotiques sont éléments de $\cup_{k=0\ldots n}\mathcal{E}_\omega^k$.

La description d'une application de $\mathcal{F}_\omega^n/\mathcal{F}_\omega^{n-1}$ dans l'espace décrit plus haut est relativement simple à l'aide des $f_{\overline{P}}$. La détermination de l'image est plus délicate. Elle repose d'une part sur un Lemme de Langlands décrivant le comportement asymptotique de coefficients de certaines représentations induites. D'aute part, il faut parvenir à différentier ce résultat et en tirer partie.

C'est à cet effet que nous nous intéressons aux coefficients de familles de représentations, et à leurs dérivées par rapport au paramètre de la famille. On utilise également la description de $\mathcal{A}_{temp}(G)$ (et plus généralement de $\mathcal{A}_{temp}(M)$) explicitée ci-dessus.

Ces résultats sont l'analogue pour les groupes p-adiques de résultats de J. Franke pour les formes automorphes (cf. [F]). Ils font suite à des résultats de S. Souaifi [Sou] sur les espaces symétriques réductifs réels, eux-mêmes inspirés des travaux de Franke et de leur présentation par J.L. Waldspurger (cf. [W1]). On trouve trace de l'utilisation de la projection sur des cônes convexes fermés dans le travail de H. Hecht et W. Schmid (cf.[HS]), pour la classification de Langlands des représentations des groupes réels, et dans celui de Carmona [Car], où ce dernier montre en outre le rôle tenu par ces projections dans la classification de D. Vogan. Nous nous sommes largement inspirés du travail de S.Souaifi.

Remerciements. Je remercie Jean-Pierre Labesse, qui a répondu à mes nombreuses questions de novice dans le sujet. Je remercie Julien Cassaigne de m'avoir fourni une démonstration du Lemme 13.

Je remercie vivement le rapporteur pour ses nombreuses indications, remarques et

suggestions. Le rapporteur a notamment suggéré d'étendre nos résultats aux cas de corps locaux de caractéristique non nulle. Nous n'avons pas eu le temps de traiter cette intéressante question. Cela nécessiterait au minimum un changement important dans les références.

1 Notations, rappels et compléments

1.1

On va utiliser largement des notations et conventions de [W2]. Soit $\mathbf{F}$ un corps local non archimédien, de caractéristique 0 de corps résiduel $\mathbf{F}_q$. On considère divers groupes algébriques définis sur $\mathbf{F}$, et on utilisera des abus de terminologie du type suivant suivant : “soit A un tore déployé” signifiera “soit A le groupe des points sur $\mathbf{F}$ d'un tore défini et déployé sur $\mathbf{F}$”. Soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe. On fixe un sous-tore A_0 de G, déployé et maximal pour cette propriété. On note M_0 son centralisteur. On fixe un sous-groupe parabolique minimal de G, contenant M_0, P_0. Un sous-groupe parabolique P de G est dit semi-standard (resp. standard) s'il contient M_0 (resp. P_0). Alors il contient un unique sous-groupe de Lévi M (noté aussi M_P) contenant M_0 appelé sous-groupe de Lévi semi-standard ou simplement sous-groupe de Lévi de P. Son radical unipotent sera noté N ou N_P. Pour un sous-groupe parabolique semi-standard, l'expression $P = MN$ référera à cette décomposition. On note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de Lévi M.

Si H est un groupe algébrique, on note $Rat(H)$ le groupe des caractères algébriques de H définis sur $\mathbf{F}$. Si V est un espace vectoriel réel, on note V^* son dual et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G. On note $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Rat(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères rationels de G à A_G induit un isomorphisme

$$Rat(G)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \simeq Rat(A_G)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

On dispose de l'application canonique :

$$H_G : G \to \mathfrak{a}_G \tag{1.2}$$

définie par

$$e^{<H_G(x), \chi>} = |\chi(x)|_{\mathbf{F}},\ x \in G, \chi \in Rat G \tag{1.3}$$

où $|.|_{\mathbf{F}}$ est la valuation normalisée de $\mathbf{F}$. Le noyau de H_G, qui est noté G^1, est l'intersection des noyaux des caractères de G de la forme $|\chi|_{\mathbf{F}}$, $\chi \in Rat(G)$. On notera $X(G) = \mathrm{Hom}(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. On a des notations similaires pour des sous-groupes de Lévi semi-standards.

Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard, on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$. On note $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{F}}$, resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbf{F}}$ l'image de G, resp. A_G, par H_G. Alors G/G^1 est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini (on dira réseau dans la suite au lieu de $\mathbb{Z}$-module libre de type fini) isomorphe à $\mathfrak{a}_{G,\mathbf{F}}$. Soit M un sous-groupe de Lévi semi-standard. Alors les inclusions $A_G \subset A_M \subset M \subset G$, déterminent un morphisme surjectif $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{F}} \to \mathfrak{a}_{G,\mathbf{F}}$, resp. un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbf{F}} \to \tilde{\mathfrak{a}}_{M,\mathbf{F}}$, qui se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$, resp injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$. La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G. \tag{1.4}$$

Il y a une surjection

$$(\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}} \to X(G) \to 1 \tag{1.5}$$

qui, en utilisant la définition (1.1) de $\mathfrak{a}_G$ avec A_G , associe, à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|_{\mathbf{F}}^s$. Le noyau est un réseau et cela définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G) \simeq \mathbb{C}^{*d}$, où $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_M$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$ un élément se projetant sur χ par l'application (1.5). La partie réelle $Re\,\lambda \in \mathfrak{a}_G^*$ est indépendante du choix de λ. Nous la noterons $Re\, ln\, \chi$. Si $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, le module du caractère χ appartient à $X(G)$ et on note $Re\, ln\, \chi$ l'élément de $\mathfrak{a}_G^*$ correspondant. De même, si $\chi \in \mathrm{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$, son module se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$ et on note encore $Re\, ln\, \chi$ l'élément de $\mathfrak{a}_G^*$ correspondant.

On définit $Im\, X(G) := \{\chi \in X(G) | Re\, ln\, \chi = 0\}$ l'ensemble des éléments unitaires de $X(G)$.

De l'isomorphisme naturel (1.1) on déduit aisément l'égalité :

$$A_G^1 = A_G \cap G^1. \tag{1.6}$$

On voit facilement que A_G^1 est le plus grand sous-groupe compact de A_G. L'inclusion de A_G dans A_0 induit alors une injection de A_G/A_G^1 dans A_0/A_0^1. Le choix d'une uniformisante permet de relever A_0/A_0^1 dans un réseau de A_0, $\Lambda(M_0)$: c'est l'image du réseau des sous-groupes à un paramètre de A_0 par l'évaluation en l'uniformisante. Le réseau des sous-groupes à un paramètre de A_M a pour image un sous-réseau de $\Lambda(M_0)$, $\Lambda(M)$, qui relève A_M/A_M^1.

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G, qui s'identifie à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_M^*$. Si $P \in \mathcal{P}(M)$, on note $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples.

Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard, de sous-groupe de Lévi M, on note $\Lambda(P)^{--}$ l'ensemble des $\lambda \in \Lambda(M)$ qui sont strictement P-antidominants, i.e. tels que $|\alpha(\lambda)| < 1, \alpha \in \Sigma(P)$.

On pose $\Delta_0 = \Delta(P_0)$ et $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{P_0}$. On note W^G le groupe de Weyl de G relativement à A_0, qui agit sur $\mathfrak{a}_0$. On choisit un produit scalaire W^G-invariant sur $\mathfrak{a}_0$.

On note :

$$^+\mathfrak{a}_P^* (\text{resp.}\,^+\overline{\mathfrak{a}}_{\mathrm{P}}^*) = \{\nu \in \mathfrak{a}_{\mathrm{M}}^* | \nu = \sum_{\alpha \in \Delta(\mathrm{P})} \mathrm{x}_\alpha \alpha \text{où} \mathrm{x}_\alpha > 0,\ \text{resp.} \mathrm{x}_\alpha \geq 0\}, \tag{1.7}$$

$$\mathfrak{a}_P^{*+} \text{ (resp. } \overline{\mathfrak{a}}_P^{*+} = \{\nu \in \mathfrak{a}_M^* | (\nu|\alpha) > 0 \ \ (resp. \geq 0), \alpha \in \Sigma_P.\}$$

On note $\overline{\mathfrak{a}}_0^+ = \overline{\mathfrak{a}}_{P_0}^+$. On définit:

$$\overline{M}_0^+ = H_{M_0}^{-1}(\overline{\mathfrak{a}}_0^+),\ \overline{A}_0^+ = \overline{M}_0^+ \cap A_0.$$

On fixe un sous-groupe compact maximal K de G, qui est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G (cf. [T]). Alors, pour tout sous-groupe de Lévi M d'un sous-groupe parabolique semi-standard, $P = MN$, $K \cap M$ vérifie la même propriété pour M. En particulier on voit que $K \cap A_0 = A_0^1$. Le groupe M_0^1 est compact et on a la décomposition:

$$G = \cup_{m \in \overline{M}_0^+/M_0^1} KmK\,. \tag{1.8}$$

1.2

On note $C^\infty(G)$ (resp. $\mathcal{D}(G)$), l'espace des fonctions localement constantes sur G (resp. localement constantes et à support compact) et le dual de $\mathcal{D}(G)$ est appelé espace des distributions sur G. On note $C_{lisse}(G)$ l'espace des fonctions lisses sur G, i.e. des fonctions invariantes à gauche et à droite par un sous-groupe compact ouvert de G. Une représentation de G dans un espace vectoriel complexe est dite lisse si tout vecteur est lisse, i.e. invariant par un sous-groupe compact ouvert. Alors G agit sur $C^\infty(G)$ (resp. $C_{lisse}(G)$, $\mathcal{D}(G)$) par les représentations régulières gauche et droite, de façon lisse pour $C_{lisse}(G)$, $\mathcal{D}(G)$.

On note $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre de convolution des distributions localement constantes, à support compact sur G. La multiplication par un choix de mesure de Haar définit un isomorphisme entre $\mathcal{D}(G)$ et $\mathcal{H}(G)$. On fera parfois cette identification sans référence explicite. A toute représentation lisse de G correspond une représentation non dégénérée de $\mathcal{H}(G)$, notée de même, ce qui établit une équivalence de catégories.

1.3

Le centre de Bernstein sera noté $ZB(G)$ (cf. [BD]). C'est l'ensemble des transformations naturelles du foncteur identité de la catégorie, $\mathcal{M}(G)$, des représentations lisses de G (ou des $\mathcal{H}(G)$-modules non dégénérés). Ce centre admet une autre description en termes de distributions : il s'identifie à l'ensemble des distributions T sur G qui sont invariantes par conjugaison et essentiellement compactes, ce qui veut dire que pour tout $f \in \mathcal{D}(G)$, $T * f$ est égal à $f * T$ et est à support compact (c'est alors un élément de $\mathcal{D}(G)$). La correspondance se fait en deux temps.

Si z est un élément de $ZB(G)$, il définit un endomorphisme de toute représentation lisse de G (on dira aussi G-module lisse), V, noté z_V. On définit un endomorphisme α_z de $\mathcal{D}(G)$ qui commute aux représentations régulières gauche et droite de G en posant

$$\alpha_z(f) = z_{\mathcal{D}(G)} f,\ \ f \in \mathcal{D}(G)$$

où G agit par représentation régulière gauche sur $\mathcal{D}(G)$. La commutation à la représentation régulière droite provient des propriétés de z.

Si $f \in C^\infty(G)$, on note $\check{f}$ l'élément de $C^\infty(G)$ défini par

$$\check{f}(g) = f(g^{-1}),\ g \in G.$$

Par transposition, on en déduit une opération sur les distributions, notée de même.

On définit une distribution T_z sur G, en posant

$$T_z(\check{f}) = (\alpha_z(f))(e),\ f \in \mathcal{D}(G). \tag{1.9}$$

On voit que α_z est entièrement déterminée par T_z. L'équation suivante, valable pour tout G-module lisse, (π, V), montre comment retrouver z à l'aide de T_z, ou α_z :

$$\alpha_z(f) = T_z * f,\ \ z_V(\pi(f)v) = \pi(\alpha_z(f))v,\ v \in V,\ f \in \mathcal{D}(G). \tag{1.10}$$

Si (π, V) est une représentation lisse de G, on note $\tilde{V}$ l'espace des vecteurs lisses de la représentation de G dans le dual, V^*, de V. C'est une représentation lisse de G, notée $\tilde{\pi}$, qu'on appellera représentation contragrédiente de V. On appelle coefficient d'une représentation lisse, tout coefficient issu de la dualité entre V et $\tilde{V}$, i.e. toute fonction sur G de la forme $g \mapsto < gv, \tilde{v} >$, pour $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$, qui est alors une fonction lisse. On dit que (π, V) est admissible, si, pour tout sous-groupe compact ouvert, la dimension de l'espace des invariants est finie. La contragrédiente d'une représentation admissible est admissible et $\tilde{\tilde{V}}$ s'identifie à V. Si z est un élément de $ZB(G)$, et T est la distribution correspondante, $\check{T}$ possède les mêmes propriétés que T et est associée à un élément de $ZB(G)$, noté $\check{z}$. Montrons que, pour toute représentation lisse (π, V) de G, on a :

$$< z_V v, \tilde{v} >=< v, \check{z}_{\tilde{V}} \tilde{v} > . \tag{1.11}$$

Pour cela, v et $\tilde{v}$ étant fixés, on choisit un sous-groupe compact ouvert fixant v et $\tilde{v}$. On note β la mesure de Haar de ce sous-groupe compact ouvert, divisé par son volume pour la mesure de Haar de G qu'on a choisie. On regarde β comme un idempotent de $\mathcal{H}(G)$. Alors, comme $\pi(\beta)v = v$, on a, grâce à (1.9), (1.10) :

$$< z_V v, \tilde{v} >=< \pi(T * \beta)v, \tilde{v} >$$

$$< z_V v, \tilde{v} >=< v, \tilde{\pi}((T * \beta)\check{})\tilde{v} >$$

$$< z_V v, \tilde{v} >=< v, \tilde{\pi}(\check{\beta} * \check{T})\tilde{v} > \ .$$

Comme T est invariante par conjugaison, on a $\check{\beta} * \check{T} = \check{T} * \check{\beta}$. On conclut grâce au fait que $\tilde{\pi}(\check{\beta})\tilde{v} = \tilde{v}$.

1.4

Rappelons quelques faits bien connus. Soit P un sous-groupe parabolique semi-standard de G, M son sous-groupe de Lévi, N son radical unipotent. On note δ_P la fonction module de P, $p \mapsto |det(ad\, p, LieN)|_{\mathbf{F}}$, où ad est la représentation adjointe de P dans l'algèbre de Lie $Lie\, N$ de N. Si (π, V) est une représentation lisse de L, qu'on regarde comme représentation de P triviale sur N, on note $i_{G,P}(V)$ l'espace des fonctions localement constantes de G dans V, f, telles que

$$f(gp) = \delta_P^{-1/2}(p)\pi(p^{-1})f(g),\ g \in G,\ p \in P, \tag{1.12}$$

espace que l'on munit de l'action régulière gauche de G, la représentation ainsi obtenue étant notée $i_{G,P}\pi$. Cette correspondance définit un foncteur exact de $\mathcal{M}(M)$ dans $\mathcal{M}(G)$.

Pour $(\pi, V) \in \mathcal{M}(G)$, on note $r_{P,G}(V)$, le P-module trivial sur N, quotient de V par le sous-espace engendré par les $\pi(n)v - v$, $v \in V, n \in N$, tensorisé par l'action de P sur $\mathbb{C}$ donnée par $\delta_P^{-1/2}$. On note $r_{P,G}\pi$ la représentation correspondante. Par restriction de P à M, $r_{P,G}$ définit un foncteur exact de $\mathcal{M}(G)$ dans $\mathcal{M}(M)$. Soit Q un autre sous-groupe parabolique semi-standard, U son radical unipotent, L son sous-groupe de Lévi. Soit $\mathcal{W}_{Q,P}$ un ensemble de représentants des doubles classes dans G sous (Q, P) $(G = \cup_{w\in\mathcal{W}_{P,Q}} QwP)$, qu'on peut choisir normalisant M_0. On suppose en outre que $\mathcal{W}_{Q,P}$ contient l'élément neutre. Pour $w \in \mathcal{W}_{P,Q}$, on note M^w ou $w.M = wMw^{-1}$, P^w ou $w.P = wPw^{-1}$, $L^{w^{-1}} = w^{-1}Lw$, $Q^{w^{-1}} = w^{-1}Qw$ et $\tilde{w}$ le foncteur de $\mathcal{M}(M \cap L^{w^{-1}})$ dans $\mathcal{M}(M^w \cap L)$ qui à chaque représentation lisse π de $M \cap L^{w^{-1}}$ associe la représentation lisse $\tilde{w}\pi$ notée aussi π^w, de $M^w \cap L$ définie par

$$\tilde{w}\pi(x) = \pi(w^{-1}xw),\ x \in M^w \cap L. \tag{1.13}$$

Alors (cf. [BZ]) le foncteur

$$\Gamma := r_{Q,G} \circ i_{G,P} : \mathcal{M}(M) \to \mathcal{M}(L) \tag{1.14}$$

admet une filtration finie par des sous-foncteurs dont les sous-quotients sont

$$\Gamma_w = i_{L,P^w\cap L} \circ \tilde{w} \circ r_{Q^{w^{-1}}\cap M,M},\ w \in \mathcal{W}_{P,Q}. \tag{1.15}$$

Soit P un sous-groupe parabolique standard de sous-groupe de Lévi M, $\overline{P}$ le sous-groupe parabolique opposé. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G totalement décomposé relativement à M_0 au sens de [Bu], section 1.1 et on note $\Lambda^{--}(P, H)$ l'ensemble des éléments strictement P-antidominants du centre de M, qui sont (P, H) positifs au sens de [Bu], section 3.1. Les propriétés importantes de ces notions sont :

- L'ensemble $\Lambda^{--}(P, H)$ est non vide (cf. [BuK], Lemma (6.14) et sa preuve).
- Les sous-groupes compact ouverts totalement décomposés forment une base de voisinage de l'élément neutre de G (cf. [Bu], Lemma 1).

Le résultat suivant, du à J. Bernstein (cf [B], V.3.3, Lemme 31), est une forme renforcée d'un résultat de Casselman [C]. C'est une conséquence de son Théorème de stabilisation (cf. [B], V.3.3, Théorème 22, voir [Bu], Theorem 1 pour une preuve publiée) et de la description de la dualité entre $r_{P,G}(V)$ et $r_{\overline{P},G}(\tilde{V})$ (cf. [Bu], section

5 et [C]):

Soit (π, V) une représentation lisse de G. On note p (resp $\tilde{p}$) la projection de V (resp. $\tilde{V}$) sur $r_{P,G}(V)$ (resp. $r_{\overline{P},G}(\tilde{V})$). Il existe une unique forme bilinéaire M-invariante non dégénérée sur $r_{P,G}(V) \times r_{\overline{P},G}(\tilde{V})$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda^{--}(P)$, tout $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ (resp. pour tout sous-groupe ouvert compact fortement décomposé, H, tout $\lambda \in \Lambda^{--}(P, H)$, tout $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$ invariants par H) : (1.16)

$$\delta_P^{1/2}(\lambda^n) < r_{P,G}(\pi(\lambda^n)p(v)), \tilde{p}(\tilde{v}) >=< \pi(\lambda^n)v, \tilde{v} >$$

pour $n > n_0$ pour un n_0, (resp. pour tout $n > n_0$, où n_0 dépend seulement de λ et H, mais pas de V, ni de v, $\tilde{v}$).

1.5

La tensorisation par un élément χ de $X(G)$ définit une opération de $X(G)$ sur les représentations irréductibles, sous entendu lisses, de G, $(\chi, \pi) \mapsto \chi \otimes \pi$.

On rappelle qu'une représentation lisse cuspidale de G est une représentation lisse dont tous les modules de Jacquet, pour des sous-groupes paraboliques propres de G, sont nuls. En tenant compte des liens entre les modules de Jacquet pour des sous-groupes paraboliques conjugués, il suffit dans cette définition, d'utiliser des sous-groupes paraboliques standards.

On note $Irr_c(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations lisses irréductibles cuspidales de G, qu'on regarde comme réunion disjointes d'orbites de $X(G)$, chacune de ces orbites étant munie de la structure de quotient. On considère maintenant M un sous-groupe de Lévi semi-standard. On note $W(M)$ le quotient du normalisateur de M, dans G, par M qui agit aussi sur l'ensemble des représentations irréductibles de M. On note $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_{st}$), l'ensemble des sous-groupes de Lévi semi-standards (resp. standards). On note $\Omega(G)$ le quotient par G de la réunion disjointe sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des sous-groupes de Lévi semi-standards, M, de $Irr_c(M)$:

$$\Omega(G) := \cup_{M \in \mathcal{M}} Irr_c(M)/G. \tag{1.17}$$

Le quotient par G veut dire que si (M, ω) et (M', ω') sont conjuguées par un élément de G, elles sont identifiées. Chaque composante connexe Ω de $\Omega(G)$ s'identifie à une variété de la forme $D/W(M, D)$, où M est est un élément de l'ensemble $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}_{st}$), D une orbite de $X(M)$ dans $Irr_c(M)$ et où $W(M, D)$ est le sous-groupe de $W(M)$ qui préserve D. On peut remplacer $\mathcal{M}$ par $\mathcal{M}_{st}$, car :

Tout sous-groupe parabolique semi-standard est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard. (1.18)

Si $M' \in \mathcal{M}$ est conjugué à M, on peut bien sur décrire Ω à l'aide de M'. L'algèbre des fonctions régulières sur Ω est égale à l'algèbre des invariants de l'algèbre $\mathrm{Pol}(X(M))$, des fonctions polynômes sur $X(M)$, sous un groupe fini d'automorphismes, Γ_D. On a les inclusions

$$\begin{gathered}\mathrm{Pol}(\Omega) \approx \mathrm{Pol}(D/W(M,D)) = \mathrm{Pol}(D)^{W(M,D)} \subset \mathrm{Pol}(D) \\ \mathrm{Pol}(D) = \mathrm{Pol}(X(M))^{\Gamma_D} \subset \mathrm{Pol}(X(M)).\end{gathered} \tag{1.19}$$

Le résultat principal de [BD] s'énonce ainsi :

L'algèbre $ZB(G)$ s'identifie comme suit à l'algèbre, $\mathrm{Pol}(\Omega(G))$*, des fonctions régulières sur $\Omega(G)$. Pour une telle fonction, φ, il existe un unique élément, z, de $ZB(G)$ tel que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard, P, de sous-groupe de Lévi M, on ait* (1.20)

$$z_{i_{G,P}\omega} = \varphi(\omega) Id_{i_{G,P}\omega}, \quad \omega \in Irr_c(M).$$

La démonstration de ce théorème comporte un résultat de décomposition de la catégorie $\mathcal{M}(G)$.

Soit Ω une composante connexe de $\Omega(G)$, associée à un sous-groupe de Lévi semi-standard M, et D une orbite de $X(M)$ dans $Irr_c(M)$.

On introduit alors la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(G)$, $\mathcal{M}(\Omega)$ (cf. [BD], Proposition-Définition 2.8) :

Les objets de $\mathcal{M}(\Omega)$ sont les objets, V, de $\mathcal{M}(G)$ vérifiant la condition suivante :

V se plonge dans la somme $\oplus_{P\in\mathcal{P}(M)} i_{G,P}(r_{P,G}V)$, et, pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, tout les sous-quotients irréductibles de $r_{G,P}V$ sont conjugués par des éléments de $W(M)$ à des éléments de D. (1.21)

Alors $\mathcal{M}(G)$ est identique à la somme directe des catégories $\mathcal{M}(\Omega)$.

Le fait que seules les sommes directes soient nécessaires résulte, après induction, du fait que, pour un sous-groupe compact ouvert donné de G, H, seules un nombre fini de Ω correspondant à $M = G$ ont un élément ayant un vecteur non nul fixé par H (voir [W2], Thèorème VIII.1.2 pour un résultat plus fort). On écrit

$$\mathcal{M}(G) = \oplus_{\Omega\in\Omega(G)} \mathcal{M}(\Omega). \tag{1.22}$$

Définition 1 Soit ω un élément de $\Omega(G)$, ou bien $\omega \in Irr_c(M)$ avec $M \in \mathcal{M}$ et V un G-module lisse. On dit que V à un caractère infinitésimal (resp. caractère infinitésimal généralisé) de paramètre ω, si pour $n = 1$ (resp. s'il existe $n \in \mathbb{N}$) tel que pour tout élément z de $ZB(G)$, $(z_V - z(\omega))^n$ soit nul.

Si M est le sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard, on dispose d'une application naturelle de $\Omega(M)$ dans $\Omega(G)$, ce qui par composition des fonctions détermine un morphisme d'algèbres de $ZB(G)$ dans $ZB(M)$, $z \mapsto z^M$. Alors, on a (cf. [BD], Lemme 2.14) :

Soit P un sous-groupe parabolique de G, de sous-groupe de Lévi M et (π, V) un M-module lisse. L'endomorphisme de $i_{G,P}(V)$ associé à $z \in ZB(G)$ est égal à $i_{G,P} z_V^M$.

En particulier :

Si V est un M-module lisse de caractère infinitésimal de paramètre $\omega \in \Omega(M)$, alors $i_{G,P}(V)$ admet le caractère infinitésimal dont le paramètre est l'image dans $\Omega(G)$ de ω. (1.23)

Lemme 1 *Une représentation irréductible π possède un caractère infinitésimal de paramètre $\omega \in Irr_c(M)$ si et seulement si π est une sous-représentation de $i_{G,P'}\omega'$, où P' est un sous-groupe parabolique semi-standard (resp. standard) de Lévi M', ω' une représentation cuspidale de M' telle que (M', ω') est conjugué sous G à (M, ω).*

Démonstration. La partie si résulte de ce qui précède. Maintenant, toute représentation irréductible se plonge dans une induite $i_{G,P'}\omega'$, $\omega' \in Irr_c(M')$. Cela résulte par exemple de (1.21), (1.22). Or le caractère infinitésimal de $i_{G,P'}\omega'$ est de paramètre ω', d'après (1.20). D'où la partie seulement si, toujours grâce à (1.20). $\square$

On appelle exposant (resp. exposant central) d'un G-module lisse, (π, V) tout caractère de A_G (resp. $Z(G)$), à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, χ, tel que le sous-espace

$$V_\chi := \{v \in V \mid il\ existe\ n \in \mathbb{N}\ tel\ que\ (\pi(a) - \chi(a))^n v = 0,\ a \in A_G\ , resp.\ Z(G)\} \tag{1.24}$$

soit non nul. Si V est admissible $V = \oplus_\chi V_\chi$ et V donne V_χ est un foncteur exact de la catégorie des modules admissibles dans elle même. On appelle exposant (resp. exposant central) le long d'un sous-groupe parabolique semi-standard, P, d'un G-module lisse, (π, V) tout exposant (resp. exposant central) du M_P-module lisse $r_{P,G}(V)$ de $Z(G)$.

Il est clair que tout élément de $Z(G)$ définit un élément de $ZB(G)$, et qu'ainsi $Z(G)$ s'identifie à un sous-ensemble de $ZB(G)$.

Si (π, V) est un G-module lisse admettant le caractère infinitésimal de paramètre $\omega \in Irr_c(M)$, $Z(G)$ $(\subset Z(M))$ agit sur V par la restriction du caractère central de ω de $Z(M)$ à $Z(G)$. (1.25)

En effet, soit $z \in Z(G)$ qu'on regarde comme un élément de $ZB(G)$. On veut calculer $z(\omega)$. On note (M, ω) un représentant de ω avec $M \in \mathcal{M}$. Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard de sous-groupe de Lévi M, $z(\omega)$ est le scalaire par lequel z agit sur $i_{G,P}(\omega)$. Il est clair que c'est bien le caractère central de ω appliqué à z.

Si V est un G-module lisse de longueur finie, l'ensemble des exposants (resp. exposants centraux) de V le long de P est la réunion des ensembles des exposants (resp. exposants centraux) de ses sous-quotients simples.

Proposition 1 *Soit* (π, V) *un module lisse, de longueur finie, admettant le caractère infinitésimal généralisé de paramètre* $\omega \in Irr_c(M)$*. Soit* Q *un sous-groupe parabolique standard de* G*, de sous-groupe de Lévi* L*. Alors, si* χ *est un caractère de* A_L*, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :*

(i) le caractère χ *est un exposant de* V *le long de* Q*.*

(ii) il existe un sous-groupe parabolique standard P'*, de sous-groupe de Lévi* M'*, avec* P' *contenu dans* Q*,* $\omega' \in Irr_c(M')$*, tels que* π *soit une sous-représentation de* $i_{G,P'}(\omega')$ *et tels que la restriction du caractère central,* ϕ*, de* ω' *à* A_L*, soit égale à* χ*. En outre on a* (M', ω') *est conjugué sous* G *à* (M, ω)*.*

(iii) Les exposants de V *le long de* Q *sont contenus dans un ensemble fini dépendant seulement de* ω *(et pas de* V*).*

Démonstration. D'après ce qui précède, on peut supposer π irréductible. Montrons que (i) implique (ii). Si χ est un exposant de V le long de Q, $(r_{Q,G}V)_\chi$ est non nul, de longueur finie. Il existe un sous-groupe parabolique standard, R, de L, de Lévi M, tel que $r_{R,L}((r_{Q,G}V)_\chi)$ soit cuspidal : on prend R minimal parmi les sous-groupes paraboliques standard de L pour la condition $r_{R,L}((r_{Q,G}V)_\chi) \neq \{0\}$. Alors c'est une représentation cuspidale, de longueur finie qui admet un quotient irréductible et cuspidal ω'. Alors π est une sous-représentation de $i_{G,P'}(\omega')$, où P' est le sous-groupe parabolique standard de G, de sous-groupe de Lévi M', engendré par R et le radical unipotent de Q. Notons ϕ la restriction du caractère central de ω' à $A_{M'}$. Alors $A_L \subset A_{M'}$ agit sur ω' par la restriction de ϕ à A_L. Comme ω' est un quotient de $r_{R,L}((r_{Q,G}V)_\chi)$, cette restriction est égale à χ. En outre pour des raisons de caractère infinitésimal (M, ω) et (M', ω') sont conjugués. Ceci prouve que (i) implique (ii).

Montrons que (ii) implique (i). Il est clair que $(r_{Q,G}V)_\chi$ admet pour sous-quotient $(r_{P,G}V)_\phi$. Si cet espace est non nul, il en va de même du précédent. Ceci prouve que (ii) implique (i).

Prouvons (iii). L'ensemble des (M', ω') conjugués à (M, ω) étant fini, (iii) résulte immédiatement de (ii). □

1.6 Espace $\mathcal{A}(G)$

Lemme 2 *Tout* G*-module lisse de type fini,* V*, qui est annulé par un idéal de codimension finie de* $ZB(G)$*, est admissible et de longueur finie.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où V a un seul générateur v. Soient H, H' des sous-groupes compacts ouverts de G et notons $\mathcal{H}(H\backslash G/H')$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(G)$ invariant à gauche par H et à droite par H'. Alors $\mathcal{H}(G) = \cup_H \mathcal{H}(H\backslash G/H)$, où H décrit les sous-groupes compacts ouverts de G et $V = \mathcal{H}(G)V$.

Supposons v invariant par H'. L'espace V^H des invariants de V sous H est égal à $\mathcal{H}(H\backslash G/H')v$ et est donc contenu dans $\mathcal{H}(H''\backslash G/H'')v$, avec $H'' = H \cap H'$. Mais, d'après [BD], Corollaire 3.4, $\mathcal{H}(H''\backslash G/H'')v$ est de type fini sous $ZB(G)$. Donc V est admissible. Cette représentation est de longueur finie, car admissible et de type fini (cf. [BD], Remarque 3.12). □

On note, pour f fonction lisse sur G, V_f^R, resp. V_f^L, $V_f^{R,L}$, l'espace vectoriel engendré par les translatées à droite, resp. à gauche, resp. à droite et à gauche de f par les éléments de G, sur lequel G agit par représentation régulière droite, resp. gauche, resp. $G \times G$, agit par le produit des représentations régulières droite et gauche. Soit H un sous-groupe compact ouvert et e_H sa mesure de Haar normalisée. On montre facilement que :

f est le coefficient de V_f^R pour f et e_H, si f est binvariante par H. De plus, si V_f^R est admissible, $V_f^{R,L}$ est l'espace des coefficients de V_f^R. (1.26)

Pour ce dernier point, il suffit de remarquer que l'intégration contre des éléments de $\mathcal{H}(G)$ définit un sous-module de $\tilde{V}_f^R$, dont l'orthogonal est nul, donc égal à l'espace tout entier. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. Tout élément φ de $\mathcal{H}(G)$, invariant à gauche par H s'écrit comme combinaison linéaire de translatées à droite de e_H. Notez que $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ étant donné, on peut choisir H assez petit pour que φ soit invariant à gauche par H et f soit biinvariante par H. Le coefficient de f et φ est une combinaison linéaire de translatées à gauche de f. Appliquant ceci aux translatées à droite de f, on voit que les coefficients de V_f^R sont bien des éléments de $V_f^{R,L}$. L'inclusion inverse résulte immédiatement de l'assertion précédente, par translation à gauche et à droite.

Lemme 3 *Soit f une fonction lisse sur G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) V_f^R est un G-module admissible.
(ii) f est un coefficient d'une représentation admissible de type fini.
(iii) f est lisse et $ZB(G)$-finie, lorsque l'on regarde $ZB(G)$ agir sur $C_{lisse}(G)$ par représentation régulière droite.
En outre, on peut remplacer la représentation régulière droite par la représentation régulière gauche dans ce qui précède.

Démonstration. (i) implique (ii) grâce à (1.26). Supposons (ii) vrai. Supposons que f soit le coefficient de la représentation admissible de type fini (π, V) pour $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$:

$$f = c_{v,\tilde{v}}, \;\; avec \;\; c_{v,\tilde{v}}(g) =< \pi(g)v, \tilde{v} >, \;\; g \in G.$$

On peut se ramener au cas où V est engendrée par v, ce que l'on fait dans la suite. Le vecteur v est invariant par un sous-groupe compact ouvert H. Comme V est admissible, V^H est de dimension finie, donc annulé par un idéal de codimension finie de $ZB(G)$. Utilisant l'entrelacement de V avec $C_{lisse}(G)$, $v_1 \mapsto c_{v_1,\tilde{v}}$, on voit que f est bien $ZB(G)$-finie, ce qui prouve (iii).

Supposons (iii) vrai. Alors (i) résulte du lemme précédent.

On peut remplacer la représentation régulière droite par la représentation régulière gauche dans (iii), puis utiliser les résultats précèdents pour $\check{f}$, où $\check{f}(g) = f(g^{-1})$. $\square$

Soit P un sous-groupe parabolique standard de sous-groupe de Lévi M, $\lambda \in \Lambda(P)^{--}$ et dans le centre de M. Pour tout $f \in \mathcal{A}(G)$ il existe un unique élémént $f_P \in \mathcal{A}(M)$ tel que, pour tout $m \in M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$f_P(m\lambda^n) = \delta_P^{-1/2}(m\lambda^n) f(m\lambda^n),\ n > n_0. \tag{1.27}$$

De plus, si $m = 1$, si f est biinvariante par un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé, H, et si $\lambda \in \Lambda^{--}(P, H)$, on peut choisir n_0 dépendant seulement de λ et H mais pas de f. Enfin, f_P est un coefficient de $(V_f^R)_P$.

L'existence résulte du fait que f est un coefficient de représentation lisse, auquel on peut appliquer (1.16). L'unicité résulte du fait que f_P étant $ZB(M)$-finie, elle est $Z(M)$-finie et en particulier finie sous l'action du sous-groupe engendré par λ. Une fonction $\mathbb{Z}$-finie étant déterminée par ses valeurs sur $\{n \in \mathbb{N} | n > n_0\}$, cela prouve l'unicité de f_P.

On rappelle une définition donnée dans [W2], fin du Chapitre I.

Définition 2 Si $f \in \mathcal{A}(G)$, on définit:

$$f_P^{ind}(g_1, g_2) = (L_{g_1^{-1}} R_{g_2^{-1}} f)_P.$$

L'application $f \mapsto f_P^{ind}$ est un homomorphisme de $G \times G$-modules entre $\mathcal{A}(G)$ et $i_{G\times G, \overline{P}\times P}\mathcal{A}(M)$, où $G \times G$ (resp. $M \times M$) agit par représentation régulière gauche et droite sur $\mathcal{A}(G)$ (resp. $\mathcal{A}(M)$).

Définition 3 Soit $f \in \mathcal{A}(G)$. Alors, pour $g_1, g_2 \in G$, l'action par représentation régulière droite de A_M sur $f_P^{ind}(g_1, g_2) \in \mathcal{A}(M)$ étant finie, $f_P^{ind}(g_1, g_2)$ est une somme de fonctions $(f_P^{ind}(g_1, g_2))_\chi$, nulles sauf un nombre fini, où χ est un caractère, à valeurs complexes de A_M, telles que, pour un n assez grand :

$$(R_z - \chi(z))^n (f_P^{ind}(g_1, g_2))_\chi = 0,\ z \in A_M.$$

On note $f_{P,\chi}^{ind}(g_1, g_2) := (f_P^{ind}(g_1, g_2))_\chi$.

On appelle exposant asymptotique de f le long de P, tout caractère χ de A_M, tel que $f_{P,\chi}^{ind}$ soit non nulle.

Soit f comme ci-dessus. Les exposants asymptotiques de f le long de P sont les exposants de V_f^R le long de P. (1.28)

En effet de la définition de f_P (cf. (1.27)) et de (1.16) , on déduit que :

Pour tout G-module admissible, V, l'espace $V_{P,\chi}$ est non nul si et seulement si il existe un coefficient, f, de V avec $f_{P,\chi}^{ind}$ non nul. (1.29)

Alors la définition de f_P^{ind}, joint à (1.26) conduit au résultat.

2 $\mathcal{A}_{temp}(G)$

2.1

On note Ξ la fonction d'Harish-Chandra. On fixe un plongement algébrique τ de G dans $GL(n, \mathbf{F})$. On supposera que $\tau(K)$ est contenu dans $GL(n, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $\mathbf{F}$. Pour $g \in G$, on note $\|g\|$ la plus grande des valuations des coefficients matriciels de $\tau(g)$ et $\tau(g^{-1})$. On pose $\sigma(g) = Log\|g\|$. La fonction σ est biinvariante par K (cf. [W2], II pour ce qui précède).

Une fonction lisse sur G, f, est dite tempérée, si et seulement si, pour un $C > 0$ et un $r > 0$ on a

$$|f(g)| \leq C\,\Xi(g)(1 + \sigma(g))^r, \quad g \in G.$$

On note $\mathcal{A}_{temp}(G)$ le sous-espace de $\mathcal{A}(G)$ formé de ses éléments tempérés. Une représentation admissible est dite tempérée si ses coefficients sont tempérés. Alors (cf. [W2], Lemme III.2.1)

$\mathcal{A}_{temp}(G)$ est l'espace des coefficients des représentations tempérées. Une représentation admissible (π, V), resp. $f \in \mathcal{A}(G)$, est tempérée si et seulement si, pour tout sous-groupe parabolique semi-standard, P, tout exposant de (π, V) (resp. exposant asymptotique de f) le long de P, χ, vérifie $Re\ ln\ \chi \in {}^{+}\overline{\mathfrak{a}}_P^*$. On peut remplacer semi-standard par standard dans cette assertion. (2.1)

On appelle représentation de carré intégrable de G une représentation admissible de G admettant un caractère central unitaire et dont tous les coefficients sont de carré intégrable sur G/A_G. On a une assertion similaire à (2.1) pour les représentations de carré intégrable, ou pour les f se transformant sous un caractère unitaire de $Z(G)$ et de carré intégrable modulo le centre de G, en remplaçant ${}^{+}\overline{\mathfrak{a}}_P^*$ par ${}^{+}\mathfrak{a}_P^*$. Pour toute fonction lisse, f, sur G, et $r \in \mathbb{R}$, on note

$$\nu_r(f) = sup_{g \in G}|f(g)|\Xi(g)^{-1}(1 + \sigma(g))^r.$$

Pour tout sous-groupe compact ouvert H, de G, on note $\mathcal{C}_H$, l'espace des $f \in C^\infty(H\backslash G/H)$, telles que $\nu_r(f)$ soit fini pour $r \in \mathbb{R}$, muni de la topologie définie par les ν_r. On note $\mathcal{C}(G)$ la réunion des $\mathcal{C}_H$, lorsque H décrit l'ensemble des sous-groupes compacts ouverts de G, que l'on munit de la topologie limite inductive des $\mathcal{C}_H$: c'est un espace vectoriel toplogique complet (cf. [W2]).

2.2 Intégrales d'entrelacement

Soit $P = MN$, $P' = MN'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G de sous-groupe de Lévi M. Soit (π, V) une représentation admissible de M. Posons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \{\pi \otimes \chi | \chi \in X(M)\}$, où $\pi \otimes \chi$ désigne une classe d'isomorphie de représentation. Notons B l'algèbre des polynomes sur la variété algèbrique $X(M)$. Une fonction polynome sur $O_{\mathbb{C}}$ est une fonction f, pour laquelle il existe $b \in B$ telle que

$f(\pi \otimes \chi) = b(\chi)$ pour tout $\chi \in X(M)$. On définit de façon similaire les fonctions rationnelles sur les ouverts de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ (cf [W2], IV.1). On définit la réalisation compacte des représentations induites comme suit. Notons V_χ l'espace V munit de la représentation $\pi \otimes \chi$.

On note $i_{K,K\cap P}$ l'espace des fonctions $f : K \to V$ invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert de G, telles que :

$$f(kmn) = \pi(m^{-1})f(k), \ \ k \in K, m \in M, n \in N \ \ et \ \ mn \in K.$$

La restriction des fonctions de G à K induit un isomorphisme de K-modules entre $i_{G,P}V_\chi$ et $i_{K,K\cap P}V$, pour tout $\chi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On peut ainsi réaliser toutes les représentations $i_{G,P}(\pi \otimes \chi)$ dans $i_{K,K\cap P}V$. On référera à cette réalisation comme étant la réalisation compacte.

Supposons π de longueur finie. Il existe $R \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $\chi \in X(M)$ vérifiant $< Re \ ln\, \chi, \alpha >> R, \alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(\overline{P}')$, il existe un opérateur d'entrelacement $J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$ entre $i_{G,P}V_\chi$ et $i_{G,P'}V_\chi$, caractérisé par l'égalité :

$$< (J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(f))(g), \tilde{v} >= \int_{N'/N\cap N'} < f(gn'), \tilde{v} > dn',$$

$$f \in i_{G,P}V_\chi, \tilde{v} \in \tilde{V}. \tag{2.2}$$

L'opérateur $J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$ ainsi défini sur un cône ouvert de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est rationnel. Plus précisément, il existe b, une fonction polynôme sur $X(M)$, telle que, dans la réalisation compacte, pour tout $f \in i_{K,K\cap P}V$, l'application $\chi \mapsto b(\chi)(J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(f))$ est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie et polynomiale en χ (cf. [W2], Théorème IV.1.1).

Si π est tempérée, on peut prendre $R = 0$ (cf. [W2], Proposition IV. 2.1.).

Si (ω, W) est un élément de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, on note $L(\omega, P) = i_{G\times G, P\times P}(W \otimes \tilde{W})$ sur lequel $G \times G$ agit par $i_{G\times G,P\times P}(\omega \otimes \tilde{\omega})$. Cet espace s'identifie à $i_{G,P}W \otimes (i_{G,P}W)\tilde{}$, qui est lui même identifié à un espace d'endomorphismes de rang fini de $i_{G,P}W$. On note $L_K(\omega) = i_{K\times K, K\cap P\times K\cap P}(W \otimes \tilde{W})$, qui, par restriction des fonctions à $K \times K$, s'identifie à $L(\omega, P)$. Il ne dépend pas de $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On note encore $i_{G\times G,P\times P}(\omega \otimes \tilde{\omega})$ la représentation de $G \times G$ obtenue par transport de structure, en l'appelant réalisation compacte.

On définit une application linéaire $E_P^G(\omega) : L(\omega, P) \to C^\infty(G)$ par

$$E_P^G(v \otimes \tilde{v})(g) =< (i_{G,P}\omega)(g)v, \tilde{v} >, \ \ v \in i_{G,P}W, \ \ \tilde{v} \in i_{G,P}\tilde{W}. \tag{2.3}$$

Il existe (cf. [W2], IV.2) une fonction rationnnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, non identiquement nulle, j_P, telle que :

$$J_{P|\overline{P}}(\omega)J_{\overline{P}|P}(\omega) = j_P(\omega)Id_{i_{G,P}(\omega)}, \omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \tag{2.4}$$

qui est de plus indépendante de P. On la note j et on pose

$$\mu = \gamma j^{-1} \tag{2.5}$$

où γ est une constante définie dans [W2], V.2.

On note $\mathcal{W}(G|M) = \{s \in W^G | M^s = M\}$, $W(G|M) = \mathcal{W}(G|M)/W^M$, ce dernier ensemble étant identifié à un système de représentants dans $\mathcal{W}(G|M)$, contenant 1. Soit $s \in W(G|M)$. Pour $v \in i_{G,P}W$, $\tilde{v} \in (i_{G,P}W\tilde{)} \approx i_{G,P}\tilde{W}$, on définit :

$$c_{P'|P}(s,\omega)(v\otimes\tilde{v}) = \gamma(G|M)^{-1}((J_{P'|P^s}(s\omega)R(s))(v)\otimes(J_{\overline{P}'|P^s}(s\tilde{\omega})R(s))(\tilde{v})). \tag{2.6}$$

Ici $R(s)$ est l'action régulière droite par s et $\gamma(G|M)$ est une constante spécifiée dans [W2], I.1, équation (3). Alors $c_{P'|P}(s,\omega)$ est un morphisme de $G \times G$-modules entre $L(\omega, P)$ et $i_{G\times G, P'\times\overline{P}'}(s\omega \otimes s\tilde{\omega})$, rationnel en ω lorsque on utilise la réalisation compacte (cf. [W2], V.1).

Tenant compte du fait que les intégrales d'entrelacement sont génériquement des isomorphismes ([W2], Prop. IV. 2. 2), on définit les fonctions c normalisées :

$${}^0c_{P'|P}(s,\omega) = c_{P'|P'}(1,\omega)^{-1}c_{P'|P}(s,\omega). \tag{2.7}$$

Alors ${}^0c_{P'|P}(s,\omega)$ est un morphisme de $G \times G$-modules entre $L(\omega, P)$ et $L(s\omega, P')$, qui est rationnel dans la réalisation compacte. On a l'équation fonctionnelle (cf. [W2], Lemme V.3.1) :

$$E^G_{P'}({}^0c_{P'|P}(s,\omega)\psi) = E^G_P(\psi),\ \psi \in L(\omega, P). \tag{2.8}$$

On note $\mathcal{E}_2(M)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations unitaires irréductibles de M de carré intégrable (la représentation est lisse, munie d'un produit scalaire invariant et les coefficients sont de carré intégrable modulo le centre de M). Pour $f \in \mathcal{C}(G)$ et $\omega \in \mathcal{E}_2(M)$, on définit :

$$(\mathcal{F}_P f)(\omega) = (i_{G,P}\omega)(f) \in L(\omega, P). \tag{2.9}$$

On note Θ l'ensemble des couples $(\mathcal{O}, P = MN)$, où P est un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$ est une orbite sous l'action de $Im\ X(M)$. On dit que $(\mathcal{O}, P)$ et $(\mathcal{O}', P')$ sont associés si et seulement si il existe $s \in W^G$ avec $s.M = M'$ et $s.\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. On fixe un sous-ensemble de représentants dans Θ des classes d'association, Θ/ass. On note $Stab(\mathcal{O}, M) = \{s \in W(G|M) | s\mathcal{O} = \mathcal{O}\}$.

On note $\tilde{\mathcal{O}}$ l'orbite sous $Im(X(M))$ d'une représentation irréductible de carré intégrable de M dans l'ensemble des représentations concrètes de M, et $\mathcal{O}$, sa projection dans l'ensemble des classes d'équivalences de représentations de M. Si δ, δ' sont des éléments de $\tilde{\mathcal{O}}$ équivalents, tout isomorphisme entre δ et δ' détermine un isomorphisme entre les contragrédientes puis un isomorphisme entre $L(\delta, P)$ et $L(\delta', P)$ qui ne dépend pas de l'isomorphisme de départ entre les représentations δ, δ'. L'espace $L_K(\delta, P)$ est indépendant de $\delta \in \mathcal{O}$ et on note $T_{\delta',\delta}$, l'isomorphisme ci-dessus transporté dans $L_K(\delta, P)$. Alors $C^\infty(\mathcal{O}, P)$ est l'espace des fonctions, ψ, sur $\tilde{\mathcal{O}}$ valeurs dans un sous-espace de dimension finie de $L_K(\delta, P)$ qui sont C^∞ et telles que si δ et δ' sont équivalentes, $\psi_{\delta'} = T_{\delta',\delta}\psi_\delta$. Cet espace s'identifie naturellement $[(C^\infty(Im(X(M)) \otimes L_K(\delta_0, P)]^{ImX(M)_{\delta_0}}$ ou δ_0 est fixé dans $\tilde{\mathcal{O}}$, où $ImX(M)_{\delta_0}$ est le stabilisateur de δ_0 dans l'ensemble les classes d'équivalences de représentations irréductibles de M, et celui-ci agit par translation sur $Im(X(M))$ et par les opérateurs $T_{\delta_0\otimes\chi,\delta_0}$ sur $L_K(\delta, P)$, $\chi \in ImX(M)_{\delta_0}$.

On note $C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},M)}$ l'ensemble des $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$ tels que :

$$\psi_{s\omega} = {}^0 c_{P|P}(s, \omega)\psi_\omega, \quad s \in Stab(\mathcal{O}, M), \omega \in \mathcal{O}. \tag{2.10}$$

On note :

$$C^\infty(\Theta) = \oplus_{(\mathcal{O},P=MN)\in\Theta} C^\infty(\mathcal{O}, P),$$
$$C^\infty(\Theta/ass)^{inv} = \oplus_{(\mathcal{O},P=MN)\in\Theta/ass} C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},M)}. \tag{2.11}$$

On note $\mathcal{F}$ l'application de $\mathcal{C}(G)$ dans $C^\infty(\Theta/ass)^{inv}$ qui à $f \in \mathcal{C}(G)$ associe :

$$\oplus_{(\mathcal{O},P=MN)\in\Theta/ass} \mathcal{F}_P f_{|\mathcal{O}}.$$

On appelera $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier de G. Pour tout $(\mathcal{O}, P = MN) \in \Theta$, $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$, on note, pour un choix de mesure non nulle $X(M)$-invariante sur $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{I}\psi(g) = \int_{\mathcal{O}} E_P^G(\psi_\omega)(g)\mu(\omega)d\omega. \tag{2.12}$$

Alors, $\mathcal{I}\psi$ est un élément de $\mathcal{C}(G)$, et l'on a (cf. [W2], Proposition VI.3.1 et Théorème VII.2.5):

L'application $\mathcal{F}$ est une bijection continue de $\mathcal{C}(G)$ sur $C^\infty(\Theta/ass)^{inv}$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{I}$. (2.13)

Nous allons en déduire l'assertion suivante, due à Langlands, au moins dans le cas réel (cf. [L]).

Soient $P = MN$, $P' = M'N'$ des sous-groupes paraboliques semi-standards, $\delta \in \mathcal{E}_2(M)$, $\delta' \in \mathcal{E}_2(M')$, qui sont donc unitaires. Alors $i_{G,P}\delta$ et $i_{G,P'}\delta'$ ont un sous-quotient irréductible en commun si et seulement si (M, δ) et (M', δ') sont conjuguées sous G. Ces représentations sont alors isomorphes. (2.14)

Soit P'' un sous-groupe parabolique semi-standard de sous-groupe de Lévi M. On va utiliser les opérateurs d'entrelacement normalisés (cf. [A], Theorem 2.1) pour voir que $i_{G,P''}\delta$ est isomorphe à $i_{G,P}\delta$. Dans loc. cit., Arthur introduit, pour Q, Q' sous-groupes paraboliques de Lévi M, des fonctions méromorphes, non identiquement nulles, sur $\mathcal{O}_\mathbb{C}$, $r_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)$ telles que les familles méromorphes d'opérateurs :

$$R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi) := r_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)^{-1} J_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)$$

vérifient notamment les propriétés suivantes. D'abord il résulte de R.1 de loc. cit. :

$R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)$ entrelace $i_{G,Q}(\delta \otimes \chi)$ et $i_{G,Q'}(\delta \otimes \chi)$.

La propriété R.4 implique :

$$R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)^* = R_{Q|Q'}(\delta \otimes \chi), \;\; si \;\; \chi \;\; est \;\; unitaire.$$

et la propriété R.3, avec $P = P'$ joint à $R2$ montre que :

$$R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi) = R_{Q|Q'}(\delta \otimes \chi)^{-1}.$$

De ce qui précède, il résulte que $R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)$ est unitaire pour $\chi \in ImX(M)$ tel que cet opérateur soit défini.

Par ailleurs les opérateurs R (resp. les fonctions r) sont définis par réduction aux sous-groupes paraboliques adjacents. Dans ce cas, il s'agit de fonctions méromorphes d'une variable complexe, en utilisant la propriété R.3. L'unitarité des opérateurs pour $\chi \in ImX(M)$ et le fait qu'une fonction méromorphe d'une variable complexe localement bornée est holomorphe montrent que, dans le cas des sous-groupes paraboliques adjacents, si $\chi \in ImX(M)$, $R_{Q'|Q}(\delta \otimes \chi)$ est défini et unitaire. Il en résulte que $i_{G,P''}\delta$ est isomorphe à $i_{G,P}\delta$ comme annoncé.

Montrons maintenant la partie si. Si (M, δ) et (M', δ') sont conjuguées sous G, on voit, par conjugaison que $i_{G,P'}\delta'$ est isomorphe à $i_{G,P''}\delta$, où P'' est un sous-groupe parabolique semi-standard de sous-groupe de Lévi M. D'après le début de la preuve $i_{G,P}\delta$ et $i_{G,P'}\delta'$ sont isomorphes. Ceci achève de prouver la partie si.

Montrons la réciproque. Supposons que $i_{G,P}\delta$ et $i_{G,P'}\delta'$ ont un sous-quotient irréductible en commun, π. Soit $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$) l'orbite de δ (resp. δ') sous $ImX(M)$ (resp. $ImX(M')$). Supposons (M, δ) et (M', δ') non conjuguées sous G. Quitte à conjuguer et en tenant compte de la première partie de la preuve, on voit qu'on peut supposer $(\mathcal{O}, P)$, $(\mathcal{O}', P') \in \Theta/ass$. Soit H un sous-groupe compact ouvert contenu dans K tel que π ait un vecteur invariant non nul par H. On note p le projecteur orthogonal sur l'espace des vecteurs invariants par H dans la réalisation compacte de $i_{G,P}\delta$. Soit φ une fonction C^∞, à valeurs complexes, qui est invariante sous l'action de $Stab(\mathcal{O}, M)$ et vaut 1 en δ. Si de plus $(\mathcal{O}, P)$ est égal à $(\mathcal{O}', P')$, on supposera que $\varphi(\delta') = 0$, ce qui est possible car (M, δ) et (M', δ') sont non conjuguées sous G. On pose : $\psi(\omega) = \varphi(\omega)p, \;\; \omega \in \mathcal{O}$. C'est un élément de $C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},M)}$, car le projecteur p commute aux opérateurs d'entrelacement. Soit f l'élément de $\mathcal{C}(G)$ dont la transformée de Fourier, $\mathcal{F}f$, a toutes ses composantes nulles sauf celle correspondant à $\mathcal{O}$, qui est égale à ψ (cf. 2.13). Alors $i_{G,P}\delta(f) = p$. Donc $\pi(f)$ est non nul car c'est la projection orthogonale sur l'espace des vecteurs invariants par H. D'autre part $i_{G,P'}\delta'(f) = 0$, par construction de φ et de f. Donc f annule son sous-quotient π. Une contradiction qui achève de prouver (2.14).

2.3 Dérivées de coefficients de représentations induites

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique semi-standard. Soit $g \in G$. On écrit $g = kmn$ avec $k \in K, m \in M, n \in N$. On note $H_P(g) = H_M(m)$, qui est bien défini. On utilise la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}_M$ provenant de celle sur $\mathfrak{a}_0$.

Lemme 4 *Il existe $C > 0$ telle que :*

$$\|H_P(g)\| \leq C(1+\sigma(g)), \quad g \in G.$$

Démonstration. Il suffit, quitte à changer de P_0, de montrer l'assertion pour P standard. Dans ce cas, $H_P(g)$ est la projection sur $\mathfrak{a}_M$ de $H_{P_0}(g)$ parallèlement à $\mathfrak{a}_{M_0}^M$. Il suffit de prouver l'assertion pour $P = P_0$.

Soit (π_Λ, V_Λ) une représentation irréductible de plus haut poids Λ, où Λ est un caractère rationnel de M_0 défini sur $\mathbf{F}$, π_Λ est une représentation irréductible rationnelle de G, définie sur $\mathbf{F}$, admettant une droite invariante par P_0 sur laquelle M_0 agit par Λ et N_0 agit trivialement. On choisit un vecteur non nul de cette droite, v_Λ. On fixe une base de V_Λ formée de vecteurs poids sous A_0, $v_1, \ldots, v_t$, où $v_1 = v_\Lambda$. Ceci permet de définir pour $v = \sum_{i=1}^t c_i v_i \in V_\Lambda$, $|v| = Sup_i |c_i|_{\mathbf{F}}$, et pour $A \in End(V_\Lambda)$, $|A| = Sup_{i,j}|a_{i,j}|_{\mathbf{F}}$, où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice de A dans la base ci-dessus. On a alors $|Av| \leq |A||v|$.

Il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$ tel que :

$$|\Lambda(m)|_F = e^{\lambda(H_{M_0}(m))}, m \in M_0.$$

On va étudier $\lambda(H_{P_0}(g))$. On écrit pour cela :

$$g = k'm_0k, \quad k, k' \in K, m_0 \in M_0.$$

On a $H_{P_0}(g) = H_{P_0}(m_0k)$. On écrit :

$$m_0k = k''m'n, \quad k'' \in K, m' \in M_0, n \in N_0.$$

D'après ce qui précède, on a

$$e^{\lambda(H_{P_0}(g))} = |\pi_\Lambda(m')v_\Lambda| = |\pi_\Lambda(k'')^{-1}\pi_\Lambda(m_0k)v_\Lambda|\,.$$

Comme K est compact, on voit qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1|v| \leq |\pi_\Lambda(k)v| \leq C_2|v|, \quad k \in K, \tag{2.15}$$

d'où l'on déduit :

$$C_1|\pi_\Lambda(m_0k)v_\Lambda| \leq e^{\lambda(H_{P_0}(g))} \leq C_2|\pi_\lambda(m_0k)v_\Lambda|,$$

et d'où l'on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$|\lambda(H_{P_0}(g))| \leq C(1+|(log|\pi_\Lambda(m_0k)v_\Lambda|)|). \tag{2.16}$$

Montrons le Lemme suivant :

Lemme 5 *Il existe $C_1', C_2' > 0$ tels que :*

$$|\pi_\Lambda(m)v| \geq C_1' e^{-C_2'\|H_{M_0}(m)\|}|v|, \quad m \in M_0, v \in V_\Lambda.$$

Démonstration. Le groupe $A_0 M_0^1$ est d'indice fini dans M_0, car $\tilde{\mathfrak{a}}_{0,\mathbf{F}}$ est d'indice fini dans $\mathfrak{a}_{0,\mathbf{F}}$. En utilisant la compacité de M_0^1, et un ensemble, fini, de représentants du quotient de M_0 par $A_0 M_0^1$, on est réduit à prouver l'inégalité du lemme pour $m = a$ élément de A_0. Mais :

$$|v| = |\pi_\Lambda(a^{-1})\pi_\Lambda(a)v| \leq |\pi_\Lambda(a^{-1})||\pi_\Lambda(a)v|\,.$$

Tenant compte de ce qui précède, il suffit de prouver la propriété suivante :

Il existe $C_3, C_4 > 0$ tels que :

$$|\pi_\Lambda(a^{-1})| \leq C_3 e^{C_4 \|H_{M_0}(a)\|},\ a \in A_0. \tag{2.17}$$

On rappelle que la base $v_1, \ldots, v_t$ de V_Λ est formée de vecteurs poids sous A_0. On note ces poids $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_t$, et on note, pour tout i, λ_i l'élément de $\mathfrak{a}_0^*$ tel que :

$$|\Lambda_i(a)|_{\mathbf{F}} = e^{\lambda_i(H_{M_0}(a))},\ a \in A_0.$$

Des définitions, il résulte facilement :

$$|\pi_\Lambda(a)| = Sup_{i=1,\ldots,t}\, e^{\lambda_i(H_{M_0}(a))}. \tag{2.18}$$

Alors (2.17) en résulte immédiatement, grâce à l'égalité $H_{M_0}(a^{-1}) = -H_{M_0}(a)$. Ceci achève de prouver le Lemme 5. □

On reprend la démonstration du Lemme 4. On remarque que le Lemme 5, utilisé en remplaçant m par m^{-1} et v par $\pi_\Lambda(m)v$, conduit à une inégalité du même type que celle du Lemme 5, où $\leq$ est remplacé par $\geq$ et $-C_2'$ par C_2'. Utilisant le Lemme 5 ainsi complété, pour $v = \pi_\Lambda(k)v_\Lambda$, et (2.15) , on obtient l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que :

$$|\lambda(H_{P_0}(g))| \leq C'(1 + \|H_{M_0}(m_0)\|),\ g \in G.$$

En faisant varier Λ, de sorte que λ décrive une base de $\mathfrak{a}_0^*$, et en utilisant l'équivalence des normes en dimension finie, on obtient l'existence de $C'' > 0$ telle que :

$$\|H_{P_0}(g)\| \leq C''(1 + \|H_{M_0}(m_0)\|),\ g \in G. \tag{2.19}$$

Mais (cf. [W2], équation I.1 (6)), il existe $c, c' > 0$ tels que :

$$c(1 + \|H_0(m)\|) \leq 1 + \sigma(m) \leq c'(1 + \|H_0(m)\|),\ \ m \in M_0.$$

Comme $\sigma(g) = \sigma(m_0)$, ceci joint à (2.19) implique le Lemme 4. □

Soit $(\omega, V) \in \mathcal{E}_2(M)$. Pour $\chi \in X(M)$, on réalise $i_{G,P}(\omega \otimes \chi)$ dans l'espace $i_{K,K\cap P}V$. Soit ϕ un élément de cet espace et ψ un élément de son dual lisse, identifié à $i_{K,K\cap P}\tilde{V}$. On note ϕ_χ, resp. ψ_χ, l'élément correspondant de l'espace de $i_{G,P}(\omega\otimes\chi)$ (resp. $\widetilde{i_{G,P}(\omega \otimes \chi)}$). On s'intéresse à la famille de fonctions sur G, paramétrée par $\chi \in ImX(M)$, $E_\chi(g) =< (i_{G,P}(\omega \otimes \chi)(g))\phi_\chi, \psi_\chi >$.

Lemme 6 *Soit D, noté aussi D_χ, un opérateur différentiel sur $Im X(M)$, regardée comme variété C^∞ réelle.*

Pour tout $g \in G$, l'application $\chi \mapsto E_\chi(g)$ est C^∞.

Il existe $C, r > 0$ tels que :

$$|D_\chi E_\chi(g)| \leq C\,\Xi(g)(1+\sigma(g))^r. \tag{2.20}$$

Démonstration. On a :

$$E_\chi(g) = \int_K < \phi_\chi(g^{-1}k), \psi(k) > dk. \tag{2.21}$$

Si $\nu \in i\mathfrak{a}_M^*$, notons $\chi_\nu \in X(M)$ le caractère de M défini par :

$$\chi_\nu(m) = e^{\nu(H_M(m))},\ \ m \in M.$$

On pose $E_\nu = E_{\chi_\nu}$. Le lemme se reformule aisément à l'aide des E_ν. Ecrivant $g^{-1}k = k'mn$, où $k' \in K$, $m \in M$, $n \in N$, et notant ε le caractère trivial de M, on trouve immédiatement : $\phi_{\chi_\nu}(g^{-1}k) = \phi_\varepsilon(g^{-1}k)e^{-\nu(H_M(m))}$. Reportant dans (2.21), on en déduit

$$E_\nu(g) = \int_K < \phi_\varepsilon(g^{-1}k)e^{-\nu(H_M(m))}, \psi(k) > dk.$$

Comme $\sigma(g^{-1}k) = \sigma(g)$ et $H_M(m) = H_P(g^{-1}k)$, le Lemme 4 montre que pour ν borné dans $i\mathfrak{a}_M^*$, et D un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur $i\mathfrak{a}_M^*$, on a, par application du théorème de dérivation sous le signe intégrale, que $DE_\nu(g)$ est défini et il existe $C > 0$ tel que :

$$|DE_\nu(g)| \leq C(1+\sigma(g))^d \int_K | < \phi_\varepsilon(g^{-1}k), \psi(k) > |dk,\ \ g \in G.$$

Mais, comme ω est de carré intégrable, ses coefficients sont majorés par une constante fois Ξ^M ([W2], Corollaire III. 1.). Tenant compte du Lemme II.1.6 de [W2], on déduit que l'intégrale de l'équation précédente est majorée par une constante fois $\Xi(g)$. Comme il existe un ensemble borné $\mathcal{V}$ de $i\mathfrak{a}_M^*$ tel que $\{\chi_\nu | \nu \in \mathcal{V}\} = Im\ X(M)$, ceci achève de prouver le lemme. □

2.4 Description des éléments de $\mathcal{A}_{temp}(G)$

Théorème 1 *(i) Une fonction f sur G est élément de $\mathcal{A}_{temp}(G)$ si et seulement si c'est une combinaison linéaire de dérivées successives de coefficients de représentations induites à partir de représentations irréductibles de carré intégrable (cf. Appendice B pour la notion de dérivée de coefficients de familles de représentations).*

(ii) Pour $(\mathcal{O}, P) \in \Theta/ass$, on définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{O}$: δ et δ' sont en relation si et seulement si δ et δ' sont conjuguées par un élément de $Stab(\mathcal{O}, M)$. On note $\mathcal{O}/ass$ un ensemble de représentants de l'ensemble quotient. Pour $\delta \in \mathcal{O}$,

on note $\mathcal{A}_{temp}(G,\delta)$ *l'espace engendré par les dérivées successives de coefficients de la famille* $(i_{G,P}(\delta \otimes \nu))_{\nu \in ImX(M)}$ *(cf. Appendice B), pour* ν *égal au caractère trivial. Alors* $\mathcal{A}_{temp}(G)$ *est égal à :*

$$\oplus_{(\mathcal{O},P)\in\Theta/ass,\delta\in\mathcal{O}/ass}\mathcal{A}_{temp}(G,\delta).$$

Démonstration. La partie si de (i) résulte du lemme précédent.

Montrons la réciproque. Soit $f \in \mathcal{A}_{temp}(G)$. On peut se ramener, par linéarité, au cas où f est annulée par une puissance, I, d'un idéal maximal de $ZB(G)$ correspondant à $\omega_0 \in \Omega(G)$, ce que l'on fait dans la suite. Comme f est tempérée, son produit avec un élément de $\mathcal{C}(G)$ est intégrable sur G. Etudions, pour $(\mathcal{O},P) \in \Theta/ass$, la forme linéaire $T_{f,(\mathcal{O},P)}$, notée aussi T, sur $C^\infty(\mathcal{O},P)$, définie par

$$T(\psi) = \int_G (\mathcal{I}\psi)(g)f(g)dg, \quad \psi \in C^\infty(\mathcal{O},P). \tag{2.22}$$

Cette forme linéaire est continue d'après la tempérance de f, la définition de $\mathcal{C}(G)$ et la continuité de $\mathcal{I}$ (cf. [W2], Propotion VI.3.1). Notant $< .,. >$ le crochet de dualité entre $\mathcal{C}(G)$ et $\mathcal{A}_{temp}(G)$, on a

$$T(\psi) =< \mathcal{I}\psi, f > .$$

Il résulte de (1.11) que

$$< \mathcal{I}\psi, zf >=< \check{z}(\mathcal{I}\psi), f >, \quad z \in ZB(G).$$

Mais $\mathcal{I}$ est un morphisme de $G \times G$-modules. Donc

$$\check{z}(\mathcal{I}\psi) = \mathcal{I}(\check{z}\psi).$$

Par ailleurs, pour δ élément de $\mathcal{O}$, ou de $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ qui est son orbite sous $X(M)$, on note ω_δ le paramètre du caractère infinitésimal de $i_{G,P}\delta$. Alors, par évaluation en δ, et regardant les éléments de $ZB(G)$ comme des fonctions sur $\Omega(G)$, on trouve :

$$(z\psi)(\delta) = z(\omega_\delta)\psi(\delta).$$

Soit J l'idéal des fonctions régulières sur $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ engendré par les fonctions sur $\mathcal{O}_\mathbb{C}$, $\delta \mapsto \check{z}(\omega_\delta)$, $z \in I$, qui agissent par multiplication sur $C^\infty(\mathcal{O},P)$. On a

$$T(\varphi\psi) = 0, \quad \varphi \in J, \psi \in C^\infty(\mathcal{O},P). \tag{2.23}$$

Si $\omega_\delta \neq \tilde{\omega}_0$ pour tout $\delta \in \mathcal{O}$, on peut choisir pour $\delta_0 \in \mathcal{O}$, un $z \in J$, ne s'annulant pas en δ_0 et donc aussi sur un voisinage ouvert de δ_0. On en déduit que pour tout $\psi \in C^\infty(\mathcal{O},P)$, à support contenu dans ce voisinage, $T(\psi)$ est nulle. Joint à la compacité de $\mathcal{O}$, cela implique $T = 0$ dans ce cas.

Sinon, on choisit $\delta_0 \in \mathcal{O}$ tel que $\omega_{\delta_0} = \tilde{\omega}_0$. Alors δ_0 apparait comme une sous-représentation de $i_{M,R}(\omega_0')$, où $R = LV$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de M, de sous-groupe de Lévi L, $\omega'_0 \in Irr_c(L)$, et (L, ω'_0) est un représentant de $\tilde{\omega}_0$. Soit $p_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ la projection de $X(M)$ dans $\mathcal{O}_\mathbb{C}$, $\chi \mapsto \delta_0 \otimes \chi$. Notant Ω l'image dans $\Omega(G)$ de l' orbite de ω'_0 sous $X(L)$, on dispose d'une surjection similaire, p_Ω, de $X(L)$ dans Ω. Soit r la restriction des éléments de $X(M)$ à L et $r_{\Omega,\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ l'application $\delta \mapsto \omega_\delta$ de $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ dans Ω. On a

$$r_{\Omega,\mathcal{O}_\mathbb{C}} \circ p_{\mathcal{O}_\mathbb{C}} = p_\Omega \circ r. \tag{2.24}$$

On note r^* l'application de $Pol(X(L))$ dans $Pol(X(M))$ donné par la composition à droite par r. On définit de façon similaire $(r_{\Omega,\mathcal{O}_\mathbb{C}})^*$, etc.

On note I', l'idéal de $\mathrm{Pol}(\Omega)$ constitué des restrictions à Ω des $\check{z}$, $z \in I$, regardés comme fonctions sur $\Omega(G)$. L'idéal I' est de codimension finie dans $\mathrm{Pol}(\Omega)$ car I est de codimension finie. On va montrer :

L'idéal J' de $\mathrm{Pol}(X(M))$ *engendré par $r^* \circ p^*_\Omega(I')$ est de codimension finie*. (2.25)

Montrons que

$$\mathrm{Pol}(X(M)) = r^*(\mathrm{Pol}(X(L)). \tag{2.26}$$

En effet, notant $\Lambda(M) = M/M^1$, $\mathrm{Pol}(X(M))$ s'identifie, par définition de la structure de variété algébrique sur $X(M)$ (cf. Paragraphe 1.1), à l'algèbre de groupe de ce réseau, $\mathbb{C}[\Lambda(M)]$. On introduit des notations similaires pour L. L'application de L dans M/M^1, donnée par la composition de l'injection de L dans M suivie de la projection naturelle, passe au quotient en une application i de $\Lambda(L)$ dans $\Lambda(M)$. L'application r^* est alors donnée par l'extension i_* de i aux algèbres de groupes. Mais l' image de i est égale à $\Lambda(M)$ d'après la surjectivité de l'application naturelle de $\mathfrak{a}_{L,\mathbf{F}}$ dans $\mathfrak{a}_{M,\mathbf{F}}$ (cf. Paragraphe 1.1). Alors (2.26) en résulte.

Par ailleurs, une algèbre de type fini est un module de type fini sous l'algèbre de ses invariants sous un groupe fini d'automorphismes (cf. [Bou], Chapitre V. 1.9, Théorème 2). Joint à (1.19), cela implique :

$\mathrm{Pol}(X(L))$ (resp. $\mathrm{Pol}(X(M))$) est de type fini sous l'image de p^*_Ω (resp. $p^*_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$). (2.27)

Donc il existe un espace de dimension finie, $F_1 \subset \mathrm{Pol}(X(L))$ tel que :

$$\mathrm{Pol}(X(L)) = p^*_\Omega(\mathrm{Pol}(\Omega))F_1.$$

Par ailleurs I' est de codimension finie dans $\mathrm{Pol}(\Omega)$, donc il existe un espace de dimension finie $F_2 \subset \mathrm{Pol}(\Omega)$ tel que :

$$\mathrm{Pol}(\Omega) = I' + F_2$$

Ceci joint à (2.26), implique (2.25).

Soit $C^\infty((ImX(M), P)$ l'ensemble des fonctions ψ, qui à $\chi \in ImX(M)$ associe $\psi_\chi \in L(\delta_0 \otimes \chi, P)$, et telles que, identifiant $L(\delta_0 \otimes \chi, P)$ à $L_K(\delta_0 \otimes \chi, P)$, qui ne dépend pas de χ, la fonction correspondante soit à valeurs dans un espace de dimension finie et C^∞. On identifie $\mathcal{O}$ au quotient de $ImX(M)$ par le stabilisateur de δ_0 dans $Im(X(M))$, $ImX(M)_{\delta_0}$, qui est un groupe fini. On note T' la forme linéaire sur $C^\infty(ImX(M), P)$ obtenue par composition de T avec l'opération moyenne des fonctions sur $ImX(M)$ par $ImX(M)_{\delta_0}$. Comme $p_\Omega \circ r = r_{\Omega,\mathcal{O}_\mathbb{C}} \circ p_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}$ (cf. (2.24)), on voit que J' est l'idéal de $\mathrm{Pol}(X(M))$ engendré par $p^*_{\mathcal{O}_\mathbb{C}}(J)$. Alors, utilisant les définitions et (2.23) on voit que T' est annulée par les opérateurs de multiplication par les éléments de J'. Or, il résulte de (2.25) que la variété des zéros de J' est finie. Du fait que f est biinvariante par un sous-groupe compact ouvert, H, T' (resp T) peut être regardé comme un élément du produit tensoriel de l'espace $\mathcal{D}'(Im\ X(M))$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$) avec le dual admissible de $L(\delta_0, P)$, qui s'identifie naturellement à $L(\tilde{\delta}_0, P)$. Comme la variété des zéros de J' est finie, il en résulte que le support de T' est fini, et donc (cf. [S], Théorème XXXV) T' s'exprime comme une somme du produit tensoriel de dérivées de distributions de Dirac, $D_\chi \delta_\chi$, avec des éléments $\varphi \in L_K(\tilde{\delta}_0, P)$, où D_χ est un opérateur différentiel. On note φ_χ l'élément de $L(\tilde{\delta}_0, P)$ dont la restriction à $K \times K$ est φ. Il en résulte que la distribution T est de même nature. C'est une somme finie de termes de la forme $D_\omega \delta_\omega \otimes \varphi_\omega$, , où $\omega \in \mathcal{O}$, D_ω est un opérateur différentiel sur $\mathcal{O}$, δ_ω est la distribution de Dirac en ω et $\varphi_\omega \in L_K(\tilde{\delta}_0, P)$. Conformément au Lemme 6, $f_\omega = D_\omega E_\omega$, avec $E_\omega := E^G_P(\varphi_\omega)$, est un élément de $\mathcal{A}_{temp}(G)$. Par ailleurs, il résulte de (2.13) que :

$$T_{E_\omega,(\mathcal{O},P)} \textit{ restreint à } C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},P)} \textit{ est égal à } \delta_\omega \otimes \varphi_\omega. \tag{2.28}$$

Le Lemme 6 permet de dériver sous le signe intégrale et de prouver que :

$$T_{f_\omega,(\mathcal{O},P)} \textit{ restreint à } C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},P)} \textit{ est égal à } D_\omega\delta_\omega \otimes \varphi_\omega. \tag{2.29}$$

De même, on trouve :

$$T_{f_\omega,(\mathcal{O}',P')} \textit{ restreint à } C^\infty(\mathcal{O}', P')^{Stab(\mathcal{O}',P')} \textit{ est nul pour tout élément } (\mathcal{O}', P') \textit{ de } \Theta/ass \textit{ distinct de } (\mathcal{O}, P). \tag{2.30}$$

Prenant la somme de ces f_ω lorsque $(\mathcal{O}, P)$ varie dans l'ensemble fini des éléments de Θ/ass tels que $T_{f,(\mathcal{O},P)}$ soit non nul (cf. [W2], Théorème VIII.1.2 et Remarque VIII.1.3), on obtient un élément F de $\mathcal{A}_{temp}(G)$ tel que : $T_{F-f,(\mathcal{O},P)}$ restreint à $C^\infty(\mathcal{O}, P)^{Stab(\mathcal{O},P)}$ est nul pour tout élément $(\mathcal{O}, P)$ de Θ/ass. Alors, la définition des distributions T (cf. 2.22), montre que pour tout $(\mathcal{O}, P) \in \Theta/ass$, $F - f$ est orthogonale aux fonctions $\mathcal{I}\psi$, $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$. Or les combinaisons linéaires de ces fonctions engendrent $\mathcal{C}(G)$, d'après (2.13). Ceci montre que f est égal à F. Ainsi f a la forme désirée. Ceci achève de prouver (i).

Prouvons (ii). La preuve de (i) montre que $\mathcal{A}_{temp}(G)$ est égal à

$$\sum_{(\mathcal{O},P)\in\Theta/ass,\delta\in\mathcal{O}} \mathcal{A}_{temp}(G, \delta). \tag{2.31}$$

Montrons d'abord que si δ et δ' sont conjuguées, $\mathcal{A}_{temp}(G, \delta)$ et $\mathcal{A}_{temp}(G, \delta')$ sont égaux. On déduit, des opérateurs d'entrelacement normalisés (cf. [A], Theorem 2.1

et après (2.14) du présent article) une famille C^∞ d'opérateurs d'entrelacement inversibles entre $(i_{G,P}(\delta \otimes \nu))_{\nu \in ImX(M)}$ et $i_{G,P}(\delta' \otimes \nu^s)_{\nu \in ImX(M)}$. Ceci permet d'exprimer les coefficients d'une famille à l'aide de ceux de l'autre et de voir que les dérivées de coefficients pour ν trivial sont les mêmes pour les 2 familles. D'où l'égalité cherchée. Donc

$$\mathcal{A}_{temp}(G) = \sum_{(\mathcal{O},P)\in\Theta/ass, \delta\in\mathcal{O}/ass} \mathcal{A}_{temp}(G,\delta). \tag{2.32}$$

Maintenant la définition de $\mathcal{A}_{temp}(G,\delta)$ et le Lemme 16 (i) de l'Appendice B montrent que, en ne regardant que l'action à droite de G, les sous-quotients simples de $\mathcal{A}_{temp}(G,\delta)$ sont des sous-quotients simples de $i_{G,P}(\delta)$. Alors, on déduit de (2.14) que dans l'équation précédente la somme est directe. □

3 Coefficients de représentations induites

3.1 Exposants de représentations induites, construites à partir de représentations tempérées

Rappelons un fait élémentaire sur les projections sur un cône convexe fermé, C, d'un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie E. On note C^0 le cône dual de C, i.e. $C^0 = \{v \in E | (v|c) \leq 0, \ \ c \in C\}$. On note la projection de $v \in E$ sur C, v^C. Alors (cf. [Sou], Equation (23)) :

Soit $v, v' \in E$. On a $v - v^C \in C^0$ et $v - v^C$ othogonal à v^C.
De plus, si $v' - v \in C^0$ ou si $(v' - v|v^C) = 0$, on a $\|v^C\| \leq \|v'^C\|$ avec égalité seulement si $v^C = v'^C$. (3.1)

On note que la projection n'est pas changée si le produit scalaire est multiplié par un nombre positif. Remarquons également que si E est la somme directe orthogonale d'une famille finie E_i de sous-espaces, si C est le produit de cônes convexes fermés des E_i, C_i, la projection de v est la somme des projections des composantes de v sur les C_i.

Dans nos applications, E sera de la forme $\mathfrak{a}_P^*$, pour $P = MN$ sous-groupe parabolique semi-standard, C sera l'ensemble des éléments P-dominants et C^0 sera ${}^+\overline{\mathfrak{a}}_P^*$.

Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G, π une représentation admissible de M :

Si χ est un exposant le long de G de $i_{G,P}\pi$, il est de la forme $\chi'_{|A_G}$, où χ' est un exposant de π le long de M . (3.2)

Lemme 7 *On suppose que π est une représentation admissible tempérée de M. Soit χ un caractère non ramifié de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, i.e., $|\chi| = \chi$, avec $Re\, ln\, \chi$ strictement P-dominant. Soit $Q = LV$ un autre sous-groupe parabolique semi-standard.*

(i) Avec les notations de (1.13) à (1.15), les exposants de $i_{G,P}(\pi \otimes \chi)$ le long de $\overline{Q}$ sont de la forme

$$\chi(w,\mu) = ((\mu \chi_{|A_{\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M}})^{w})_{|A_Q} \tag{3.3}$$

où $w \in \mathcal{W}_{P,\overline{Q}}$, et où μ est un élément de l'ensemble $Exp(\pi, \overline{Q}^{w^{-1}} \cap M)$ des exposants de π le long de $\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M$.

En outre $r_{\overline{Q},G}(i_{G,P}(\pi \otimes \chi))$ est annulé par le produit :

$$\prod_{w \in \mathcal{W}_{P,\overline{Q}}} (a - \chi(w,\mu)(a))^{l(\pi)}, \quad a \in A_Q \tag{3.4}$$

où $l(\pi)$ est le maximum des longueurs des représentations $r_{\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M}\pi$, lorsque w varie dans $\mathcal{W}_{P,\overline{Q}}$.

(ii) Si f est un coefficient de $i_{G,P}(\pi \otimes \chi)$, f_Q est annulé par (3.4), où a agit par translation à droite.

(iii) La projection, $Re\ \ ln\ \chi(w,\mu)_Q$, de $Re\ \ ln\ \chi(w,\mu)$ sur le cône convexe fermé $\overline{\mathfrak{a}}_Q^{*+}$, formé des éléments Q-dominants de $\mathfrak{a}_Q^*$, est de longueur inférieure où égale à celle de $Re\ \ ln\ \chi$. S'il y a égalité, alors $Q \subset P$, la projection de $Re\ \ ln\ \chi(w,\mu)_Q$ est égale à $Re\ \ ln\ \chi$ et $w = 1$.

Démonstration. (i) est une conséquence immédiate de (3.2) et de la filtration (1.15).

Prouvons (ii). De la définition de f_Q (cf. (1.27) et (1.16)), on déduit que c'est un coefficient de $r_{\overline{Q},G} i_{G,P}(\pi \otimes \chi)$. Alors (ii) résulte de (i).

Montrons (iii). D'après les propriétés de la tempérance (cf. (2.1)), pour μ exposant de π le long de $\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M$, on a :

$$Re\ \ ln\ \mu = \sum_i n_i \alpha_i \tag{3.5}$$

où les n_i sont des nombres réels positifs ou nuls et $\alpha_i \in \Sigma(\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M)$. Donc :

$$Re\ \ ln\ (w\mu)_{|\mathfrak{a}_Q} = \Sigma n'_j \alpha'_j, \ \ avec\ \ n'_j \geq 0, \ \ \alpha'_j \in \Sigma(\overline{Q}). \tag{3.6}$$

Par ailleurs, on a l'égalité $Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_{\overline{Q}^{w^{-1}} \cap M}} = Re\ \ ln\ \chi$. Ici on a regardé $Re\ \ ln\ \chi$ comme un élément de $\mathfrak{a}_0^*$, qui contient $\mathfrak{a}_P^*$. Comme $Re\ \ ln\ \chi$ est P-dominant, il est aussi P_0-dominant et l'on a :

$$Re\ \ ln\ w\chi = Re\ \ ln\ \chi - \Sigma_k m_k \beta_k \ \ avec\ \ m_k \geq 0, \ \ \beta_k \in \Sigma(P_0). \tag{3.7}$$

Restreignant à $\mathfrak{a}_Q$ cette égalité, on a :

$$Re\ \ ln\ w\chi_{|\mathfrak{a}_Q} = Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q} + \Sigma_k m_k \beta'_k \tag{3.8}$$

où β'_k est la restriction de $-\beta_k$ à $\mathfrak{a}_Q$, donc est nul soit dans $\Sigma(\overline{Q})$. Tenant compte de is this ok

(3.3), on a :

$$Re\ \ ln\ \chi(w,\mu) = Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q} + \Sigma_j n'_j\alpha'_j + \Sigma_k m_k\beta'_k. \tag{3.9}$$

Alors, tenant compte de (3.1), on en déduit :

$$\|(Re\ \ ln\ \chi(w,\mu))_Q\| \leq \|((Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q}))_Q\| \text{ avec égalité si et seulement si } (Re\ \ ln\ \chi(w,\mu))_Q = ((Re\ \ ln\ \chi)_{|\mathfrak{a}_Q})_Q, \tag{3.10}$$

ce qui implique l'inégalité de (iii). Supposons l'égalité du Lemme réalisée. Alors, il faut que $\|(Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q\| = \|Re\ \ ln\ \chi\|$, et on doit en particulier avoir

$$\|(Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q\| = \|Re\ \ ln\ \chi\|$$

Cette égalité implique notamment :

$$Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q} = Re\ \ ln\ \chi. \tag{3.11}$$

Ceci équivaut au fait que $Re\ ln\ \chi$ soit orthogonal aux poids de $\mathfrak{a}_0$ dans L. La condition de dominance de χ montre que cela implique $L \subset M$, soit encore $Q \subset P$. Alors $Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q} = (Re\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q$. Par ailleurs, d'après (3.8), (3.9), on a

$$Re\ \ ln\ \chi(w,\mu) = (wRe\ \ ln\ \chi)_{|\mathfrak{a}_Q} + \Sigma_j n'_j\alpha'_j.$$

D'après (3.1), cela implique que la norme de $\chi(w,\mu)_Q$ est inférieure ou égale à celle de $(wRe\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q$. D'après (3.8) et (3.1), celle-ci est plus petite que celle de $Re ln \chi$, avec égalité seulement si $(wRe ln \chi_{|\mathfrak{a}_Q})_Q$ est égale à $Re ln \chi$ (en tenant compte de (3.11)). Mais alors cela implique, par les propriétés des projections, que dans (3.8), $\chi = \chi_{|\mathfrak{a}_Q}$ est orthogonal à $x = \Sigma_k m_k \beta'_k$. Comme la norme de $Re\ ln\ \chi$ est égale à celle de $wRe\ \ ln\ \chi$, x doit être nul. On en déduit $wRe\ \ ln\ \chi = wRe\ \ ln\ \chi_{|\mathfrak{a}_Q} = Re\ \ ln\ \chi$. Comme $\chi = Re\ \ ln\ \chi$, le stabilisateur de χ dans W^G est engendré par les réflexions qu'il contient (cf. [War], Th. 1.1.2.8). Les hypothèses sur χ impliquent $w \in W^M$, et comme par hypothèse (voir avant (1.13)), $1 \in \mathcal{W}_{P,Q}$, on a $w = 1$. Ceci achève de prouver le lemme. □

3.2 Un Lemme de Langlands et quelques conséquences

Lemme 8 *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard et (π, V) une représentation irréductible de carré intégrable de M. Soit χ un élément de $X(M)$, tel que $Re\ \ ln\ \chi \in \mathfrak{a}_P^{+*}$. On note χ_π le caractère de A_M par lequel ce dernier agit sur l'espace, V_χ, de $\pi \otimes \chi$. Soit $f \in i_{G,P}V_\chi$, $\tilde{f} \in i_{G,P}\tilde{V}_\chi$, $m \in M$. Soit $\lambda \in \Lambda(\overline{P})^{--}$. Alors :*

(i)

$$lim_{n\to+\infty}(\delta_P^{1/2}\chi_\pi^{-1})(\lambda^n) < i_{G,P}(\pi\otimes\chi)(\lambda^n)f, \tilde{f} > = < (J_{\overline{P}|P}(\pi\otimes\chi)f)(e), \tilde{f}(e) > .$$

(ii) On note F la fonction $E_P^G(f \otimes \tilde{f})$. Notons E^M l'application coefficient entre $\pi \otimes \chi$ et $(\pi \otimes \chi\tilde{)}$, qui est un morphisme du produit tensoriel de la représentation $(\pi \otimes \chi) \otimes (\pi \otimes \chi\tilde{)}$ vers $\mathcal{A}(M)$, muni du produit de la représentation régulière droite et de la représentation régulière gauche de M, qu'on regarde comme des représentations de $P \times \overline{P}$.

Alors

$$((F_{\overline{P}}^{ind})_{\chi_\pi}(g_1, g_2))(m) = (E^M)((J_{\overline{P}|P}(\pi \otimes \chi)f)(g_2)) \otimes \tilde{f}(g_1))(m), \quad g_1, g_2 \in G, m \in M. \tag{3.12}$$

Démonstration. La partie (i) est la version p-adique d'un Lemme de Langlands ([L], Lemme 3.12). La preuve est identique. On indique seulement où trouver les différents ingrédients de sa preuve. L'analogue des Lemmes 3.6 et 3.7 de [L], sont contenus dans le Lemme II.1.1 de [W2].

Pour terminer, on utilise un analogue du Lemme 43 de [H-C], ce qui est fournit par les 2 équations suivantes.

On a (cf. eg. [Si] , Lemme 4.3.1).

Il existe $X_P \in \mathfrak{a}_M$ tel que :

$$H_P(\overline{n}) \in X_P +^+ \mathfrak{a}_P, \ \ \overline{n} \in \overline{N}. \tag{3.13}$$

En procédant de façon similaire, on montre aussi :

Il existe $Y_P \in \mathfrak{a}_M$ tel que pour tout $m \in M$ vérifiant $H_P(m) \in \mathfrak{a}_P^+$, on ait:

$$H_P(\overline{n}) - H_P(m\overline{n}m^{-1}) \in Y_P +^+ \mathfrak{a}_P, \ \ \overline{n} \in \overline{N}. \tag{3.14}$$

Ceci achève de prouver (i).

Montrons (ii). On pose $f = (F_{\overline{P}})_{|\Lambda(M)}$. On note $\chi_\pi^M = (\chi_\pi)_{|\Lambda(M)}$. On utilise le résultat de (i) en changeant f en $(i_{G,P}(\pi \otimes \chi))(m)f$, $m \in \Lambda(M)$. D'après la définition de $(E_\nu)_P$ (cf. (1.27)) et le Lemme 12, Appendice A, on voit que :

$$(f_{\chi_\pi^M})(m) \text{ est égal au second membre de (3.12) pour } g_1 = g_2 = e. \tag{3.15}$$

Mais

$$f_{\chi_\pi^M} = \sum_{\phi_{|\Lambda(M)} = \chi_\pi^M} (F_{\overline{P},\phi})_{|\Lambda(M)} \tag{3.16}$$

où les ϕ décrivent les caractères de A_M. L'égalité $\phi_{|\Lambda(M)} = \chi_\pi^M$ implique $Re \ \ ln\, \phi = Re \ \ ln\, \chi_\pi$. Mais les ϕ donnant une contribution non nulle sont des exposants de $i_{G,P}(\pi \otimes \chi)$, le long de $\overline{P}$, d'après (1.29). Tenant compte du Lemme 7 (i) avec $Q = P$, on doit avoir $\phi = \chi(w, \mu)$, avec les notations de (3.3). Mais, d'après le Lemme 7 (iii), on a $w = 1$. Reportant dans (3.3), on en déduit $\phi = \chi_\pi$. Cela montre que le premier membre de (3.16) est égal au premier membre de (3.12) pour $g_1 = g_2 = e$.

Joint à (3.15), cela prouve l'identité (3.12) du Lemme pour $g_1 = g_2 = e$, $m \in \Lambda(M)$. Remplaçant f par $(i_{G,P}(\pi \otimes \chi))(g_2^{-1})f$ et $\tilde{f}$ par $(i_{G,P}(\pi \otimes \chi)\tilde{)}(g_1^{-1})\tilde{f}$ on déduit l'égalité (3.12) pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $m \in \Lambda(M)$. Les relations de covariance des 2 membres de (3.12) (par exemple lorsque l'on remplace g_1 par $g_1 m'$) conduisent alors à (3.12) pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $m \in M$. □

Soit $Q = LV$ un sous-groupe parabolique standard de G contenu dans $P = MN$, $\delta \in \mathcal{E}_2(L)$, ν appartenant à l'ensemble O des caractères non ramifiés de L dont la restriction χ (notée aussi χ_ν), de $Re\ \ ln\ \nu$ à A_M vérifie $Re\ \ ln\ \chi = Re\ \ ln\ \nu$ et est strictement P-dominante. L'ensemble O s'identifie à $ImX(L) \times \mathfrak{a}_P^{*+}$ en associant à ν le couple $(Im\nu, Re\ \ ln\ \nu)$, où $Im\nu = |\nu|^{-1}\nu$. On notera aussi χ_δ la restriction du caractère central de $\delta \otimes \nu$ à A_M.

Soit $f \in i_{K,K\cap Q}V$, $f' \in i_{K,K\cap Q}\tilde{V}$. On note f_ν (resp f'_ν), l' élément correspondant de $i_{G,Q}(\delta \otimes \nu)$ (resp. $i_{G,Q}(\delta \otimes \nu\tilde{)}$). On note E_ν l'élément de $\mathcal{A}(G)$ défini par :

$$E_\nu(g) =< (i_{G,Q}(\delta \otimes \nu))(g)f_\nu, f'_\nu >, \quad g \in G.$$

On identifie $i_{G,Q}(\delta \otimes \nu)$ à $i_{G,P}(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu))$ comme suit : à $f_\nu \in i_{G,Q}(\delta \otimes \nu)$, on associe $T(f_\nu) \in i_{G,P}(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu))$, définie par :

$$(T(f_\nu)(g))(m) = f_\nu(gm)\delta_P^{1/2}(m), \quad g \in G, m \in M\,. \tag{3.17}$$

On a une application similaire T' de $i_{G,Q}(\delta \otimes \nu\tilde{)}$ dans $i_{G,P}(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu\tilde{)})$:

$$(T'(f'_\nu)(g))(m) = f'_\nu(gm)\delta_P^{1/2}(m), \quad g \in G, m \in M\,. \tag{3.18}$$

La restriction R des fonctions à $K \times (K \cap M)$, permet de réaliser $i_{G,P}(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu))$, dans un espace indépendant de ν, I. Cette réalisation est appelée réalisation compacte. La restriction R est injective, en raison des propriétés de covariance, et on voit que :

$$R(T(f_\nu)) \textit{ ne dépend pas de } \nu. \tag{3.19}$$

Les hypothèses sur ν montrent qu'il existe un caractère non ramifié de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, dont la restriction à A_M est χ. On le note encore χ. Alors:

$$(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu)) = (i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes Im\nu)) \otimes \chi. \tag{3.20}$$

Soit $\overline{N}$ le radical unipotent de $\overline{P}$. On note Q' le sous-groupe parabolique de G engendré par $Q \cap M$ et $\overline{N}$ de sorte que $Q = L(V \cap M)\overline{N}$. Alors, il résulte de [A], équation (J3), section 1 :

$$J_{\overline{P}|P}(i_{M,Q\cap M}(\delta \otimes \nu))T(f_\nu) = T(J_{Q'|Q}(\delta \otimes \nu)f_\nu). \tag{3.21}$$

En effet l'équation (J3) de [A] est l'idendité ci-dessus, lue dans les réalisations compactes.

Lemme 9 *(i) Avec les notations précédentes, on a :*

$$(E_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi}(g_1,g_2)(m) = < (i_{M,Q\cap M}\delta\otimes\nu)(m)(T(J_{Q'|Q}(\delta\otimes\nu)f_\nu))(g_2)), (T'(f'_\nu))(g_1) >$$

pour $g_1, g_2 \in G, m \in M$, où le crochet de dualité est celui entre $i_{M,Q\cap M}(\delta\otimes\nu)$ et $i_{M,Q\cap M}(\widetilde{\delta\otimes\nu})$.

(ii) $(E_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi_\delta}$ est une fonction C^∞ de ν sur O.

(iii) De plus, si D est un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur O, on a : $D(E_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi_\delta} = (DE_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi_\delta}$.

Démonstration. On peut appliquer les résultats du lemme précédent avec $\pi = \pi_{Im\nu}$, où $\pi_{Im\nu} = i_{M,Q\cap M}(\delta\otimes Im\nu)$. Alors $\chi_\pi = \chi_\delta$. D'où l'on déduit (i).

Montrons (ii). Il suffit, en faisant varier f et f', de montrer l'assertion correspondante pour $(E_\nu)_P$. Soit $\lambda \in \Lambda(\overline{P}))^{--}$. Soit $m \in M$. On utilise (1.27). Comme f_ν et f'_ν sont fixés par un sous-groupe compact ouvert indépendant de ν, il existe un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé, H, fixant $i_{G,Q}(\delta\otimes\nu)(m)f_\nu$ et f'_ν, pour tout ν. Il résulte donc de (1.27) qu'il existe $\lambda \in \Lambda^{--}(P,H)$ et $N \in \mathbb{N}$, tels que :

$$(E_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n) = (E_\nu)(m\lambda^n), n > N, \nu \in O. \tag{3.22}$$

Ceci prouve que $(E_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n)$ est C^∞ en $\nu \in O$, pour $n > N$. On a une identité similaire pour $(DE_\nu)_{\overline{P}}$. Cette identité, jointe à celle obtenue par dérivation de (3.22), conduit à :

$$D((E_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n)) = (DE_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n), n > N. \tag{3.23}$$

Il résulte de (3.4), appliqué à $a = \lambda$, que la suite $n \mapsto (E_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire dont les coefficients sont C^∞ en ν. Joint à ce qui précède cela prouve $(E_\nu)_{\overline{P}}(m)$ est C^∞ en ν. Ce qui prouve (ii). D'autre part, on déduit du Lemme 15 (ii), Appendice A, que la suite $n \mapsto (D(E_\nu)_{\overline{P}}))(m\lambda^n)$ vérifie une relation de récurrence du même type. Maintenant, par itération des Lemmes 16 (ii) et 17 (iii), Appendice B, DE_ν est somme de coefficients de représentations induites à partir de représentations dont les sous-quotients sont isomorphes à $\delta\otimes\nu$. Alors, d'aprés (3.4), appliqué à $a = \lambda$, la suite $n \mapsto (DE_\nu)_{\overline{P}}(m\lambda^n)$ satisfait une relation de récurrence que $n \mapsto (D(E_\nu)_{\overline{P}}))(m\lambda^n)$ vérifie aussi. D'où leur égalité grâce à (3.23). L'égalité pour $n = 0$ conduit à l'identité:

$$(DE_\nu)_{\overline{P}}(m) = D((E_\nu)_{\overline{P}}(m)), \;\; m \in M. \tag{3.24}$$

Soit $m' \in M$. On va utiliser le Lemme 15, appendice A, pour la restriction h_ν de $R_{m'}(E_\nu)_{\overline{P}}$ au réseau $\Lambda(M)$, où $R_{m'}$ désigne la translation à droite par m'. On peut lui appliquer ces résultats d'après le Lemme 7 (ii). On fixe $\nu^0 \in O$. On note χ^0 sa restriction à A_M et χ^0_δ la restriction à A_M du caractère central de $\pi_{Im\nu^0}$. On note $\chi^{0,M}$ la restriction de χ^0 à $\Lambda(M)$. On cherche à déterminer $\Xi(\nu,\nu^0)$.

Si ψ est un caractère de $\Lambda(M)$, on a :

$$(h_\nu)_\psi = \sum_{\phi_{|\Lambda(M)}=\psi} (R_{m'}(E_\nu)_{P,\phi})_{|\Lambda(M)} \tag{3.25}$$

où les ϕ décrivent les caractères de A_M. D'après (1.29) et le Lemme 7 (avec $Q = P$ et $\pi = \pi_{Im\nu}$), ceux donnant une contribution non nulle sont de la forme:

$$\chi(w, \mu, \nu) := ((\mu\chi_{|A_{\overline{P}^{w^{-1}}\cap M}})^w)_{|A_M}$$

où $w \in \mathcal{W}_{P,\overline{P}}$, μ est un exposant de $\pi_{Im\nu}$ le long de $\overline{P}^{w^{-1}} \cap M$. Donc les éléments ψ de $\Xi(\nu, \nu^0)$ sont les restrictions à $\Lambda(M)$ des $\chi(w, \mu, \nu)$ vérifiant :

$$\chi(w, \mu, \nu^0)_{|\Lambda(M)} = \chi^{0,M}.$$

Pour cela, il est nécessaire que l'on ait :

$$Re\ \ ln\ \chi(w, \mu, \nu^0) = Re\ \ ln\ \chi^0.$$

D'après le Lemme 7 (iii), cela implique $w = 1$. Alors $\chi(w, \mu, \nu) = \chi^\delta$. Ceci entraine:

$$\Xi(\nu, \nu^0) = \{(\chi_\delta)_{|\Lambda(M)}.\} \tag{3.26}$$

De plus, tenant compte de ce qui précède, (3.25) implique:

$$((h_\nu)_{\chi_{\delta|\Lambda(M)}} = (R_{m'}(E_\nu)_{\overline{P},\chi_\delta})_{|\Lambda(M)}. \tag{3.27}$$

Alors, le Lemme 15 (iii) de l'appendice A, joint à (3.26) et à l'équation précédente montre que pour $m \in \Lambda(M)$, $\nu \mapsto (E_\nu)_{\overline{P},\chi_\delta}(mm'))$ est C^∞ sur O et que

$$D(E_\nu)_{\overline{P},\chi_\delta}(mm') = (DE_\nu)_{\overline{P},\chi_\delta}(mm'),\ \ m \in \Lambda(M).$$

D'où l'on déduit l'identité de (iii). $\square$

Montrons :

Il existe une fonction polynôme sur $X(M)$ non identiquement nulle telle que $\nu \mapsto A(\nu) := p(\nu)(J_{Q'|Q}(\delta\otimes\nu))^{-1}$ soit polynomiale sur $X(M)$. (3.28)

En effet $J_{Q'|Q}(\delta\otimes\nu)J_{Q|Q'}(\delta\otimes\nu)$ est une fonction rationnelle et scalaire, j. De plus, elle est non identiquement nulle car les opérateurs sont inversibles pour ν générique (cf. [W2], Proposition IV.2.2.). Donc j est non nulle. On en déduit l'existence de p.

Corollaire 1 *On note $F_\nu(g) :=< (i_{G,Q}(\delta\otimes\nu))(g)A(\nu)f_\nu, f'_\nu >$. Alors :*
(i) $\nu \mapsto F_\nu$ est C^∞ sur O, de même que $(F_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi_\delta}$.
(ii) Pour $\nu \in O$ et D opérateur différentiel sur O,

$$(DF_\nu)^{ind}_{\overline{P},\chi_\delta}(g_1, g_2)(m) = D(p(\nu) < (i_{M,Q\cap M}(\delta\otimes\nu))(m)T(f_\nu)(g_2), T'(f'_\nu)(g_1) >)$$

pour $g_1, g_2 \in G, m \in M$.

Démonstration. On écrit

$$A(\nu)f_\nu = \sum_{i\in I} a_i(\nu)(f_i)_\nu \tag{3.29}$$

où I est fini et les a_i sont des fonctions polynômes : c'est la traduction du fait que $A(\nu)$ est polynomiale en ν. Alors (i) et l'identité de (ii) pour $D = 1$ résultent des points (i) et (ii) du lemme précédent. Maintenant, toujours en tenant compte de (3.29), on déduit du Lemme précédent (ii), que l'on a $(DF_\nu)^{ind}_{P,\chi_\delta} = D(F_\nu)^{ind}_{P,\chi_\delta}$. Tenant compte de l'égalité prouvée pour $D = 1$, cela achève de prouver le Corollaire. □

Au vu du Corollaire précédent, il est utile de prouver :

Lemme 10 *Soit F une fonction C^∞ au voisinage de 0 dans $E = \mathbb{R}^p$, à valeurs dans V, espace vectoriel topologique. Soit p un polynôme non nul sur E. On regarde l'algèbre symétrique $S(E)$ comme l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur E. Alors les espaces vectoriels :*

$$A = \{(D(pF))(0) | D \in S(E)\}$$

et :

$$B = \{(DF)(0) | D \in S(E)\}$$

sont égaux.

Démonstration. D'abord, en appliquant la formule de Leibniz, on a :

$$A \subset B.$$

Montrons d'abord l'inclusion inverse pour $dim\ E = 1$. Pour cela, montrons par récurrence sur n, que :

$$F^{(n)}(0) \in A.$$

Soit n_0 l'ordre du zéro de p en 0. En utilisant la formule de Leibniz, on voit que $(pF)^{(n_0+n)}(0)$ est égal à la somme d'un multiple non nul de $F^{(n)}(0)$ et d'une combinaison linéaires de $F^{(k)}(0)$, $k < n$. Une récurrence facile conduit à l'assertion ci-dessus, donc au lemme pour $dim\ E = 1$.

Retournons au cas général. On note E^1 l'ensemble des $X \in E$ tels que le polynôme à une variable, $t \mapsto p(tX)$, ne soit pas identiquement nul. Cet ensemble est dense dans E. Il résulte de ce qui précède que :

$$\{(X^n F)(0) | n \in \mathbb{N}, X \in E^1\} \subset A.$$

Par densité et continuité on peut remplacer E^1 par E dans l'inclusion ci-dessus, et le lemme en résulte. □

4 Filtration de l'espace $\mathcal{A}(G)_\omega$

On fixe $\omega \in \Omega(G)$. On note Ω la composante connexe de $\Omega(G)$ qui contient ω. On note $\mathcal{A}(G)_\omega$ l'espace des éléments f de $\mathcal{A}(G)$, tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant:

$$(z - z(\omega))^n f = 0, \ \ z \in ZB(G).$$

On introduit une filtration $\mathcal{F}_\omega$ de $\mathcal{A}(G)_\omega$ comme suit.

On note $\mathcal{E}_\omega$ l'ensemble des paires (P, χ), où $P \in \mathcal{P}_{st}$ et χ est un exposant asymptotique d'au moins un élément de $\mathcal{A}(G)_\omega$ le long de $\overline{P}$. D'après la Proposition 1 et (1.29), on a :

$$\mathcal{E}_\omega \textit{ est un ensemble fini .} \tag{4.1}$$

On note $\mathcal{E}^0_\omega$, l'ensemble des éléments (P, χ) de $\mathcal{E}_\omega$ pour lesquels la norme de la projection $Re ln \chi_P$ de $Re ln \chi$ sur le cône convexe fermé, $\overline{\mathfrak{a}}^{*+}_P$, est minimale. On définit par récurrence $\mathcal{E}^{n+1}_\omega$ comme l'ensemble des éléments (P, χ) de $\mathcal{E}_\omega \setminus \cup_{k=0,\dots,n} \mathcal{E}^n_\omega$ pour lesquels la norme de $Re\ ln\ \chi_P$ est minimale. On note cette norme l_{n+1}, si cet ensemble est non vide. Alors la filtration $\mathcal{F}_\omega$ est définie comme suit :

$\mathcal{F}^n_\omega$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}(G)_\omega$ dont les exposants asymptotiques sont éléments de $\cup_{k=0\dots n} \mathcal{E}^k_\omega$. (4.2)

On remarquera que la projection sur le cône convexe fermé $\overline{\mathfrak{a}}^{*+}_P$ ne dépend pas de produit scalaire choisi W^G invariant choisi (cf. la discussion suivant (3.1)), mais les ensembles $\mathcal{E}^n_\omega$ peuvent en dépendre, donc la filtration aussi.

On note $E^n_\omega := \{(P, \chi) \in \mathcal{E}^n_\omega | Re\ \ ln\ \chi \in \mathfrak{a}^{*+}_P\}$ et pour $(P, \chi) \in E^n_\omega$, on note $|\chi|$ le module de χ, qui est un caractère non ramifié de M vérifiant $Re\ \ ln\ |\chi| = Re\ \ ln\ \chi$. On note $\mathcal{A}_{temp}(M)|\chi|$ le $M \times M$-module formé des produits par $|\chi|$ des éléments de $\mathcal{A}_{temp}(M)$. Si θ est un caractère de $ZB(M)$. On note $\tilde{\theta}_{|\chi|}$ le caractère de $ZB(G)$ par lequel celui-ci agit sur $i_{G,P}(\pi \otimes |\chi|)$, lorsque $ZB(M)$ agit sur π par θ.

Lemme 11 *(i) Pour $(P, \chi) \in E^n_\omega$ et $f \in \mathcal{F}^n_\omega$, on note $T_{P,\chi}(f) := f^{ind}_{\overline{P},\chi}$. Alors $T_{P,\chi}$ est un morphisme de $G \times G$-modules entre $\mathcal{A}(G)_\omega$ et $i_{G\times G, P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M)|\chi|)$.*

(ii) Notons $\hat{Z}B(M)$ l'ensemble des caractères de $ZB(M)$. L'image de $T_{P,\chi}$ est contenue dans :

$$\oplus_{\theta \in \hat{Z}B(M),\ \tilde{\theta}_{|\chi|}=\omega} i_{G\times G, P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M)_\theta)|\chi|$$

(iii) L'intersection des noyaux des $T_{P,\chi}$, $(P, \chi) \in E^n_\omega$, est égale à $\mathcal{F}^{n-1}_\omega$.

Démonstration. Pour montrer (i), il faut montrer que, pour tout $g_1, g_2 \in G$, $f^{ind}_{\overline{P},\chi}(g_1, g_2) \in (\mathcal{A}_{temp}(M))|\chi|$. En utilisant les définitions, quitte à translater f à droite et à gauche, on se ramène à prouver l'assertion pour $g_1 = g_2 = e$. Il faut donc montrer

$$f_{\overline{P},\chi} \in (\mathcal{A}_{temp}(M))|\chi|.$$

Soit χ' un exposant asymptotique de $f_{\overline{P},\chi}$ le long de $\overline{R}$, où R est un sous-groupe parabolique standard de M. Soit $Q = LV$ le sous-groupe parabolique standard de G engendré par R et P_0. Alors, tenant compte de

$$(f_{\overline{P}})_{\overline{R}} = f_{\overline{Q}}.$$

χ' est un exposant asymptotique de f le long de Q et de plus :

$$Re\ ln\ \chi'_{|\mathfrak{a}_M} = Re\ ln\ \chi$$

Alors :

$$Re\ ln\ \chi' = \mu + Re\ ln\ \chi,\ \ avec\ \ \mu = Re\ ln\ \chi'_{|\mathfrak{a}_Q^M} \in (\mathfrak{a}_Q^M)^*. \tag{4.3}$$

En particulier cette décompostion est orthogonale. D'après (3.1), cela implique que $(Re\ \ ln\ \chi')_Q$ est de norme supérieure ou égale à celle de $(Re\ \ ln\ \chi)_Q = Re\ \ ln\ \chi$. Comme $f \in \mathcal{F}^n_\omega$ et $(P, \chi) \in E^n_\omega$, on doit avoir égalité, ce qui, toujours d'après (3.1), implique que $(Re\ \ ln\ \chi')_Q = Re\ \ ln\ \chi$. Alors, (3.1) joint à (4.3) montre que $\mu \in -\overline{\mathfrak{a}}^{*+}_Q$. Comme $\mu \in (\mathfrak{a}_Q^M)^*$, cela implique $\mu \in -\overline{\mathfrak{a}}^{*+}_R$. Cela prouve, grâce à (2.1), que $|\chi|^{-1} f_{\overline{P},\chi}$ est un élément de $\mathcal{A}_{temp}(M)$. Ceci prouve (i), puisque la propriété d'entrelacement est immédiate. Pour f comme ci dessus, on décompose $|\chi|^{-1} f_{\overline{P},\chi}$ en vecteurs propres généralisés sous l' action de $ZB(M)$, pour l'action régulière droite de M. Si une composante correspondant à un caractère θ de $ZB(M)$ est non nulle, joint à (i), cela implique un entrelacement non nul entre $\mathcal{F}^n_\omega$ et $i_{G\times G, P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M))_\theta|\chi|$. Pour des raisons de caractère infinitésimal cela implique :

$$\tilde{\theta}_{|\chi|} = \omega\,.$$

Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Il est clair que $\mathcal{F}^{n-1}_\omega$ est contenu dans l'intersection des noyaux des $T_{P,\chi}$, $(P, \chi) \in E^n_\omega$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $f \in \mathcal{F}^n_\omega$ dans l'intersection des noyaux des $T_{P,\chi}$, $(P, \chi) \in E^n_\omega$. On va montrer $f \in \mathcal{F}^{n-1}_\omega$. En effet soit η un exposant asymptotique de f le long de $\overline{Q}$, opposé au sous-groupe parabolique standard Q. Soit $P = MN$ le sous-groupe parabolique standard tel que les racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de M soit l'ensemble des racines orthogonales à $(Re\ ln\ \eta)_Q$. Alors on voit que $(Re ln \eta)_Q \in \mathfrak{a}^{+*}_P$. Par ailleurs, la restriction χ de η à A_M est un exposant asymptotique de f le long de $\overline{P}$, d'après la propriété d'hérédité du terme constant. Mais alors, comme $(Q, \eta) \in \cup_{k=0,\dots,n}\mathcal{E}^k_\omega$, on a $(Q, \eta) \in \mathcal{E}^k_\omega$ et $(P, \chi) \in E^k_\omega$, pour un k compris entre 0 et n. Si $k = n$, $T_{P,\chi}(f)$ est non nul, ce qui contredit nos hypothèses. Donc k est strictement plus petit que n. Ceci achève de prouver que $f \in \mathcal{F}^{n-1}_\omega$et de prouver le lemme. □

Théorème 2 *Soit (P, η) un couple où $P = MN$ est un sous-groupe parabolique standard, η un caractère non ramifié de A_M, à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, pour lequel il existe $(P, \chi) \in E^n_\omega$ avec $\eta = |\chi|$. On note E'^n_ω, l'ensemble de ces couples La somme des* *applications* $T_{P,\chi}$, $(P,\chi) \in E^n_\omega$ *avec* $|\chi| = \eta$, *notée* $T'_{P,\eta}$ *est un morphisme surjectif de* $G \times G$*-modules de* $\mathcal{F}^n_\omega$ *sur*

$$I_{P,\eta} := \oplus_{\theta,\tilde{\theta}_\eta=\omega} i_{G\times G,P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M)_\theta)\eta.$$

(ii) La somme directe des applications $T'_{P,\eta}$, $(P,\eta) \in E'^n_\omega$, *est un isomorphisme de* $G \times G$*-module de* $\mathcal{F}^n_\omega/\mathcal{F}^{n-1}_\omega$ *avec :*

$$\oplus_{(P,\eta)\in E'^n_\omega} I_{P,\eta}.$$

Démonstration. Montrons la surjectivité de l'application dans (i). Soit $(P,\eta) \in E'^n_\omega$ et $Q = LV$ un sous-groupe parabolique de G contenu dans P. Soit $\delta \in \mathcal{E}_2(M)$ tel que le caractère infinitésimal, θ, de $\pi = i_{M,Q\cap M}\delta$, vérifie $\tilde{\theta}_\eta = \omega$. D'après le Théorème 1 (ii), il suffit de prouver que l'image de l'application contient $i_{G\times G,P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M,\delta))\eta$. On retient les notations du Corollaire 1 du Lemme 9, où l'on suppose d'une part que $Re\ \ ln\ \nu = Re\ \ ln\ \eta$, χ est remplacé par η, que $Im\nu$ est trivial et que l'opérateur différentiel D ne dépend que des variables dans $ImX(L)$. On note η_δ le produit du caractère central de δ, restreint à A_M, avec η.

D'abord, montrons que DF_ν est élément de $\mathcal{F}^n_\omega$. En effet, d'après les définitions et les Lemmes 16 (iii)et 17 (iii), Appendice B, on a :

$$\text{DF_ν est somme de coefficients de représentations induites, admettant une filtration dont les sous-quotients sont isomorphes à $i_{G,Q}(\delta\otimes\eta)$.} \tag{4.4}$$

Ici on a noté encore η le module de χ, qui est un caractère non ramifié à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ prolongeant η. Notre assertion résulte alors du Lemme 7 (iii). Alors le Corollaire 1 du Lemme 9 permet de déterminer $T_{P,\eta_\delta}(DF_\nu)$. C'est un élément de $i_{G\times G,P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M,\delta)\eta)$. Utilisant le Lemme 10 et le Lemme 18, Appendice B, on voit grâce au Théorème 1 que l'ensemble des $T_{P,\chi}(DF_\nu)$, lorsque f, f' et D varient, engendre l'espace vectoriel $i_{G\times G,P\times\overline{P}}(\mathcal{A}_{temp}(M,\delta)\eta)$. Par ailleurs si (P',χ') est un élément de E^n_ω distinct de (P,η_δ), on va voir que $T_{P',\chi'}(DF_\nu)$ est nul. Les exposants asymptotiques de DF_ν sont des exposants de $i_{G,Q}(\delta\otimes\nu)$. Cette dernière représentation est isomorphe à $i_{G,P}((\pi_{Im\nu})\otimes|\chi|)$, où $\pi_{Im\nu} = i_{M,Q\cap M}(\delta\otimes Im\nu)$. Comme (P,χ), $(P',\chi') \in E^n_\omega$, la norme de $(Re\ ln\ \chi')_{P'}$ èst égale à celle de $(Re\ ln\ \chi)_P = Re\ ln\ \eta$, et le Lemme 7 (iii) montre que, si $T_{P',\chi'}(DF_\nu)$ est non nul, $Re\ ln\ \chi' = Re\ ln\ \eta$, $P' \subset P$. Mais les conditions de régularités imposées à $Re\, ln\, \chi$ et $Re\, ln\, \eta$ montrent que $P = P'$, puis, toujours grâce au Lemme 7 (iii), que $\chi = \chi'$. Une contradiction qui montre que $T_{P',\chi'}(DF_\nu)$ est nul. Ceci achève de prouver (i). Cela montre même la surjectivité de l'application dans (ii).

Montrons l'injectivité dans (ii). On remarque d'abord que

$$T'_{P,\eta}(f) = \sum_{(P,\chi)\in E^n_\omega,|\chi|=\eta} T_{P,\chi}$$

et que si le premier membre est nul, chacun des termes du second membre l'est aussi. Alors l'injectivité résulte du Lemme 11 (ii). □

5 Appendice A, Fonctions sur un réseau

Soit Λ un réseau i.e. un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et soit $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$, une base de Λ. On fixe $\mathcal{X}$, une suite finie $\chi_1, \dots, \chi_n$, d' homomorphismes de Λ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. On note λf ou $R_\lambda f$ l'action régulière droite de $\lambda \in \Lambda$, sur l'élément f de l'espace $\mathbb{C}[\Lambda]$, des applications de Λ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}[\Lambda]_{\mathcal{X}}$, l'ensemble des éléments, f, de $\mathbb{C}[\Lambda]$, tels que

$$(\lambda - \chi_1(\lambda)) \dots (\lambda - \chi_n(\lambda)) f = 0, \ \ \lambda \in \Lambda. \tag{5.1}$$

Si $f \in \mathbb{C}[\Lambda]_{\mathcal{X}}$, on a

$$f = \Sigma_{\chi \in \mathcal{X}} f_\chi \tag{5.2}$$

avec $f_\chi \in \mathbb{C}[\Lambda]$, vérifiant

$$(\lambda - \chi(\lambda))^n f_\chi = 0, \ \ \lambda \in \Lambda. \tag{5.3}$$

Pour le voir il suffit d'utiliser de manière itérée le fait élémentaire suivant. Si T est un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie, tel que $(T-\lambda_1)^{n_1} \dots (T-\lambda_r)^{n_r} = 0$, où les $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont distincts deux à deux, alors pour tout vecteur propre généralisé v pour la valeur propre λ_i, v est annulé par $(T - \lambda_i)^{n_i}$.

Lemme 12 *Soit $f, g \in \mathbb{C}[\Lambda]_{\mathcal{X}}$. Soit χ un caractère de Λ et C un sous-ensemble de $\Lambda \setminus \{0\}$ engendrant Λ. On suppose que :*

$$lim_{n \to +\infty} \chi(\mu)^{-n} f(\lambda + n\mu) = g(\lambda), \ \ \lambda \in \Lambda, \mu \in C.$$

Alors :

$$g = f_\chi.$$

Démonstration. Il est facile de voir, en changeant λ en $\lambda + \mu$ que :

$$g(\lambda + \mu) = \chi(\mu) g(\lambda), \lambda \in \Lambda, \mu \in C.$$

Comme C engendre Λ, on en déduit que

$$g(\lambda + \mu) = \chi(\mu) g(\lambda), \lambda, \mu \in \Lambda\,, \tag{5.4}$$

et si on remplace f par $f - g$ dans l'énoncé, la limite dans l'énoncé est nulle. On est ainsi ramené au cas où g est nul. On va d'abord démontrer le lemme pour $\Lambda = \mathbb{Z}$. On a besoin pour cela d'un Lemme dont une démonstration nous a été fournie par Julien Cassaigne.

Lemme 13 *Soit S un ensemble fini de nombres réels, distincts 2 à 2 modulo 2π et $(a_s)_{s \in S}$ des nombres complexes. On note :*

$$h(n) := \sum_{s \in S} a_s e^{ins}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Si $lim_{n \to +\infty} h(n) = 0$, tous les a_s sont nuls.

Démonstration. Soit $t \in S$. On pose

$$S_N := \sum_{0 \le n \le N} h(n) e^{-int}.$$

Comme $lim_{n \to +\infty} h(n) = 0$, la moyenne de Césaro, S_N/N, tend vers 0 :

$$lim_{N \to +\infty} S_N/N = 0. \tag{5.5}$$

Par ailleurs

$$S_N = N a_t + R_N \tag{5.6}$$

où un calcul direct, utilisant la somme de progressions géométriques, montre que

$$|R_N| \le \sum_{s \in S, s \neq t} 2|a_s|/|1 - e^{i(s-t)}|\,.$$

D'où l'on déduit

$$lim_{N \to +\infty} S_N/N = a_t. \tag{5.7}$$

La comparaison de (5.5) et (5.7) montre que $a_t = 0$. D'où le lemme. □

Revenons à la démonstration du Lemme 12, d'abord pour $\Lambda = \mathbb{Z}$. On procède alors comme dans [CM], Appendice A.2.1, en remplaçant l'utilisation du Lemme A.2.2 par celle du lemme précédent. Ceci achève de traiter le cas $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Revenons au cas général, i.e. Λ quelconque. Par application du résultat pour $\mathbb{Z}$ aux fonctions $n \mapsto (R_\lambda f)(n\mu)$, on trouve, que pour tout $\mu \in C$, on a

$$g(\lambda) = \sum_{\{\chi' | \chi'(\mu) = \chi(\mu)\}} (R_\lambda f)_{\chi'}(0), \lambda \in \Lambda, \mu \in C.$$

Tenant compte des égalités :

$$(R_\lambda f)_{\chi'} = R_\lambda(f_{\chi'})$$

on trouve

$$g(\lambda) = \sum_{\{\chi' | \chi'(\mu) = \chi(\mu)\}} (f)_{\chi'}(\lambda), \lambda \in \Lambda, \mu \in C.$$

Comme $g = g_\chi$, d'après (5.4), on déduit l'égalité du lemme, en fixant μ puis en égalant les termes correspondants à χ dans l'égalité ci dessus. □

Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On écrit :

$$(\lambda - \chi_1(\lambda)) \dots (\lambda - \chi_n(\lambda)) = \lambda^n + a_{n-1}(\mathcal{X}, \lambda)\lambda^{n-1} + \dots + a_0(\mathcal{X}, \lambda) \tag{5.8}$$

comme opérateurs dans $\mathbb{C}[\Lambda]$, où les $a_p(\mathcal{X}, \lambda)$ sont des nombres complexes. Pour chaque $\delta \in \Delta$, on définit une action de $\mathbb{Z}\delta$ dans $\mathbb{C}^n$, notée $\xi_{\mathcal{X},\delta}$, par

$$(\xi_{\mathcal{X},\delta}(\delta))(e_i) = e_{i+1},\ i = 1, \dots, n-1 \tag{5.9}$$

$$(\xi_{\mathcal{X},\delta}(\delta))(e_n) = -\Sigma_{i=0,\ldots n-1} a_i(\mathcal{X},\delta)e_i. \tag{5.10}$$

L'espace de $\xi_{\mathcal{X},\delta}$ s'identifie à l'espace des fonctions de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique de $\xi_{\mathcal{X},\delta}(\delta)$ est égal à :

$$(-1)^n(X^n + a_{n-1}(\mathcal{X},\delta)X^{n-1} + \ldots + a_0(\mathcal{X},\delta))$$

et les valeurs propres de $\xi_{\mathcal{X},\delta}(\delta)$ sont donc égales, d'après (5.8), aux $\chi_i(\delta)$.

On note $\xi_{\mathcal{X}}$ la représentation de Λ obtenue par produit tensoriel des $\xi_{\mathcal{X},\delta}$, $\delta \in \Delta$, dont l'espace s'identifie canoniquement à l'espace $E_{n,l}$ des applications de $\{1,\ldots,n\}^l$ dans $\mathbb{C}$. Si $i \in \{1,\ldots,n\}^l$, on écrit $i = (i_1,\ldots i_l)$, et on pose $\delta^i = i_1\delta_1 + \ldots + i_l\delta_l \in \Lambda$.

Lemme 14 *L'application ev de $\mathbb{C}[\Lambda]_{\mathcal{X}}$ dans $E_{n,l}$, définie par*

$$ev(f)(i) = f(\delta^i), \ \ i \in \{1,\ldots,n\}^l$$

est un entrelacement injectif entre la représentation régulière droite de Λ avec $\xi_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. L'injectivité se déduit de (5.1) et (5.8). Pour voir que ev réalise un entrelacement, on étudie l'action de $\delta \in \Delta$ et on utilise (5.1), (5.8), (5.9) et (5.10). La propriété d'entrelacement en résulte immédiatement. □

On suppose donnée une famille holomorphe f d'éléments de $\mathbb{C}[\Lambda]$, paramétrée par une variété complexe $\mathcal{O}$, i.e. une application :

$$f : \mathcal{O} \times \Lambda \to \mathbb{C}, \text{ telle que, tout } \lambda \in \Lambda,\ \nu \mapsto f(\nu,\lambda) \text{ est holomorphe sur } \mathcal{O} \tag{5.11}$$

On notera aussi $f_\nu(\lambda) := f(\nu,\lambda)$. On suppose que l'on dispose de familles holomorphes $\chi_1,\ldots,\chi_n$, de caractères de Λ, dépendant de $\nu \in \mathcal{O}$. On note $\mathcal{X}(\nu)$ la suite $\chi_1(\nu),\ldots,\chi_n(\nu)$ et $\mathcal{X}$ la suite $\chi_1,\ldots,\chi_n$. On dit que f est une $\mathcal{X}$-famille si et seulement si $f_\nu \in \mathbb{C}[\Lambda]_{\mathcal{X}(\nu)}$, pour tout $\nu \in \mathcal{O}$. On note ν_0 un élément de $\mathcal{O}$, et χ^0 un élément de $\mathcal{X}(\nu_0)$.

Lemme 15 *Pour $\nu \in \mathcal{O}$, on note $\Xi(\nu,\nu_0) = \{\chi_i(\nu) | \chi_i(\nu_0) = \chi^0\}$. Alors :*

(i) L'application

$$\nu \mapsto F_\nu := \sum_{\chi \in \Xi(\nu,\nu_0)} (f_\nu)_\chi$$

est une famille holomorphe au voisinage de ν_0.

(ii) Si D est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur $\mathcal{O}$ de degré d, $\nu \mapsto Df_\nu$ est une $\mathcal{X}_{2^d}$-famille holomorphe, où, pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{X}_p$ est la suite :

$$\chi_1,\cdots\chi_1,\ldots,\chi_p,\cdots\chi_p$$

où chaque χ_i est répété p-fois.

(iii) On a l'égalité, au voisinage de ν_0 :

$$DF_\nu = \sum_{\chi \in \Xi(\nu,\nu_0)} (Df_\nu)_\chi.$$

Démonstration. (i) La famille de représentations, $(\xi_{\mathcal{X}(\nu)})_{\nu\in\mathcal{O}}$, de Λ, dans $E_{n,l}$ est holomorphe, d'après (5.9), (5.10) et l'holomorphie des χ_i : les coefficients $a_i(\mathcal{X}(\nu),\delta)$ sont holomorphes en ν. Par ailleurs, elle vérifie une identité de type (5.1), mais pour une famille de caractères plus grande $\overline{\mathcal{X}}(\nu)$ dont les éléments sont les caractères χ de Λ satisfaisant :

$$\chi(\delta)\in\{\chi_1(\nu)(\delta),\dots,\chi_n(\nu)(\delta)\},\quad \delta\in\Delta$$

répétés par sécurité n^l fois. En effet les valeurs propres de $\xi_{\mathcal{X}(\nu)}(\delta)$ appartiennent à $\{\chi_1(\nu)(\delta),\dots,\chi_n(\nu)(\delta)\}$ avec multiplicité inférieure ou égale à la dimension n^l de $E_{n,l}$. On considère l'image, $\overline{f}_\nu$, de f_ν dans $E_{n,l}$ par l'entrelacement du Lemme 14 pour $\mathcal{X}(\nu)$. C'est une fonction holomorphe de ν d'après la définition de cet entrelacement et (5.11). Alors l'analogue de (i) pour $\overline{f}_\nu$ est une conséquence immédiate de [D], Prop. B.1. L'assertion sur f_ν résulte immédiatement du fait que l'entrelacement envoie $(f_\nu)_\chi$ sur $(\overline{f}_\nu)_\chi$.

(ii) On se ramène par récurrence à démontrer le résultat pour D de degré 1. On écrit à cette fin que pour tout $\lambda\in\Lambda$, l'action de $(\lambda-(\chi_1(\nu))(\lambda))^i\dots(\lambda-(\chi_n(\nu))(\lambda))^i$ annule f_ν, pour $i=1,2$. Appliquant D à cette équation pour $i=2$ et développant grâce à la règle de dérivation des produits, on trouve l'égalité voulue en utilisant l'équation ci-dessus pour $i=1$.

(iii) Soit $\{i_1,\dots i_p\}$, resp. $\{j_1,\dots j_q\}$, l'ensemble des $i\in\{1,\dots,n\}$ tels que $\chi_i(\nu_0)=\chi^0$, resp. $\chi_i(\nu_0)\neq\chi^0$. Alors, avec les notations de (ii), F est une $\mathcal{X}'_n$ famille, où $\mathcal{X}':=(\chi_{i_1},\dots,\chi_{i_p})$. De même $g=f-F$ est une $\mathcal{X}''_n$-famille, où $\mathcal{X}'':=(\chi_{j_1},\dots,\chi_{j_q})$, grâce à (5. 3). Par application de (ii) à F, on voit que

$$DF_\nu=\sum_{\chi\in\Xi(\nu,\nu_0)}(DF_\nu)_\chi \tag{5.12}$$

et

$$Dg_\nu=\sum_{\chi\in\mathcal{X}(\nu)\setminus\Xi(\nu,\nu_0)}(Dg_\nu)_\chi.$$

Par addition, on en déduit :

$$Df_\nu=\sum_{\chi\in\Xi(\nu,\nu_0)}(DF_\nu)_\chi+\sum_{\chi\in\mathcal{X}(\nu)\setminus\Xi(\nu,\nu_0)}(Dg_\nu)_\chi. \tag{5.13}$$

Pour des raisons de continuité, il existe un voisinage ouvert de ν_0, $V(\nu_0)$, et un voisinage ouvert de χ^0, $V(\chi^0)$ tel que pour $i=1,\dots,n$, on ait ou bien :

$$\chi_i(\nu)\in V(\chi^0)\ \ et\ \ \chi(\nu)\in\Xi(\nu,\nu_0),\quad pour\ \ \nu\in V(\nu_0)$$

ou bien :

$$\chi_i(\nu)\notin V(\chi^0)\ \ et\ \ \chi_i(\nu)\in\mathcal{X}(\nu)\setminus\Xi(\nu,\nu_0),\quad pour\ \ \nu\in V(\nu_0).$$

On déduit alors de (5.13) que

$$(DF_\nu)_\chi=(Df_\nu)_\chi,\quad \chi\in\Xi(\nu,\nu_0).$$

Sommant sur les $\chi\in\Xi(\nu,\nu_0)$, et tenant compte de (5. 12), on déduit (iii). □

6 Appendice B, Familles de représentations

Définition 4 Soit $\mathcal{O}$ une variété C^∞, resp. analytique complexe. Une famille de représentations admissibles de G, indexée par $\mathcal{O}$, $(\pi_\nu, V_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ est dite C^∞, resp. holomorphe si et seulement si :

(i) L'espace V_ν est indépendant de ν. On le note V. La représentation π_ν restreinte à K est indépendante de ν

(ii) Si $v \in V$, $g \in G$, le stabilisateur dans K de $\pi_\nu(g)v$ contient un sous-groupe compact ouvert indépendant de ν : en effet si H est un sous-groupe compact ouvert contenu dans K fixant v, $\pi_\nu(g)v$ est fixé par $K \cap gHg^{-1}$. D'après (i) et l'admissibilité des π_ν, l'application $\nu \mapsto \pi_\nu(g)$ est à valeurs dans un espace de dimension finie. On demande que pour tout $v \in V$ et $g \in G$, cette application soit C^∞, resp. holomorphe.

Lemme 16 *Soit D un champ de vecteurs C^∞, resp. holomorphe sur $\mathcal{O}$ et une famille $(\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ comme ci-dessus. On définit une famille de représentations de G, $(D.\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ dans l'espace $V \times V$ par :*

$$(D.\pi_\nu)(g)(v_1, v_2) = (\pi_\nu(g)v_1 + D(\pi_\nu(g)v_2), \pi_\nu(g)v_2), g \in G, v_1, v_2 \in V. \quad (6.1)$$

Alors :

(i) La famille $(D.\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ est une famille C^∞, resp. holomorphe. Pour tout ν, $D.\pi_\nu$ admet π_ν comme sous-représentation dans le premier facteur, et le quotient par cette sous-représentation est également isomorphe à π_ν.

(ii) La famille $(\tilde{\pi}_\nu)$ est C^∞, resp. holomorphe, et est réalisée dans l'espace, $\tilde{V}$, des formes linéaires sur V fixées par un sous-groupe compact ouvert de K. Les familles $(D.\tilde{\pi}_\nu)$, $(\widetilde{D.\pi_\nu})$ sont réalisées dans le même espace, $\tilde{V} \times \tilde{V}$, et sont entrelacées par l'inversion des facteurs, T.

(iii) On appelle dérivée par rapport à D de coefficients de π_ν toute fonction de la forme $g \mapsto DE_\nu(g)$, où $E_\nu(g) =< \pi_\nu(g)v, v' >$, $v \in V$, $v' \in \tilde{V}$. L'espace des coefficients de $D.\pi_\nu$ est égal à la somme de l'espace des coefficients de π_ν, avec l'espace des dérivées par rapport à D de coefficients de π_ν. En particulier:

$$D < \pi_\nu(g)v, v' > = < ((D.\pi_\nu)(g))(0, v), (v', 0) > \ . \quad (6.2)$$

Démonstration. (i) est immédiat.

(ii) Soit $v' \in \tilde{V}$ et $g \in G$. L'application $\nu \mapsto (\tilde{\pi}_\nu)(g)v'$ est à valeurs dans un espace de dimension finie et il suffit de voir que la composée de cette application avec toute forme linéaire sur cet espace de dimension finie est C^∞, resp. holomorphe. Cela résulte du fait que pour tout $v \in V$, $\nu \mapsto < v', \pi_\nu(g^{-1})v >$ est C^∞, resp. holomorphe. Pour montrer l'identité des 2 familles, il suffit de montrer l'égalité, pour $g \in G$ de

$$A = < T((D.\tilde{\pi}_\nu(g))(v'_1, v'_2)), (v_1, v_2) >$$

et

$$B = < ((\widetilde{D.\pi_\nu})(g))(T(v'_1, v'_2)), (v_1, v_2) > \ .$$

En utilisant les définitions et (6.1), on trouve que l'égalité de A et B équivaut à l'égalité de $< v_2', D\pi_\nu(g^{-1})v_2 >$ avec $< D\tilde{\pi}_\nu(g)v_2', v_2 >$. Mais cette égalité est vraie car les deux termes sont égaux à : $D < v_2', \pi_\nu(g^{-1})v_2 >$.

(iii) résulte de la formule :

$$\begin{aligned}&< (D.\pi_\nu(g))(v_1, v_2), (v_1', v_2') > \\ &=< \pi_\nu(g)v_1, v_1' > + < \pi_\nu(g)v_2, v_2' > +D < \pi_\nu(g)v_2, v_1' >\end{aligned} \tag{6.3}$$

□

Lemme 17 *Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique semi-standard, $(\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$ une famille C^∞, resp. holomorphe, relativement à $K \cap M$, de représentations admissibles de M, (π, V) sa restriction à $K \cap M$.*

(i) La restriction des fonctions à K induit un isomorphisme de l'espace de $i_{G,P}\pi_\nu$ sur un espace indépendant de ν, qu'on note $i_{K,K\cap P}V$, sur lequel K agit par une représentation indépendante de ν, $i_{K,K\cap P}\pi$.

(ii) La famille de représentations $(i_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}} = (i_{G,P}\pi_\nu)_{\nu\in\mathcal{O}}$, dans sa réalisation dans $i_{K,K\cap P}V$, dite réalisation compacte, est une famille C^∞, resp. holomorphe, de représentations admissibles de G.

(iii) Pour D comme au lemme précédent, la famille $(i_{G,P}(D.\pi_\nu))$ est naturellement réalisée dans l'espace $i_{K,K\cap P}V \times i_{K,K\cap P}V$, ainsi que la famille $D.(i_{G,P}\pi_\nu)$, et ces deux familles sont identiques.

Démonstration. (i) est clair.

Montrons (ii). Soit $g \in G$. Soit $f \in i_{K,K\cap P}V$, qui est fixé par un sous-groupe compact ouvert, H, contenu dans K. Alors, pour tout ν, $i_\nu(g)f$ est fixé par $K\cap gHg^{-1}$, et est donc contenu dans un sous-espace de dimension finie de $i_{K,K\cap P}V$. Si k décrit K et v' décrit le dual lisse de V, $\tilde{V}$, les évaluations en k suivies de la composition avec v' engendrent le dual de cet espace de dimension finie. Pour voir que $\nu \mapsto i_\nu(g)f$ est C^∞, resp. holomorphe, il suffit donc de voir que les applications $\nu \mapsto < (i_\nu(g)f)(k), v' >$ vérifient la même propriété. Ecrivant $g^{-1}k = k'mn$, avec $k' \in K$, $m \in M$, $n \in N$, on a :

$$< (i_\nu(g))f(k), v' >=< \pi_\nu(m^{-1})f(k'), v' > \ .$$

On en déduit immédiatement (ii).

Prouvons (iii). Il est clair que les deux familles sont réalisées dans le même espace $i_{K,K\cap P}V \times i_{K,K\cap P}V$. Montrons qu'elles coincident. Soit $f_1, f_2 \in i_{K,K\cap P}V$. On note (F_1, F_2) la paire de fonctions sur G à valeurs dans $V \times V$ telle que :

$$\begin{aligned}&(F_1(kmn), F_2(kmn)) = D.\pi_\nu(m^{-1})(f_1(k), f_2(k)) \\ &k \in K, m \in M, n \in N,\end{aligned} \tag{6.4}$$

dont l'existence est assurée par les propriétés de covariance des f_i. Soit $g \in G, k \in K$. On a :

$$((i_{G,P}D.\pi_\nu)(g)(f_1, f_2))(k, k) = (F_1(g^{-1}k), F_2(g^{-1}k)).$$

Ecrivant $g^{-1}k = k'mn$ comme ci-dessus, on a, en tenant compte de (6.4) et de la définition de $D.\pi_\nu$:

$$\begin{aligned} &((i_{G,P} D.\pi_\nu)(g)(f_1, f_2))(k,k) \\ &= (\pi_\nu(m^{-1}) f_1(k') + D\pi_\nu(m^{-1}) f_2(k'), \pi_\nu(m^{-1}) f_2(k')). \end{aligned} \tag{6.5}$$

On note maintenant F'_i, $i = 1, 2$, l'application de G dans V définie par

$$F'_i(kmn) = \pi_\nu(m^{-1})(f_i(k)), \quad k \in K, m \in M, n \in N \tag{6.6}$$

dont l'existence est assurée par les propriétés de covariance de f_i. Appliquant les définitions, on a

$$(D.i_\nu)(g)(f_1, f_2) = (i_\nu(g) f_1 + Di_\nu(g) f_2, i_\nu(g) f_2).$$

Utilisant l'égalité $(i_\nu(g) f_1)(k) = F_1(g^{-1}k)$, écrivant $g^{-1}k = k'mn$, tenant compte de (6.6) et reportant dans l'équation précédente, on conclut à l'identité:

$$((i_{G,P} D.\pi_\nu)(g)(f_1, f_2))(k,k) = ((D.i_\nu)(g)(f_1, f_2))(k,k),$$

ce qui prouve (iii). □

Si (π, V) est une représentation admissible de G, on note E^G_π, ou E^G, l'application coefficients, i.e. l'application de $\tilde{V} \otimes V$ dans $C_{lisse}(G)$ définie par :

$$(E^G_\pi(v' \otimes v))(g) = < \pi(g)v, v' >$$

qui entrelace l'action de $G \times G$, $\tilde{\pi} \otimes \pi$, avec la représentation de $G \times G$ sur $C_{lisse}(G)$ donnée par la représentation régulière gauche (resp. droite) sur le premier (resp. second) facteur. On note $E^G(\pi)$ l'image de E^G_π.

On conserve les notations du lemme précédent. On note $\overline{P}$ le sous-groupe parabolique opposé à P.

Pour $\nu \in \mathcal{O}$, l'espace des représentations $i_{G\times G, P\times\overline{P}} E^M(\pi_\nu)$, $i_{G\times G, P\times\overline{P}} E^M(D.\pi_\nu)$ est contenu dans l'espace $I := i_{G\times G, P\times\overline{P}} C_{lisse}(M)$.

Soit $f \in i_{K, K\cap\overline{P}}\pi$, $\tilde{f} \in i_{K,K\cap P}$. On note f_ν (resp. $\tilde{f}_\nu$) l'élément de l'espace de $i_{G,\overline{P}}\pi_\nu$ (resp. $i_{G,P}\tilde{\pi}_\nu$) dont f (resp. $\tilde{f}$) est la restriction à K. On définit une application de $G \times G$ dans $C_{lisse}(M)$, $E^M_\nu(\tilde{f} \otimes f)$ par

$$(E^M_\nu(\tilde{f} \otimes f)(g_1, g_2))(m) = E^M_{\pi_\nu}(\tilde{f}_\nu(g_1) \otimes (f_\nu(g_2))(m), \quad g_1, g_2 \in G, m \in M.$$

Il est clair que c'est un élément de I et que l'expresssion ci-dessus est C^∞, resp. holomorphe en ν. On note $D.E^M i_{G\times G, P\times\overline{P}}(\tilde{\pi}_\nu \otimes \pi_\nu)$, l'espace engendré par les combinaisons linéaires des $D(E^M_\nu(\tilde{f} \otimes f))$, lorsque $f, \tilde{f}$ varient, ν étant fixé. C'est un sous-espace de I.

Lemme 18 *Pour ν fixé, l'espace $i_{G\times G,P\times\overline{P}}E^M(D.\pi_\nu)$ est contenu dans la somme de l'espace $i_{G\times G,P\times\overline{P}}E^M(\pi_\nu)$ et de l'espace $D.E^M i_{G\times G,P\times\overline{P}}(\tilde{\pi}_\nu\otimes\pi_\nu)$.*

Il est clair que l'espace $i_{G\times G,P\times\overline{P}}E^M(D.\pi_\nu)$ est l'image de l'espace de

$$i_{G\times G,P\times\overline{P}}(D.\pi_\nu)\tilde{}\otimes D.\pi_\nu$$

par l'induite de l'entrelacement $E^M_{D.\pi_\nu}$, noté encore E^M. Il suffit alors d'étudier l'image d'un élément de $i_{G\times G,P\times\overline{P}}(D.\pi_\nu)\tilde{}\otimes D.\pi_\nu$, identifié à $D.i_{G,P}\tilde{\pi}_\nu\otimes D.i_{G,\overline{P}}\pi_\nu$ grâce à l'isomorphisme du Lemme 16 (ii), de $(D.\pi_\nu)\tilde{}$ avec $D.\tilde{\pi}_\nu$ et de $D.i_{G,P}\pi_\nu$ avec $i_{G,P}(D.\pi_\nu)$ (cf. Lemme précédent (iii)). Soit $F=(f_1,f_2)$ un élément de l'espace $i_{K,K\cap P}V\times i_{K,K\cap P}V$ de $D.i_{G,P}\pi_\nu$ et $F'=(f_1',f_2')$ un élément de l'espace $i_{K,K\cap P}\tilde{V}\times i_{K,K\cap P}\tilde{V}$ de $D.i_{G,P}\tilde{\pi}_\nu$. Le calcul, tenant compte des isomorphismes précédents, de $E^M_\nu(F'\otimes F)$, conduit à :

$$\begin{aligned}&(E^M_\nu(F\otimes F')(k,k'))(m)\\ &=(E^M_\nu(f_2'\otimes f_1)(k,k'))(m)+(E^M_\nu(f_1'\otimes f_2)(k,k'))(m)+D(E^M_\nu(f_2'\otimes f_2)(k,k'))(m),\\ &k,k'\in K, m\in M.\end{aligned}$$

Les quatre fonctions de l'égalité précédentes étant des éléments de I, l'égalité précédente implique :

$$E^M_\nu(F\otimes F')=E^M_\nu(f_2'\otimes f_1)+E^M_\nu(f_1'\otimes f_2)+D(E^M_\nu(f_2'\otimes f_2)$$

Le lemme en résulte. □

Références

[A] J. Arthur, Intertwining operators and residues I. Weighted characters, *J. Funct. Anal.* **84** (1989), 19–84.

[B] J. Bernstein, Representations of p-adic groups. Lectures given at Harvard University, Fall 1992, Notes by K. E. Rummelhart.

[BD] J. Bernstein, P. Deligne, Le centre de Bernstein, rédigé par P. Deligne. Travaux en cours. Representations of reductive groups over a local field.1–32. Hermann, Paris, 1984.

[BZ] J. Bernstein, A. Zelivinsky, Induced representations of reductive p-adic groups. I, *Ann. E.N.S.* 10 (1977), 441–472.

[Bou] N. Bourbaki, Eléments de Mathématiques, Algèbre Commutative, Chapitre 5 et 6, Actualités scientifiques et industrielles 1308, Hermann, Paris.

[Bu] C.J. Bushnell, Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke agebras and applications. *J. London Math. Soc.* 63 (2001), 364–386.

[BuK] C.J. Bushnell, P.C. Kutzko, Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types. *Proc. London Math. Soc.* 77 (1998), 582–634.

[Car] J. Carmona, Sur la classification des modules admissibles irréductibles, Non commutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1982), 11–34, Lecture Notes in Math., 1020, Springer, Berlin 1983.

[C] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of reductive p-adic groups, preprint, 1993.

[CM] W. Casselman, D. Milicic, Asymptotic behaviour of coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* 49 (1982), 869–930.

[D] P. Delorme, avec un appendice de M. Tinfou, Espace de Schwartz pour la transformation de Fourier hypergéométrique, *Jour. Funct. Anal.* 168, (1999), 239–312.

[F] J. Franke, Harmonic analysis in weighted L^2-spaces, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 31 (1988), 181–279.

[H-C] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, *Amer. J. of Math.*, 80 (1958), 241–310.

[HS] H. Hecht, W. Schmid, Characters, asymptotic and $\mathfrak{n}$-homology of Harish-Chandra modules, *Acta Math.* 151 (1983), 50–151.

[L] R.P. Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, in *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups* Mathematical Surveys and Monographs 31, edited by P. Sally and D. Vogan Jr, 1988, A.M.S., Providence, 101–170.

[S] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris 1966.

[Si] A.S. Silberger, Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups. Mathematical Notes 23, Princeton University Press, Princeton, 1979.

[Sou] S. Souaifi, Fonctions K et $D(G/H)$-finies sur un espace symétrique réductif, *J. Funct. Anal.* 195 (2002), 371–443.

[T] J. Tits, Reductive groups over local field, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 33-Part I (ed. A. Borel and W. Casselman), A.M.S., Providence, RI 1979, 29–69.

[W1] J.L. Waldspurger, Cohomologie des espaces de formes automorphes, Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque 241 (1997), Exp. 809, 139–156.

[W2] J.L. Waldspurger, La formule de Plancherel pour les groupes réductifs p-adiques, d'après Harish-Chandra, prépublication.

[War] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Grundlehren der math. Wissen. in Einz., 188, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

Institut de Mathématiques de Luminy
Case 907
163 Avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9, France
email: delorme@iml.univ-mrs.fr