

Relations d'orthogonalité de Schur "généralisées" pour les espaces symétriques réductifs

Karim Ankabout

*Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016, 163, avenue de Luminy, case 907,
13288 Marseille cedex 9, France*

Received October 11, 1999; revised March 9, 2000; accepted March 30, 2000;
published online July 5, 2001

Nous introduisons une semi-norme sur un espace de fonctions C^∞ sur un espace symétrique réductif G/H . Nous montrons que les fonctions C^∞ , K -finies, propres sous l'action de l'algèbre des opérateurs différentiels G -invariants, et pour lesquelles cette semi-norme est finie, de même que pour ses dérivées par les éléments de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G , sont tempérées. Réciproquement, on explicite cette semi-norme pour les fonctions tempérées K -finies qui sont propres pour un caractère régulier de l'algèbre des opérateurs différentiels G -invariants. L'application de ces résultats aux intégrales d'Eisenstein permet d'établir des relations d'orthogonalité de Schur généralisées. Notre travail généralise et précise des résultats de H. Midorikawa (1988, *Adv. Stud. Pure Math.* **14**, 257–287) pour les groupes. © 2001 Academic Press

Mots-clé: espace symétrique réductif; représentation des groupes et des algèbres de Lie; développements asymptotiques et convergents; terme constant d'une fonction tempérée; intégrales d'Eisenstein.

We introduce a seminorm on a space of C^∞ functions on a reductive symmetric space G/H . We show that the C^∞ K -finite eigenfunctions of the algebra of all G -invariant differential operators on G/H for which this semi-norm is finite, as well as for their derivatives from the left, are tempered. Reciprocally, we make explicit this seminorm for the K -finite tempered eigenfunctions with a regular character. Applying those result to Eisenstein integrals, we obtain general Schur orthogonality relations. Our work generalizes and specifies the results of H. Midorikawa (1988, *Adv. Stud. Pure Math.* **14**, 257–287) in the group case. © 2001 Academic Press

0. INTRODUCTION

Les coefficients de la série discrète d'un groupe de Lie unimodulaire G appartiennent à $L^2(G)$ et on peut calculer leur produit scalaire L^2 grâce aux relations d'orthogonalité de Schur. Plus précisément, si $(\pi, \mathcal{H})$ est une

représentation de la série discrète de G , alors pour tous $v, w, v', w' \in \mathcal{H}$, on a:

$$\int_G (\pi(g)v, w) \overline{(\pi(g)v', w')} dg = d_\pi^{-1}(v, v') \overline{(w, w')} \quad (0.1)$$

où d_π désigne le degré formel de π .

Lorsque G est réductif, H. Midorikawa a montré qu'on peut définir un produit scalaire "intrinsèque" sur l'espace engendré par les coefficients de toute représentation irréductible tempérée à caractère infinitésimal régulier de sorte que les relations d'orthogonalité de Schur aient encore lieu. Une telle représentation $(\pi, \mathcal{H})$ est induite à partir d'un sous-groupe parabolique cuspidal de G , dont on note r le rang déployé. On fixe un sous-groupe compact maximal K de G et on note $d(g)$ la distance de gK à l'origine dans l'espace riemannien symétrique G/K . Alors (Relations d'orthogonalité de Midorikawa):

il existe une constante $d_\pi > 0$ telle que, pour tous vecteurs K -finies v, v', w, w' de $\mathcal{H}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^r \int_G (\pi(g)v, w) \overline{(\pi(g)v', w')} e^{-\varepsilon d(g)} dg = d_\pi^{-1}(v, v') \overline{(w, w')} \quad (0.2)$$

Il est bien connu que les relation d'orthogonalité de Schur (cf. (0.1)) ont un analogue pour les séries discrètes des espaces symétriques où l'on remplace les coefficients de représentations par des coefficients généralisés. Maintenant, suite aux développements récents de l'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs, on peut espérer un analogue des relations de Midorikawa (cf. (0.2)) pour ces espaces. L'objectif de ce travail est de répondre à cette question, en précisant de plus la constante d_π . Celle-ci n'était pas connue dans les relations de Midorikawa.

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, H un sous-groupe ouvert du groupe de points fixes d'une involution σ de G et K le groupe des points fixes d'une involution de Cartan θ de G commutant avec σ . Soit $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{s}$) le sous-espace propre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , correspondant à la valeur propre -1 de σ (resp. θ). Pour toute la suite de ce travail, $\mathfrak{a}_\emptyset$ désignera un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$.

Pour simplifier la présentation des résultats, on supposera en outre que G est semi-simple de centre fini. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on pose $\|X\| := (-B(X, \theta(X)))^{1/2}$. Pour $X \in \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$ et $g \in K \exp(X)H$, on pose $\varpi(gH) := \|X\|$.

Soit dx une mesure G -invariante à gauche sur G/H . Pour $r > 0$ et $f \in C^\infty(G/H)$ on note:

$$\|f\|_{2,r} := \left(\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^r \int_{G/H} |f(x)|^2 e^{-\varepsilon \varpi(x)} dx \right)^{1/2}$$

où $\overline{\lim}$ désigne la limite supérieure.

Soit χ un caractère de l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ des opérateurs différentiels sur G/H invariants par l'action gauche de G . On note $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ l'ensemble des fonctions, f , C^∞ sur G/H , vérifiant:

$$(i) \quad Df = \chi(D) f, \quad D \in \mathbb{D}(G/H).$$

(ii) Pour tout U élément de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\|L(U)f\|_{2,r}$ est fini, où L est la différentielle de la représentation régulière gauche de G sur $C^\infty(G/H)$.

THÉORÈME (cf. Théorème 1). (i) *L'ensemble $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ est une espace vectoriel. Muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{2,r}$ et de l'action régulière gauche, c'est un G -module topologique dont le sous-espace des vecteurs K -finis, $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)}$, est dense.*

(ii) *De plus, ce dernier est formé de fonctions tempérées au sens de [D1, Définition 2].*

Le point (i) (resp. (ii)) est une généralisation aux espaces symétriques du résultat de H. Midorikawa [Mi2, Lemme 4.1 et 4.2] (resp. [Mi2, Lemme 4.5]) dans le cas des groupes.

Il est à noter que l'introduction de la limite supérieure dans notre définition permet d'assurer que $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ est un espace vectoriel.

Nous faisons l'Hypothèse suivante sur χ .

HYPOTHÈSE 1. (i) *Il existe une fonction non nulle, tempérée, K -finie qui se transforme sous $\mathbb{D}(G/H)$ par χ .*

(ii) *Le caractère χ est régulier.*

Pour simplifier les notations, on suppose qu'il existe une seule $(H, P_\varnothing)$ -double classe ouverte de G , où $P_\varnothing$ est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable minimal de G . On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G contenant $P_\varnothing$. Si $Q \in \mathcal{P}$, on note $Q = M_Q A_Q N_Q$ la σ -décomposition de Langlands de Q et on pose $L_Q := M_Q A_Q$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}^n$ l'ensemble des éléments Q de $\mathcal{P}$ vérifiant $\dim \mathfrak{a}_Q = n$. Soit f un élément de l'espace $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \chi)_{(K)}$, formé des fonctions tempérées K -finies sur lesquelles $\mathbb{D}(G/H)$ agit par χ . Notons f_Q (au lieu de $f_{\bar{Q}}$ dans [C, Théorème 1]) le terme constant de f le long du sous-groupe parabolique de G , $\bar{Q}$, opposé à Q . Alors, la régularité de χ implique que f_Q , s'écrit d'une manière unique (cf. [C, Théorème 2]):

$$f_Q = \sum_s f_{Q,s} \quad (0.3)$$

où la somme est finie et où pour chaque s , $f_{Q,s}$ est une fonction C^∞ sur $L_Q/L_Q \cap H$ qui se transforme sous A_Q par un caractère unitaire χ_s , ces derniers étant deux à deux distincts.

THÉOREME (cf. Théorème 3). (i) *En supposant l'Hypothèse 1 satisfaite, il existe un unique entier positif $i(\chi)$, tel que pour toute fonction f non nulle de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H, \chi)_{(K)}$ et tout nombre réel r , on a $\|f\|_{2,r}$ est fini si et seulement si $r \geq i(\chi)$.*

En particulier $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)} = \mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H, \chi)_{(K)}$ si $r \geq i(\chi)$. De plus $\| \cdot \|_{2,r}$ est nulle sur cet espace si $r > i(\chi)$.

(ii) *Pour chaque $Q \in \mathcal{P}^{i(\chi)}$, et pour chaque s de la somme ci-dessus (cf. 0.3), la restriction de $f_{Q,s}$ à $M_Q/M_Q \cap H$ est de carré intégrable, de plus, il existe $C(Q) > 0$ telle que*

$$\|f\|_{2, i(\chi)}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{P}^{i(\chi)}} C(Q) \sum_s \|f_{Q,s}\|_2^2$$

où $\|f_{Q,s}\|_2$ est la norme L^2 de la restriction à $M_Q/M_Q \cap H$ de $f_{Q,s}$.

Remarque. Dans le cas où $G = G_1 \times G_1$ et σ est l'échange des facteurs, H. Midorikawa [Mi2] avait montré que $\|f\|_{2, i(\chi)}$ est fini sans en donner une formule explicite.

Pour démontrer le Théorème 3 on utilise, grâce à notre choix de mesure (cf. §1), la formule intégrale qui permet de transformer l'intégration sur G/H en une intégration sur la chambre de Weyl négative $\alpha_{P_\emptyset}^-$ correspondante au $P_\emptyset$. Puis, on écrit $\alpha_{P_\emptyset}^-$ comme réunion finie et disjointe (à un ensemble de mesure nulle près) de sous-ensembles ouverts donnés par des inégalités affines. A chaque élément $\mathcal{O}$ de cette partition est associé un élément Q de $\mathcal{P}^{i(\chi)}$. Pour $X \in \alpha_\emptyset$, on note $\rho_Q(X)$ la moitié de la trace de $ad(X)$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_Q$ de N_Q . Alors $e^{\rho_Q} f_Q \circ \exp$ fournit une bonne approximation de $f \circ \exp$ sur $\mathcal{O}$. On obtient ensuite une estimation de la différence entre f et ses termes constants (cf. Théorème 2), plus fine que celle donnée par J. Carmona (cf. [C, Proposition 7]), grâce à l'hypothèse de régularité de χ . Ceci permet de remplacer dans le calcul de contribution de $\mathcal{O}$ à $\|f\|_{2, i(\chi)}^2$, f par $e^{\rho_Q} f_Q$, grâce au Théorème de la convergence dominée. Le calcul de cette contribution est effectué grâce au Lemme de Riemann–Lebesgue, à l'écriture (0.3) de f_Q , et à l'utilisation répétée du Théorème de la convergence dominée. La sommation sur les $\mathcal{O}$ conduit alors au résultat voulu.

Soit $P \in \mathcal{P}$ et $P = MAN$ sa σ -décomposition de Langlands. On suppose que $M/M \cap H$ admet une série discrète et on choisit un sous-espace abélien maximal, α_M^d , de $i(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ contenu dans $i(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cap \mathfrak{f})$. Soient (δ, V_δ) un élément du dual unitaire de M , et $v \in (\alpha)_\mathbb{C}^*$. On dispose de la série principale généralisée C^∞ , $(\pi_{\delta,v}^P, I_{\delta,v}^P)$ (cf. [D1, §3]), et de sa réalisation compacte

$(\bar{\pi}_{\delta, v}^P, I_{\delta}^P)$. Soit η un vecteur distribution $H \cap M$ -invariant “de carré intégrable” de (δ, V_{δ}) (cf. [CD2, équation (1.3)]), qu’on suppose $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ -propre pour une valeur propre λ de $(\mathfrak{a}_M^d)^*$.

On dispose d’une fonction continue sur G à valeurs dans $V_{\delta}^{-\infty}$, $j(P, \delta, v, \eta)$, H -invariante à gauche valant η en l’identité de G et se transformant par $a^v - \rho_P \delta'(m^{-1})$ sous la translation à droite par man , $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P$. Ces propriétés sont caractéristiques de cette fonction qui détermine un vecteur distribution H -invariant de $\pi_{\delta, v}^P$ (cf. [CD1, (2.4.6)]). On notera $\bar{j}(P, \delta, v, \eta)$ la forme linéaire continue correspondante sur I_{δ}^P . La fonction $v \mapsto \bar{j}(P, \delta, v, \eta)$ admet un prolongement méromorphe à $(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [D1, Lemme 3]).

THÉORÈME (cf. Théorème 6). On fixe $v \in i(\mathfrak{a})^*$ tel que $\bar{j}(P, \delta, v, \eta)$ soit défini et tel que $\lambda - v$ soit régulier par rapport aux racine de $\mathfrak{a}^d := \mathfrak{a}_M^d + \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Alors, pour tout vecteur K -fini φ de I_{δ}^P on a :

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\dim \mathfrak{a}} \int_{G/H} |\langle (\bar{\pi}_{\delta, v}^P)'(g) \bar{j}(P, \delta, v, \eta), \varphi \rangle|^2 e^{-\varepsilon \varpi(g)} dg & \\ = C \mu_P(\delta, v)^{-1} \|\eta\|^2 \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

où $C := \int_{\mathfrak{a}} e^{-\|X\|} dX$, $\mu_P(\delta, v)$ est le facteur de Plancherel (cf. [CD2, après l’équation (3.8)]), et où $\|\eta\|$ est définie dans (cf. [CD2, équation (1.5)]).

On dispose du lien entre les intégrales d’Eisenstein et les coefficients généralisés du théorème précédent (cf. [CD2, §3.1]). Alors l’expression explicite des termes constants des intégrales d’Eisenstein à l’aide des fonctions C et le Théorème 3, permettent de déduire le résultat précédent.

Comme on l’a déjà dit, dans le cas de $G_1 \times G_1$, ce résultat permet de préciser la constante d_{π} dans les relation d’orthogonalité de Midorikawa (cf. (0.2)).

1. NOTATIONS

Si E est un espace vectoriel, on notera E^* son dual. Si E est réel on note $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié, $S(E)$ l’algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$ que l’on identifiera aux fonctions polynomiales sur E^* lorsque E est de dimension finie.

Si S est un groupe de Lie, S^0 désignera la composante connexe de l’élément neutre e de S , $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{s})$ l’algèbre enveloppante de $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$. Si S est réel, on note 0S l’intersection des noyaux des homomorphismes continus de S dans $\mathbb{R}^{+*}$. Si (π, E) est une représentation du groupe de Lie S (resp. de l’algèbre de Lie $\mathfrak{s}$), on note E^S (resp. $E^{\mathfrak{s}}$) l’espace

des éléments de E invariants sous S (resp. $\mathfrak{s}$). Si σ est une involution de S , on utilise également la même notation pour désigner l'automorphisme de $\mathfrak{s}$ obtenu par différentiation et son prolongement $\mathbb{C}$ -linéaire à $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$.

Si M est une variété de classe C^∞ muni d'une structure de S -espace à gauche (resp. droite) de classe C^∞ et E un espace de Fréchet, on note $(x, f) \mapsto L(x)f$ (resp. $(x, f) \mapsto R(x)f$), $x \in S, f \in C^\infty(M, E)$, l'action induite sur $C^\infty(M, E)$. On note encore L (resp. R) l'action infinitésimale correspondante de $U(\mathfrak{s})$.

Pour toute sous-algèbre abélienne $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$) formée d'éléments semi-simples et tout sous-espace $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$) stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{j}$, on note $\Sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{j}) \subset \mathfrak{j}^*$ (resp. $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$) l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{b}$ (resp. $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$). Pour $\alpha \in \mathfrak{j}^*$ (resp. $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$), on note $\mathfrak{b}^\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant dans $\mathfrak{b}$. Si $\Sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{j})$ est un système de racines, on note $W(\mathfrak{b}, \mathfrak{j})$ le groupe de Weyl correspondant.

Si S est en outre compact, on notera $\hat{S}$ son dual unitaire. Si (π, E) est une représentation continue de S dans un espace vectoriel localement convexe, on note $E_{(S)}$ l'espace des vecteurs S -finis, et pour tout $\delta \in \hat{S}$, on notera E^δ la composante isotypique de type δ de E .

Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe d'Harish-Chandra (cf. [Va, part II, §1.1] ou aussi [H-C2, §3]), σ une involution de G , θ une involution de Cartan qui commute avec σ (voir [B2, Proposition 1.1], pour l'existence de θ), K l'ensemble des point fixes de θ , qui est un sous-groupe compact maximal de G , et H un sous-groupe ouvert de G^σ . On note $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$) l'algèbre de Lie de G (resp. H, K), et $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ correspondant à la valeur propre -1 de θ (resp. σ). L'espace homogène G/H est dit espace symétrique réductif. Un sous espace de Cartan pour G/H est un sous espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ constitué d'éléments semi-simples. Tous les sous-espaces de Cartan de G/H ont la même dimension que l'on appelle le rang de l'espace symétrique G/H .

On se fixe une forme bilinéaire symétrique B sur $\mathfrak{g}$, $Ad(G)$ -invariante, telle que la forme quadratique sur $\mathfrak{g}$, $X \mapsto \|X\|^2 := -B(X, \theta(X))$, soit définie positive. On suppose en outre que B est invariante par σ et θ , coïncide avec la forme de Killing sur $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et que le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$, est orthogonal à $\mathfrak{g}_1$.

On dispose (cf. [B1, §2]) d'une application $\varpi_G: G \mapsto [0, +\infty[$ telle que:

$$\varpi_G(k \exp X) = \|X\|, \quad k \in K, \quad X \in \mathfrak{s}. \quad (1.1)$$

Dans toute la suite de ce travail, $\mathfrak{a}_\emptyset$ désignera un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{s}$. Soit $\mathfrak{g}_{\sigma\theta} := (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q})$, qui n'est autre que l'ensemble des points fixes de l'involution $\sigma\theta$ de $\mathfrak{g}$. On fixe une fois pour toute un ensemble $\Sigma_{\sigma\theta}^+$, de racines positives du système de racines $\Sigma_{\sigma\theta} := \Sigma(\mathfrak{g}_{\sigma\theta}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ (cf.

[R, §1.2]). On note $\alpha_{\varnothing}^-$ la chambre de Weyl négative correspondante. On a la décomposition [B2, Corollaire 1.4]:

$$G = Kcl(A_{\varnothing}^-)H \quad (1.2)$$

où $cl(A_{\varnothing}^-)$ est l'adhérence de $A_{\varnothing}^- := \exp \alpha_{\varnothing}^-$. On introduit, comme dans [B1], §2, l'application, ϖ , de G/H dans $[0, +\infty[$, définie par:

$$\varpi(kah) = \|\log a\|, \quad k \in K, \quad a \in A_{\varnothing}, \quad h \in H \quad (1.3)$$

qui est K -invariante à gauche et H -invariante à droite. On note $L_{\varnothing}$ le centralisateur de $\alpha_{\varnothing}$ dans G , $L_{\varnothing} = M_{\varnothing}A_{\varnothing}$ sa σ -décomposition de Langlands [B3, §2], et $\mathfrak{m}_{\varnothing}$ l'orthogonal de $\alpha_{\varnothing}$ dans $\mathfrak{l}_{\varnothing} := \text{Lie}(L_{\varnothing})$ pour la forme bilinéaire B . On notera $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}^{min}$) l'ensemble (fini) des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G (resp. $\sigma\theta$ -stables minimaux de G), contenant $A_{\varnothing}$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on notera $L_P := P \cap \theta(P)$ sa composante de Levi θ -stable, N_P son radical unipotent et $P = M_P A_P N_P$ sa σ -décomposition de Langlands. Notons que $M_{\varnothing}$ est contenu dans M_P et A_P est contenu dans $A_{\varnothing}$. En particulier, on note $G = M_G A_G$ la σ -décomposition de Langlands de G . Ici, $M_G := {}^0G \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h})$, et A_G est le sous-groupe de la composante déployée de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a) = a^{-1}$. On l'appelle composante σ -déployée de G . Notez que H est contenu dans M_G . De plus, on a:

$$(M_G/H) \times \alpha_G \text{ est difféomorphe à } G/H \text{ par l'application} \quad (1.4)$$

$$(x, X) \mapsto (\exp X)x.$$

Si $P \in \mathcal{P}$, les sous-groupes L_P et M_P sont dans la classe d'Harish-Chandra et sont invariants par σ et θ . De plus $(L_P, \sigma|_{L_P}, \theta|_{L_P}, H \cap L_P)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H) , et de même en remplaçant L_P par M_P . On note Σ_P l'ensemble des poids de $\alpha_P := \text{Lie}(A_P)$ dans $\mathfrak{n}_P := \text{Lie}(N_P)$. On définit l'ensemble A_P des racines simples de Σ_P . On pose $\alpha_P^- := \{X \in \alpha_P \mid \alpha(X) < 0, \alpha \in A_P\}$, et $A_P^- := \exp \alpha_P^-$. Si $P_{\varnothing} \in \mathcal{P}^{min}$ est tel que $\Sigma_{P_{\varnothing}}$ contient $\Sigma_{\sigma\theta}^+$, on dit que $P_{\varnothing}$ est standard. On note $\mathcal{P}_{st}^{min}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}^{min}$ formé de ces éléments. Un élément de $\mathcal{P}$ sera dit standard s'il contient un élément de $\mathcal{P}_{st}^{min}$. On note $\mathcal{P}_{st}$ l'ensemble des éléments standards de $\mathcal{P}$. On a (cf. [B2, §2]):

$$cl(A_{\varnothing}^-) = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{st}^{min}} cl(A_P^-). \quad (1.5)$$

A chaque sous-groupe parabolique Q de G on associe le caractère de L_Q :

$$d_Q: x \mapsto |\det Ad(x)|_{\mathfrak{n}_Q}|^{1/2} \quad (1.6)$$

et sa différentielle

$$\rho_Q: \mathbb{I}_Q \mapsto \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

La forme B détermine un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_\emptyset$, ce qui détermine une mesure de Haar sur tout sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}_\emptyset$.

L'endomorphisme $\sigma\theta$ étant égal à l'identité sur $\mathfrak{a}_\emptyset$, tous sous-espace radical $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \Sigma_P$) est $\sigma\theta$ -stable, et on a la décomposition correspondante:

$$\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}_+^\alpha + \mathfrak{g}_-^\alpha$$

pour les valeurs propres $+1$ et -1 . On note m_α (resp. p_α, q_α) la dimension de $\mathfrak{g}^\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_+^\alpha, \mathfrak{g}_-^\alpha$). Pour $P_\emptyset \in \mathcal{P}_{st}^{min}$ on définit la fonction $D_{P_\emptyset}$ sur $\mathfrak{a}_\emptyset$, par:

$$D_{P_\emptyset}(X) = \prod_{\alpha \in \Sigma_{P_\emptyset}} |e^{\alpha(X)} - e^{-\alpha(X)}|^{p_\alpha} |e^{\alpha(X)} + e^{-\alpha(X)}|^{q_\alpha}. \quad (1.8)$$

On note dx la mesure G -invariante à gauche sur G/H donnée par:

$$\int_{G/H} f(x) dx = \sum_{P_\emptyset \in \mathcal{P}_{st}^{min}} \int_K \int_{cl(\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-)} D_{P_\emptyset}(X) f(k \exp(X)H) dk dX \quad (1.9)$$

$f \in C_c(G/H)$. Ici la mesure sur K a été normalisée à 1. Un tel choix est possible d'après [F-J, Théorème 2.6].

On remarque que ce choix, joint à notre choix d'une mesure sur $\mathfrak{a}_G$, conduit à un choix de mesure sur M_G/H , grâce à l'isomorphisme (1.4).

2. INTRODUCTION À L'ESPACE $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)$

On identifie l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ des opérateurs différentiels sur G/H invariants par translation à gauche par G , à l'algèbre $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}/U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}} \cap U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ agissant par représentation régulière droite sur $C^\infty(G/H)$, qui est canoniquement isomorphe à l'espace des fonctions C^∞ sur G , H -invariants à droite (cf. e.g. [B4, Lemme 2.1]). On confondra parfois un élément D de $\mathbb{D}(G/H)$ avec l'un de ses représentants dans $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$.

On utilise les notations habituelles:

$$\mathfrak{f}^d = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}), \quad \mathfrak{s}^d = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} + i(\mathfrak{f} \cap \mathfrak{q}), \quad \mathfrak{g}^d = \mathfrak{f}^d + \mathfrak{s}^d.$$

On note σ^d la restriction à $\mathfrak{g}^d$ du prolongement $\mathbb{C}$ -linéaire de θ à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{s}^d$, stable par σ^d et tel que $\mathfrak{a}_\mathfrak{s}^d := \mathfrak{a}^d \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$ est contenu dans $\mathfrak{a}_\emptyset$, sera dit sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$. On notera $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}^d := \mathfrak{a}^d \cap i(\mathfrak{f} \cap \mathfrak{q})$. Nous noterons parfois $\mathfrak{a}$ au lieu de $\mathfrak{a}_\mathfrak{s}^d$. Si

α^d est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$, on note W_{α^d} le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}^d, \alpha^d)$ et γ_{α^d} l'isomorphisme d'Harish-Chandra de $\mathbb{D}(G/H)$ sur l'algèbre, $S(\alpha^d)^{W_{\alpha^d}}$, des fonctions polynomiales sur $(\alpha^d)_{\mathbb{C}}^*$ invariantes sous W_{α^d} (cf. e.g. [D1, §2.1]). A chaque élément λ de $(\alpha^d)_{\mathbb{C}}^*$, on associe le caractère de $\mathbb{D}(G/H)$, χ_λ , défini par:

$$\chi_\lambda(D) := \gamma_{\alpha^d}(D)(\lambda), \quad D \in \mathbb{D}(G/H).$$

Tout caractère χ de $\mathbb{D}(G/H)$ est de cette forme. Un élément λ de $(\alpha^d)_{\mathbb{C}}^*$ sera dit paramètre d'Harish-Chandra du caractère χ , si $\chi = \chi_\lambda$. Si f est une fonction C^∞ sur G/H et $\lambda \in (\alpha^d)_{\mathbb{C}}^*$, on dit que f est un vecteur propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ (ou parfois, pour χ_λ) si, et seulement si:

$$Df = \gamma_{\alpha^d}(D)(\lambda) f, \quad D \in \mathbb{D}(G/H).$$

Soit E un espace de Hilbert de dimension finie. Pour $r > 0$ et $f \in C^\infty(G/H, E)$ on note:

$$\|f\|_{2,r} := \left(\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^r \int_{G/H} \|f(x)\|^2 e^{-\varepsilon \varpi(x)} dx \right)^{1/2}.$$

La définition suivante généralise celle donnée dans le cadre des groupes par H. Midorikawa [Mi2, Définition 4.2].

DÉFINITION 1. Soit $r > 0$, τ une représentation unitaire de K dans un espace vectoriel de dimension finie E , et χ un caractère de $\mathbb{D}(G/H)$. On note $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ (resp. $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$) l'ensemble des fonctions, f , C^∞ sur G/H (resp. C^∞ sur G/H et τ -sphérique (ie. à valeurs dans E et vérifiant $f(kx) = \tau(k)f(x)$, $k \in K$, $x \in G/H$)), telles que:

- (i) $Df = \chi(D)f$, $D \in \mathbb{D}(G/H)$.
- (ii) Pour tout U élément de $U(\mathfrak{g})$, $\|L(U)f\|_{2,r}$ est fini.

Un calcul élémentaire donne immédiatement le résultat suivant.

LEMME 1. L'ensemble $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ (resp. $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$) a une structure d'espace vectoriel, et $\|\cdot\|_{2,r}$ définit une semi-norme sur cet espace vectoriel.

Remarque 1. Notre définition de $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ diffère légèrement de celle de [Mi2, Définition 4.2] dans le cas des groupes. En effet, pour assurer la stabilité de $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ pour l'addition, nous avons remplacé la limite par la limite supérieure.

Soit $\delta \in \hat{K}$. On note χ_δ son caractère normalisé (ie. $\chi_\delta = d_\delta \text{tr } \delta$ et d_δ la dimension de la représentation δ), de sorte qu'on a la relation d'orthogonalité de Schur (cf. e.g. [K, Corollaire 1.10]).

LEMME 2. *Muni de la semi-norme $\| \cdot \|_{2,r}$ et de l'action régulière gauche de G , l'espace $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ est un G -module topologique dont le sous-espace des vecteurs K -finis, $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)}$, est dense. Plus précisément, on a :*

- (i) *Pour $f \in \mathcal{H}_r(G/H, \chi)$, $\|\chi_\delta * f\|_{2,r} \leq d_\delta \|f\|_{2,r}$.*
- (ii) *$\sum_{\delta \in K} \chi_\delta * f$ converge vers f pour la semi norme $\| \cdot \|_{2,r}$*

Démonstration. Pour prouver ces résultats, qui généralisent ceux écrites dans [Mil], §2, pour le cas des groupes, on reprend les méthodes utilisées dans [Mil]. En effet, tous les ingrédients utilisés dans ce dernier, sont à notre disposition pour le cas des espaces symétriques réductifs. ■

Soit τ une représentation unitaire de dimension finie du groupe K sur un espace Hilbertien E . Pour toute fonction τ -sphérique F , et toute forme linéaire ζ sur E , la fonction $\zeta \circ F$ est K -finie à gauche. Inversement, pour toute fonction $f: G/H \rightarrow \mathbb{C}$, K -finie à gauche, il existe une représentation unitaire de dimension finie (τ, E) de K , une forme linéaire ζ sur E , et une fonction τ -sphérique, $F: G/H \rightarrow E$, telles que $f = \zeta \circ F$. Plus précisément, on définit F de G/H dans $L^2(K)$, par

$$F(xH)(k) = f(kxH), \quad x \in G, \quad k \in K. \quad (2.1)$$

Comme f est K -finie, le sous-espace vectoriel de $L^2(K)$, E , engendré par l'ensemble des éléments, $R(k)F(xH)$, $k \in K$, $x \in G$, est de dimension finie. On pose $\tau := R|_E$, et on vérifie sans peine que F est τ -sphérique. De plus, si on désigne par δ_e l'évaluation sur $L^2(K)$ en élément neutre e , on pose $\zeta := \delta_e|_E$ et on vérifie facilement que ζ est une forme linéaire sur E , et que:

$$f = \zeta \circ F.$$

De plus, grâce à la formule intégrale (1.9), on a :

$$\|f\|_{2,r} = \|F\|_{2,r}. \quad (2.2)$$

Nous utiliserons donc le langage des fonctions sphériques pour étudier le comportement de certaines fonctions K -finies sur G/H .

Soit (τ, E) une représentation unitaire du groupe K sur un espace Hilbertien de dimension finie.

DÉFINITION 2. Une fonction F sur G/H à valeurs dans E (resp. dans $\mathbb{C}$), de classe C^∞ , τ -sphérique (resp. K -finie à gauche) est dite tempérée si, pour tout $X \in U(\mathfrak{g})$, il existe un réel positif c et un entier naturel d , tels que:

$$\|(L(X)F(x))\| \leq c(1 + \varpi(x))^d \Theta_G(x), \quad x \in G/H$$

où $\Theta_G(gH) = \Xi(g\sigma(g^{-1}))^{1/2}$, $g \in G$, Ξ étant la fonction d'Harish-Chandra.

Remarque 2. Si F est une fonction C^∞ sur G/H , τ -sphérique (resp. K -finie) et $\mathbb{D}(G/H)$ -finie, alors F est tempérée si, et seulement si, F est tempérée au sens de [D1, Définition 2], ceci d'après [B2, Théorème 6.1] et [B4, Proposition 17.2].

L'espace vectoriel des fonctions τ -sphériques tempérées et $\mathbb{D}(G/H)$ -finies sera noté $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau)$. Soit χ un caractère de $\mathbb{D}(G/H)$, on note $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ le sous-espace de $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau)$ formé des fonctions propres pour χ sous l'action de l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$.

THÉORÈME 1. *Soit χ un caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ et $r > 0$. Toute fonction de $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)}$ (resp. $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$) est tempérée.*

Démonstration. On ne fait la démonstration que pour $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$, celle pour $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)}$ s'en déduit grâce à (2.2).

Soit $F \in \mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$. Grâce à la définition même de l'espace $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$, on a :

$$\varepsilon^r \int_{G/H} \|F(x)\|^2 e^{-\varepsilon \varpi(x)} dx < \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Soit $P_\emptyset \in \mathcal{P}_{st}^{min}$. On note $\mathfrak{a}_\emptyset^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_\emptyset$. On a $\mathfrak{a}_\emptyset = \mathfrak{a}_\emptyset^G \oplus \mathfrak{a}_G$. Ceci permet d'identifier les espaces $(\mathfrak{a}_\emptyset^G)^*$ et $(\mathfrak{a}_G)^*$ à des sous-espaces de $(\mathfrak{a}_\emptyset)^*$. On complète la base $A_{P_\emptyset}$ de $(\mathfrak{a}_\emptyset^G)^*$ en une base $A_{P_\emptyset}$ de $(\mathfrak{a}_\emptyset)^*$ par des éléments nuls sur $\mathfrak{a}_\emptyset^G$, et on munit $\mathfrak{a}_\emptyset$ de la base duale de $A_{P_\emptyset}$, notée $\{\omega_\lambda \mid \lambda \in A_{P_\emptyset}\}$. Grâce à (1.9), la relation (2.3) implique que,

$$\int_{\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-} \|F(\exp(X))\|^2 D_{P_\emptyset}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dx < \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.4)$$

Soit maintenant $R > 0$ fixé. On pose :

$$(\mathfrak{a}_\emptyset^G)_{P_\emptyset, R}^- := \{X \in \mathfrak{a}_\emptyset^G \mid \alpha(X) < -R, \alpha \in A_{P_\emptyset}\}.$$

Comme l'ensemble $(\mathfrak{a}_\emptyset^G)_{P_\emptyset, R}^- \times \mathfrak{a}_G$ est contenu dans la chambre de Weyl négative $\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-$, on déduit de (2.4) que :

$$\int_{(\mathfrak{a}_\emptyset^G)_{P_\emptyset, R}^-, R \times \mathfrak{a}_G} \|F(\exp(Y+Z))\|^2 D_{P_\emptyset}(Y+Z) e^{-\varepsilon \|Y+Z\|} dY dZ < \infty, \quad \varepsilon > 0$$

où dY et dZ sont respectivement les mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{a}_\emptyset^G$ et $\mathfrak{a}_G$. Puis, par application du Théorème de Fubini, on voit que pour presque tout élément Z de $\mathfrak{a}_G$,

$$\int_{(\mathfrak{a}_\emptyset^G)_{P_\emptyset, R}^-} \|F(\exp(Y+Z))\|^2 D_{P_\emptyset}(Y+Z) e^{-\varepsilon \|Y+Z\|} dY < \infty. \quad (2.5)$$

Par ailleurs, pour $(Y, Z) \in (\mathfrak{a}_G^G)_{P_\emptyset, R}^-$, on a:

$$D_{P_\emptyset}(Y + Z) \geq C_R e^{-2\rho_{P_\emptyset}(Y)} \quad (2.6)$$

où $C_R := \prod_{\alpha \in \Sigma_{P_\emptyset}} (1 - e^{-2R})^{\rho_\alpha}$. En outre, de l'écriture $Y = \sum_{\alpha \in \Delta_{P_\emptyset}} \alpha(Y) \omega_\alpha$, on déduit facilement l'existence d'une constante $C > 0$ telle que:

$$\|Y\| \leq C |\rho_{P_\emptyset}(Y)|, \quad Y \in (\mathfrak{a}_G^G)_{P_\emptyset, R}^-$$

par conséquent

$$\|Y + Z\| \leq \|Z\| + \|Y\| \leq \|Z\| - C\rho_{P_\emptyset}(Y) \quad (2.7)$$

car $\rho_{P_\emptyset}(Y) < 0$. En reportant (2.6) et (2.7) dans (2.5), on trouve que, pour presque tout élément $Z \in \mathfrak{a}_G$, on a:

$$\int_{(\mathfrak{a}_G^G)_{P_\emptyset, R}^-} \|F(\exp(Y + Z))\|^2 e^{-(2-\varepsilon C)\rho_{P_\emptyset}(Y)} dY < \infty. \quad (2.8)$$

Comme $\mathfrak{a}_G$ est contenu dans $\mathbb{D}(G/H)$, F se transforme sous A_G par un caractère, car elle est $\mathbb{D}(G/H)$ -propre. Alors grâce à l'égalité $G = M_G A_G$, on peut se ramener au cas où $\mathfrak{a}_G$ est réduit à zéro. Cela permet, grâce à van den Ban [B2, Lemme 3.1 et Remarque 2.6], de reprendre l'argument de Casselman Milčić [Ca.M, démonstration du Théorème 7.5, page 905] et de prouver que pour tout exposant directeur ξ de F le long de $P_\emptyset$ (voir [D1, §2.2] pour cette définition), et tout $\varepsilon > 0$, on a $\operatorname{Re} \xi - (1 - \frac{1}{2}\varepsilon C)\rho_{P_\emptyset}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\Delta_{P_\emptyset}$ à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. En faisant tendre ε vers 0, on déduit qu'il en va de même pour $\operatorname{Re} \xi - \rho_{P_\emptyset}$. Il en résulte, grâce à la Remarque 2, que F est tempérée. D'où le Théorème. ■

3. MAJORATION DE LA DIFFÉRENCE D'UNE FONCTION TEMPÉRÉE, $\mathbb{D}(G/H)$ -PROPRE, SPHÉRIQUE ET DE SON TERME CONSTANT

3.1. Fonctions de types $\mathcal{D}_{A, \theta}$

Soient E, I deux ensembles et J une partie de I . On notera pr_J la projection de E^I sur E^J . En particulier si E est un espace vectoriel, la décomposition $E^I = E^J \times E^{I \setminus J}$ permettra d'identifier naturellement E^J à un sous espace vectoriel de E^I . Si $\mathcal{B}$ est une partie de l'espace vectoriel E et A une partie du corps de base de E , on notera $A(\mathcal{B})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{B}$ à coefficients dans A . Si r est un nombre positif, on notera D_r (resp. D) le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de rayon r (resp. 1), et $\overline{D_r}$ (resp. $\overline{D}$) son adhérence.

On se fixe $P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}$, et on complète la base de $(\mathfrak{a}_\varnothing^G)^*$, $\Delta_{P_\varnothing}$ (notée aussi Δ), formée des racines simples de l'ensemble des racines positives $\Sigma_{P_\varnothing}$ correspondant à $P_\varnothing$, en une base de $(\mathfrak{a}_\varnothing^G)^*$, $\Delta_{P_\varnothing}$ (notée aussi Δ), par des éléments nuls sur $\mathfrak{a}_\varnothing^G$. Muni de cette base, l'espace vectoriel $(\mathfrak{a}_\varnothing^G)^*_\mathbb{C}$ ($= \mathbb{C}(\Delta)$) est canoniquement isomorphe à $\mathbb{C}^A$, ce qui permettra de confondre tout élément $s = (s_\lambda)_{\lambda \in A}$ de $\mathbb{C}^A$ à son image dans $(\mathfrak{a}_\varnothing^G)^*_\mathbb{C}$ notée $v_s := \sum_{\lambda \in A} s_\lambda \lambda$. Si $\Theta \subset A$, on définit sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}(A \setminus \Theta)$ une relation d'ordre $\leq_{(A, \Theta)}$ par, $\eta_1 \leq_{(A, \Theta)} \eta_2$ si et seulement si $(\eta_2 - \eta_1) \in \mathbb{N}(A \setminus \Theta)$. La relation $\leq_{(A, \Theta)}$ est dite (A, Θ) -ordre. Deux éléments η_1 et η_2 de $\mathbb{C}(A \setminus \Theta)$ seront dits (A, Θ) -intégralement équivalents si et seulement si $\eta_2 - \eta_1 \in \mathbb{Z}(A \setminus \Theta)$.

Si $\Theta \subset A$, on note $\underline{\alpha}_\Theta$ l'application de $A_\varnothing$ dans $\mathbb{C}^\Theta$, définie par:

$$\underline{\alpha}_\Theta(a) := (e^{\lambda(\log a)})_{\lambda \in \Theta}.$$

Si $a \in A_\varnothing$ et $\eta \in \mathbb{C}(A \setminus \Theta)$, on pose:

$$a^\eta := e^{\eta(\log a)}.$$

Enfin, si $\Theta \subset A$, $\eta = \sum_{\lambda \in A} \eta_\lambda \lambda \in \mathbb{C}(\Theta) \times \mathbb{N}(A \setminus \Theta)$, $n = (n_\lambda)_{\lambda \in \Theta} \in \mathbb{N}^\Theta$ et $z = (z_\lambda)_{\lambda \in A} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)^\Theta \times \mathbb{C}^{A \setminus \Theta}$, on pose:

$$\log^n(z) := \prod_{\lambda \in \Theta} \log^{\eta_\lambda} z_\lambda$$

et

$$z^\eta := \left(\prod_{\lambda \in \Theta} e^{\eta_\lambda \log z_\lambda} \right) \left(\prod_{\lambda \in A \setminus \Theta} z_\lambda^{\eta_\lambda} \right)$$

où $\log$ est la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

DÉFINITION 3. Soient $\Theta \subset A$ et Φ une fonction définie sur $A_{P_\varnothing}^-$ à valeurs dans un espace vectoriel complexe de dimension finie E . On dit que Φ admet un développement de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ (resp. $\mathcal{D}'_{A, \Theta}$) si, et seulement si, il existe:

- (1) un ensemble fini, $S_{A, \Theta}(\Phi)$ (noté $S_{A, \Theta}$, s'il n'y a pas d'ambiguïté), d'éléments (A, Θ) -intégralement inéquivalents de $\mathbb{C}(A \setminus \Theta)$;
- (2) un ensemble fini, $M_{A, \Theta}(\Phi)$ (noté aussi $M_{A, \Theta}$), d'éléments de $\mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$;
- (3) une famille finie, $(\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta})_{\eta \in S_{A, \Theta}, m \in M_{A, \Theta}}$, de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert connexe de $]0, 1[^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ (resp. $]0, 1[^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$) dans $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times \mathbb{C}^{A \setminus \Theta}$, tels que:

$$(i) \quad \Phi(a) = \sum_{\eta \in S_{\Delta, \Theta}, m \in M_{\Delta, \Theta}} \Phi_{\eta, m}^{\Delta, \Theta}(\alpha_{\Delta}(a)) a^{\eta} \log^m a_{\Delta \setminus \Theta}(a), \quad a \in A_{P_{\emptyset}}^{-}.$$

(ii) Pour tout $\eta \in S_{\Delta, \Theta}$ et tout $\alpha \in \Delta \setminus \Theta$, on peut choisir $m \in M_{\Delta, \Theta}$, tel que la fonction $\Phi_{\eta, m}^{\Delta, \Theta}$ n'est pas identiquement nulle sur l'hyperplan de $\mathbb{C}^{\Delta}$ d'équation $z_{\alpha} = 0$.

Notation. Si $\Theta = \emptyset$, on remplacera dans tout ce qui précède l'indice $(\Delta, \emptyset)$ par Δ .

Remarque 3. Les développements donnés dans la Définition 3 sont légèrement plus restrictifs que ceux utilisés dans [B2, §5] pour les développements des fonctions τ -sphériques $\mathfrak{z}$ -finies. En effet, dans notre cas on impose que les termes logarithmiques sont invariants par les translations par les éléments de A_G .

Dans la suite de ce paragraphe, on présente certaines propriétés de ces développements. Ces propriétés résultent essentiellement de [Ca.M, §6]. Nous donnons les démonstrations pour la commodité du lecteur.

LEMME 3. Soient p et q deux entiers positifs, avec $q \leq p$, et φ une fonction non identiquement nulle, holomorphe sur un voisinage ouvert U de $]0, 1[^q \times D^{p-q}$ (resp. $]0, 1]^q \times D^{p-q}$) dans $(\mathbb{C}^*)^q \times \mathbb{C}^{p-q}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors, il existe:

(i) un voisinage ouvert connexe W de $]0, 1[^q$ (resp. $]0, 1]^q$) dans $(\mathbb{C}^*)^q$, un voisinage ouvert V de $]0, 1[^q \times D^{p-q}$ (resp. $]0, 1]^q \times D^{p-q}$) contenu dans $U \cap (W \times D^{p-q})$, et une famille de fonctions holomorphes sur W , $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^{p-q}}$, tels que pour tout $(z', z'') \in V$ (avec $z' \in (\mathbb{C}^*)^q$, $z'' \in \mathbb{C}^{p-q}$), la série entière en Z'' , $\sum_k \varphi_k(z')(z'')^k$, est absolument sommable et égale à $\varphi(z', z'')$.

(ii) un multi-indice $n \in \mathbb{N}^{p-q}$ et une fonction holomorphe sur V , ψ , non identiquement nulle sur chaque hyperplan de $\mathbb{C}^p$ d'équation $z_j = 0$, $j = q + 1, \dots, p$; tels que $\varphi(z) = (z'')^n \psi(z)$.

Démonstration. Soient ε et r deux éléments de $]0, 1[$. Par un argument de compacité, on choisit un voisinage ouvert connexe $W_{\varepsilon, r}$ de $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^q$ (resp. $[\varepsilon, 1]^q$) dans $(\mathbb{C}^*)^q$ tel que $W_{\varepsilon, r} \times \overline{D_r}^{p-q}$ soit contenu dans U . Les φ_k sont alors définies sur $W_{\varepsilon, r}$ par la formule intégrale de Cauchy comme coefficients du développement en série entière de la fonction φ en z'' dans D_r^{p-q} . Leur holomorphie sur $W_{\varepsilon, r}$ en résulte. On aura soin de noter que grâce au principe de prolongement analytique, les fonctions φ_k ne dépendent ni de ε ni de r . Pour achever la démonstration de (i), on prend W égal à la réunion des $W_{\varepsilon, r}$ et V la réunion des $W_{\varepsilon, r} \times D_r^{p-q}$ ($\varepsilon, r \in]0, 1[$).

Montrons (ii). On définit sur $\mathbb{N}^{p-q}$ la relation d'ordre, $\leq$ par $m \leq m'$ si, et seulement si $m' - m \in \mathbb{N}^{p-q}$. Puis, on prend n égal à la borne inférieure

pour $\leq$ des multi-indices k de $\mathbb{N}^{p-q}$ vérifiant φ_k non identiquement nulle, et ψ la fonction définie sur V par, $\psi(z', z'') := \sum_{k \in \mathbb{N}^{p-q}} \varphi_{k+n}(z')(z'')^k$. ■

Remarque 4. Soit Φ une fonction de type $\mathcal{D}_{A, \theta}$. Il résulte du Lemme précédent qu'il existe:

— des fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert connexe, $W(\Phi)$, de $]0, 1[^\theta$ dans $(\mathbb{C}^*)^\theta$, $C_{\eta, k, m}$, $\eta \in S_{A, \theta}$, $m \in M_{A, \theta}$ et $k \in \mathbb{N}^{A \setminus \theta}$,

— un voisinage ouvert connexe $V(\Phi)$ de $]0, 1[^\theta \times D^{A \setminus \theta}$ dans $(\mathbb{C}^*)^\theta \times \mathbb{C}^{A \setminus \theta}$ contenu dans l'intersection de $W(\Phi) \times D^{A \setminus \theta}$ avec l'intersection des domaines des fonctions $\Phi_{\eta, m}^{A, \theta}$, tels que:

$$\Phi_{\eta, m}^{A, \theta}(z', z'') = \sum_{k \in \mathbb{N}^{A \setminus \theta}} C_{\eta, k, m}(z')(z'')^k, \quad (z', z'') \in V(\Phi). \quad (3.1)$$

En particulier, si Φ est une fonction de type $\mathcal{D}'_{A, \theta}$, on peut remplacer dans ce qui précède $]0, 1[$ par $]0, 1]$.

Soit $\xi \in \mathbb{C}(A \setminus \theta)$ et $m \in M_{A, \theta}$. S'il existe $\eta \in S_{A, \theta}$ et $k \in \mathbb{N}^{A \setminus \theta}$ tels que $\xi = \eta + v_k$ (noter que d'après les propriétés de $S_{A, \theta}$ (cf. Définition 3), on a unicité de η et k lorsqu'ils existent), on pose $C_{\xi, m}^{A, \theta}(\Phi) := C_{\eta, k, m}$. Sinon, on pose $C_{\xi, m}^{A, \theta}(\Phi) := 0$. On a alors,

$$\Phi(a) = \sum_{\xi \in \mathbb{C}(A \setminus \theta), m \in M_{A, \theta}} C_{\xi, m}^{A, \theta}(\Phi)(\alpha_\theta(a)) a^\xi \log^m \alpha_{A \setminus \theta}(a), \quad a \in A_{P^\emptyset}^-. \quad (3.2)$$

Un tel développement sera dit “deuxième développement de type $\mathcal{D}_{A, \theta}$ ” de Φ . On dira que $\xi \in \mathbb{C}(A \setminus \theta)$ est un (A, θ) -exposant de Φ , s'il existe $m \in \mathbb{N}^{A \setminus \theta}$ tel que la fonction $C_{\xi, m}^{A, \theta}(\Phi)$ ne soit pas identiquement nulle. L'ensemble des (A, θ) -exposants de Φ sera noté $\mathcal{E}_{A, \theta}(\Phi)$. On appellera (A, θ) -exposant directeur de Φ tout élément de $\mathcal{E}_{A, \theta}(\Phi)$ minimal pour la relation $\leq_{(A, \theta)}$, et on notera $\mathcal{E}_{A, \theta}^0(\Phi)$ l'ensemble de ces éléments. Enfin, pour $\theta = \emptyset$ on remplace dans les notations précédentes l'indice $(A, \emptyset)$ par A .

LEMME 4. Soit Φ une fonction admettant un développement de type $\mathcal{D}_{A, \theta}$ avec $S_{A, \theta} \neq \emptyset$. Alors Φ est non identiquement nulle.

Démonstration. Gardant les notations de la Remarque 4.

Soit Φ comme dans l'énoncé du Lemme. On raisonne par l'absurde et on suppose que Φ est identiquement nulle.

Pour $z' \in]0, 1[^\theta$, on définit la fonction $\Phi_{z'}$ sur $]0, 1[^{A \setminus \theta}$ par:

$$\Phi_{z'}(z'') = \sum_{\eta \in S_{A, \theta}, m \in M_{A, \theta}} \Phi_{\eta, m}^{A, \theta}(z', z'')(z'')^n \log^m(z''). \quad (3.3)$$

Remarquons que si $(z', z'') \in]0, 1[^\Theta \times]0, 1[^{A \setminus \Theta}$, et a l'élément de $A_{P \setminus \emptyset}^-$ vérifiant $\alpha_\Theta(a) = z'$ et $\alpha_{A \setminus \Theta}(a) = z''$, on a $\Phi_{z'}(z'') = \Phi(a)$. Il en résulte que les fonctions $\Phi_{z'}$ sont identiquement nulles. Alors par application du Corollaire B.26, Appendice B de [K] à chacune de ces fonctions, on déduit que les fonctions $C_{\xi, m}^{A, \Theta}(\Phi)$, $\xi \in \mathbb{C}(A \setminus \Theta)$, $m \in M_{A, \Theta}$, sont identiquement nulles. Il en est de même pour les fonctions $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$ grâce à (3.1). Tenant compte des propriétés de $S_{A, \Theta}$ (cf. Définition 3(ii)), cela contredit le fait que $S_{A, \Theta} \neq \emptyset$ et achève la démonstration du Lemme. ■

LEMME 5. *La différence de deux fonctions de type $\mathcal{D}^{A, \Theta}$ (resp. $\mathcal{D}'_{A, \Theta}$) est de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ (resp. $\mathcal{D}'_{A, \Theta}$).*

Démonstration. Soient Φ_1, Φ_2 deux fonctions de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ et $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$. Notons

$$\Phi_i(a) = \sum_{\eta \in S_i, m \in M_i} (\Phi_i)_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(a)) a^\eta \log^m(\alpha_{A \setminus \Theta}(a)), \quad a \in A_{\emptyset}^-$$

un développement de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ de Φ_i , $i = 1, 2$. On peut supposer que $M_1 = M_2 = M$. Notons W l'intersection des domaines d'holomorphic des fonctions $(\Phi_i)_{\eta, m}^{A, \Theta}$ ($\eta \in S_i, m \in M$), c'est un voisinage ouvert de $]0, 1[^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ dans $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$. On note S'_1 (resp. S'_2) l'ensemble des éléments η de S_1 (resp. S_2) qui sont (A, Θ) -intégralement inéquivalents à chaque élément de S_2 (resp. S_1), et on pose $S_{1,2} := S_1 \setminus S'_1$. Pour $\eta \in S'_i$ et $m \in M$, on pose:

$$\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta} := (-1)^{i+1} (\Phi_i)_{\eta, m}^{A, \Theta}, \quad i = 1, 2.$$

Si $S_{1,2} = \emptyset$, les éléments de $S_1 \cup S_2$ seront deux à deux (A, Θ) -intégralement inéquivalents, et on vérifie facilement que:

$$\Phi(a) = \sum_{\eta \in S_1 \cup S_2, m \in M} \Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(a)) a^\eta \log^m(\alpha_{A \setminus \Theta}(a)), \quad a \in A_{\emptyset}^-;$$

et que cette écriture est un développement de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ de Φ . Supposons maintenant que $S_{1,2} \neq \emptyset$. Soit $\eta_1 \in S_{1,2}$, et $m \in M$. Nous noterons η_2 l'unique élément—l'unicité découle des propriétés de S_2 (cf. Définition 3)—de S_2 vérifiant $\eta_1 - \eta_2 \in \mathbb{Z}(A \setminus \Theta)$, et on posera $\bar{\eta} := \inf(\eta_1, \eta_2)$ relativement à la relation de (A, Θ) -ordre. Puis on définit la fonction $\Psi_{\eta_1, m}$ sur W par:

$$\Psi_{\eta_1, m}(z) := (\Phi_1)_{\eta_1, m}^{A, \Theta}(z) z^{\eta_1 - \bar{\eta}} - (\Phi_2)_{\eta_2, m}^{A, \Theta}(z) z^{\eta_2 - \bar{\eta}}.$$

Cette fonction est clairement holomorphe sur W . On déduit de ce qui précède et du point (ii) du Lemme 5, que si $\Psi_{\eta_1, m}$ est non nulle, on peut choisir un élément p_m de $\mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$ et une fonction $\Psi'_{\eta_1, m}$ holomorphe sur un voisinage de $]0, 1[^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ dans $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$, non identiquement nulle

sur chaque hyperplan de $\mathbb{C}^A$ d'équation $z_\alpha = 0$, $\alpha \in A \setminus \Theta$, tels que $\Psi_{\eta_1, m}(z) = \Psi'_{\eta_1, m}(z) z^{p_m}$. On pose alors, $\eta := \inf \{v_{p_m} + \bar{\eta} \mid m \in M\}$ (relativement à la relation de (A, Θ) -ordre), et on définit la fonction $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$ par:

$$\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(z) := \Psi'_{\eta_1, m}(z) z^{v_{p_m} + \bar{\eta} - \eta}.$$

On note $S'_{1,2}$ l'ensemble des éléments η définis ci-dessus lorsque η_1 décrit $S_{1,2}$ et on pose $S := S'_1 \cup S'_2 \cup S'_{1,2}$. L'ensemble fini (éventuellement vide) S est formé d'éléments deux à deux (A, Θ) -intégralement inéquivalents de $\mathbb{C}(A \setminus \Theta)$. De plus, on a:

$$\Phi(a) = \sum_{\eta \in S, m \in M} \Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(a)) a^\eta \log^m(\alpha_{A \setminus \Theta}(a)), \quad a \in A_{\emptyset}^-. \quad (3.4)$$

En tenant compte des propriétés de S et celles des fonctions $(\Phi)_{\eta, m}^{A, \Theta}$, $\eta \in S$, $m \in M$, on voit clairement que l'écriture (3.4) est un développement de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ de Φ . Le lemme en résulte dans le cas des fonctions de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$.

Dans le cas des fonctions de type $\mathcal{D}'_{A, \Theta}$, la même démonstration assure le résultat. En effet, il suffit de remarquer que dans ce cas, les fonctions $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$ construites ci-dessus vérifient les propriétés désirées. ■

Avec les notations de la Définition 3, le résultat suivant se déduit immédiatement de la démonstration du Lemme 5.

LEMME 6. Soient Φ_1, Φ_2 deux fonctions de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ et $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$. Pour tout $\eta \in S_{A, \Theta}(\Phi)$, il existe $\eta_1 \in S_{A, \Theta}(\Phi_1)$ et $\eta_2 \in S_{A, \Theta}(\Phi_2)$ tels que,

$$\inf(\eta_1, \eta_2) \preccurlyeq_{(A, \Theta)} \eta$$

où $\inf$ est relative à la relation $\preccurlyeq_{(A, \Theta)}$.

LEMME 7. Toute fonction de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$ admet un unique développement de ce type.

Démonstration. On garde les notations de la démonstration du Lemme 5, en supposant que $\Phi_1 = \Phi_2$. Il s'agit de montrer que $S_1 = S_2$, et puis que $(\Phi_1)_{\eta, m}^{A, \Theta} = (\Phi_2)_{\eta, m}^{A, \Theta}$, pour tout $\eta \in S_1$ ($= S_2$) et tout $m \in M$. Comme $\Phi := \Phi_1 - \Phi_2$ est identiquement nulle, on a $S = \emptyset$, grâce au Lemme 4. Cela implique que $S'_1 = S'_2 = S'_{1,2} = \emptyset$, et que $S_{1,2} = S_1$. Remarquons d'abord que si $S_1 = \emptyset$ (resp. $S_2 = \emptyset$), on a Φ_1 ($= \Phi_2$) identiquement nulle, et grâce au Lemme 4, on a aussi $S_2 = \emptyset$ (resp. $S_1 = \emptyset$). Le Lemme est donc immédiat dans ce cas. Supposons maintenant que S_1 et S_2 sont non vide. Soit $\eta_1 \in S_1$ ($= S_{1,2}$), η_2 l'élément de S_2 (A, Θ) -intégralement équivalent à

η_1 , et $\bar{\eta} = \inf(\eta_1, \eta_2)$. Comme $\eta_1 \in S_{1,2}$ et $\eta_1 \notin S'_{1,2}$ (ensemble vide), grâce à la définition de $S'_{1,2}$, on a :

$$(\Phi_1)_{\eta_1, m}^{A, \Theta}(z) z^{\eta_1 - \bar{\eta}} = (\Phi_2)_{\eta_2, m}^{A, \Theta}(z) z^{\eta_2 - \bar{\eta}}, \quad m \in M, \quad z \in W. \quad (3.5)$$

Soit $\alpha \in A \setminus \Theta$. De la définition de $\bar{\eta}$ on déduit l'existence de $i \in \{1, 2\}$ tel que $(\bar{\eta})_\alpha = (\eta_i)_\alpha$. D'autre part, la fonction $(\Phi_i)_{\eta_i, m}^{A, \Theta}$ ($m \in M$) vérifie la propriété (ii) de la Définition 3, on peut choisir donc $m_{\eta_i} \in M$ tel que la fonction $(\Phi_i)_{\eta_i, m_{\eta_i}}^{A, \Theta}$ ne soit pas identiquement nulle sur l'hyperplan d'équation $z_\alpha = 0$. Il en va de même pour la fonction $z \mapsto (\Phi_i)_{\eta_i, m_{\eta_i}}^{A, \Theta}(z) z^{\eta_i - \bar{\eta}}$, car $(\bar{\eta})_\alpha = (\eta_i)_\alpha$. Cela joint à l'égalité (3.5), implique que

$$(\bar{\eta})_\alpha = (\eta_1)_\alpha = (\eta_2)_\alpha.$$

Ceci reste vrai pour tout $\alpha \in A \setminus \Theta$. Mais comme η_1 et η_2 sont (A, Θ) -intégralement équivalents, on déduit que

$$\bar{\eta} = \eta_1 = \eta_2$$

et puis, grâce à (3.5), que

$$(\Phi_1)_{\eta, m}^{A, \Theta} = (\Phi_2)_{\eta, m}^{A, \Theta}.$$

D'où le résultat annoncé. ■

LEMME 8. *Toute fonction de type $\mathcal{D}_A$ est de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$.*

Démonstration. Soit Φ une fonction de type $\mathcal{D}_A$. On pose $S_A := S_A(\Phi)$ et $M_A := M_A(\Phi)$. Pour obtenir une écriture de type $\mathcal{D}_{A, \Theta}$, on regroupe les termes du développement de type $\mathcal{D}_A$ comme dans [Ca.M, page 894]. Plus précisément, si $\xi = \sum_{\lambda \in A} \xi_\lambda \lambda$ est élément de $\mathbb{C}(A)$ et $\Gamma \subset A$ on note ξ_Γ l'élément de $\mathbb{C}(\Gamma)$ défini par $\xi_\Gamma := \sum_{\lambda \in \Gamma} \xi_\lambda \lambda$. On pose $S_{(A, \Theta)} := \{v_{A \setminus \Theta} \mid v \in S_A\}$. Cet ensemble se partitionne en un ensemble fini de classes d'équivalences, S_i , $i \in I$, relativement à la relation de (A, Θ) -intégrale équivalence. Noter que pour chaque $i \in I$, les éléments de S_i sont deux à deux (A, Θ) -intégralement équivalents, et ils sont (A, Θ) -intégralement inéquivalents à ceux de S_j pour tout élément $j \neq i$ de I . Pour chaque $i \in I$, on associe l'élément η^i de $\mathbb{C}(A \setminus \Theta)$ défini par, $\eta^i := (\eta_\lambda^i)_{\lambda \in A \setminus \Theta}$ où $\eta_\lambda^i = \inf_{\eta \in S_i}(\eta_\lambda)$, $\lambda \in A \setminus \Theta$. Puis on pose $S_{A, \Theta} := \{\eta^i, i \in I\}$. D'après les définitions des ensembles ci-dessus, l'ensemble (fini) $S_{A, \Theta}$ est formé d'éléments mutuellement (A, Θ) -intégralement inéquivalents. Pour $\eta \in S_{A, \Theta}$ et $m \in M_{A, \Theta} := pr_{A \setminus \Theta}(M_A)$, on définit la fonction $\Phi_{\eta, m}^{(A, \Theta)}$ de $]0, 1[^{\Theta} \times D^{A \setminus \Theta}$ dans E , par :

$$\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(z) := \sum_{v \in S_\eta, n \in M_m} \Phi_{v, m+n}^A(z) z^{v-\eta} \log^n(z) \quad (3.6)$$

où $M_m := \{n \in \mathbb{N}^\Theta \mid m+n \in M_A\}$ et $S_\eta := \{v \in S_A \mid v_{A \setminus \Theta} - \eta \in \mathbb{N}(A \setminus \Theta)\}$. Grâce à l'holomorphie des fonctions $\Phi_{v, m+m}^A$ et à la définition de S_η , on voit que chacune des fonctions, $z \mapsto \Phi_{v, m+n}^A(z) z^{v-\eta} \log^n(z)$, se prolonge en une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe de $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ contenant $]0, 1[^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$, et il en va de même pour $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$, car les ensembles S_η et M_m sont finis. Pour achever de prouver le lemme, il reste à voir que la famille des fonctions $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$ satisfait à la condition (ii) de la Définition 3. Soient $\eta \in S_{A, \Theta}$ et $\alpha \in A \setminus \Theta$. Pour $u \in D^{A \setminus \Theta}$, $v \in S_\eta$, $m \in M_{A, \Theta}$ et $n \in M_m$, on définit la fonction $\psi_{u, v, m+n}$ sur D^Θ par:

$$\psi_{u, v, m+n}(v) := \Phi_{v, m+n}^A(v, u) u^{v_{A \setminus \Theta} - \eta_{A \setminus \Theta}}.$$

Ces fonctions sont clairement holomorphes sur D^Θ . Par ailleurs, en raison de la définition de $\eta \in S_{A, \Theta}$ et celle de la définition de S_η , on peut choisir $v_1 \in S_\eta$ tel que $(v_1)_\alpha = \eta_\alpha$. Ceci joint aux propriétés des fonctions $\Phi_{v, m+n}^A$ (cf. Définition 3(ii)), montre qu'on peut choisir $m_1 \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$, $n_1 \in \mathbb{N}^\Theta$ et $u_1 \in D^{A \setminus \Theta}$ avec $(u_1)_\alpha = 0$, tels que la fonction ψ_{u_1, v_1, m_1+n_1} ne soit pas identiquement nulle sur D^Θ et donc sur $]0, 1[^\Theta$. D'autre part, grâce à la définition de S_A et celle de S_η ,

$$v_\Theta - v'_\Theta \notin \mathbb{Z}(\Theta), \quad v \neq v' \in S_\eta.$$

De plus, on a:

$$\Phi_{\eta, m_1}^{A, \Theta}(v, u_1) = \sum_{v \in S_\eta, n \in M_{m_1}} \psi_{u_1, v, m_1+n}(v) v^{v_\Theta} \log^n(v), \quad v \in]0, 1[^\Theta.$$

Une variante du Lemme 4 appliqué au développement ci-dessus de la fonction, $v \mapsto \Phi_{\eta, m_1}^{A, \Theta}(v, u_1)$, permet de prouver que $\Phi_{\eta, m_1}^{A, \Theta}$ n'est pas identiquement nulle. Ceci achève la démonstration du lemme. ■

LEMME 9. Soient Φ une fonction de type $\mathcal{D}_A$, $\xi'' \in \mathcal{E}_{A, \Theta}(\Phi)$ et $n'' \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$, tels que $C_{\xi'', n''}^{A, \Theta}(\Phi)$ n'est pas identiquement nulle. Alors on peut choisir $\xi \in \mathcal{E}_A(\Phi)$ et $n \in \mathbb{N}^A$ avec $\xi - \xi'' \in \mathbb{C}(\Theta)$ et $n - n'' \in \mathbb{N}^\Theta$ (i.e. $n_{A \setminus \Theta} = n''$), tels que $C_{\xi, n}^A(\Phi)$ ne soit pas identiquement nulle, i.e. $\xi \in \mathcal{E}_A(\Phi)$.

Démonstration. On garde les notations de la Définition 3 et ceux de la démonstration du lemme précédent.

Soit $v'' \in S_{A, \Theta}$, et $n'' \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$. L'écriture de $\Phi_{v'', n''}^{A, \Theta}$ en fonction des $\Phi_{v, n'+n''}^A$, $v \in S_{v''}$, $n' \in \mathbb{N}^\Theta$ (cf. (3.6)), puis le développement en série entière des fonctions $\Phi_{v, n'+n''}^A$ ($v \in S_{v''}$, $n' \in \mathbb{N}^\Theta$) (cf. Remarque 4, avec $\Theta = \emptyset$), permettent d'avoir pour chaque $z' \in]0, 1[^\Theta$, un développement en série entière en $z'' \in D^{A \setminus \Theta}$ de $\Phi_{v'', n''}^{A, \Theta}(z', z'')$, dont les coefficients sont donnés en fonction des $C_{\xi, n'+n''}^A(\Phi)$ avec $\xi \in \mathbb{C}(A)$ et $\xi_{A \setminus \Theta} - v'' \in \mathbb{N}(A \setminus \Theta)$. D'autre part, on dispose d'un deuxième développement en série entière en $z'' \in D^{A \setminus \Theta}$ de $\Phi_{v'', n''}^{A, \Theta}(z', z'')$,

dont les coefficients sont les termes $C_{\xi'', n''}^{A, \theta}(\Phi)(z')$, avec $\xi'' \in \mathbb{C}(\Delta \setminus \theta)$ et $\xi'' - \nu'' \in \mathbb{N}(\Delta \setminus \theta)$ (cf. Remarque 4). La comparaison de ces deux développements conduit à la conclusion voulue. ■

3.2. Théorème de majoration

Dans cette partie, on utilise les propriétés des développements asymptotiques et convergent le long des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G . On renvoie à [Ca.M, B2, BS1, D1], ou aussi [C] pour les définitions et les propriétés de tels développements.

On conserve les notations des sections précédentes, et on suppose toujours que $P_\emptyset \in \mathcal{P}_{st}^{min}$. On écrit parfois Δ (resp. A) au lieu de $\Delta_{P_\emptyset}$ (resp. $A_{P_\emptyset}$).

On note $\mathcal{P}(P_\emptyset)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G contenant $P_\emptyset$. Si $\theta \subset \Delta_{P_\emptyset}$, on définit les espaces, $\mathfrak{a}_\theta := \bigcap_{\alpha \in \theta} \text{Ker } \alpha$, $\mathfrak{l}_\theta$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}_\theta$, $\mathfrak{m}_\theta$ l'orthogonal dans $\mathfrak{l}_\theta$ de $\mathfrak{a}_\theta$ pour la forme bilinéaire B , et $\mathfrak{n}_\theta := \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{P_\emptyset}, \alpha|_{\mathfrak{a}_\theta} \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$. On note P_θ le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_\theta := \mathfrak{m}_\theta \oplus \mathfrak{a}_\theta \oplus \mathfrak{n}_\theta$, et $P_\theta = M_\theta A_\theta N_\theta$ sa σ -décomposition de Langlands. Alors, $P_\theta \in \mathcal{P}(P_\emptyset)$. On rappelle que B restreinte à $\mathfrak{l}_\theta$ est non dégénérée, que $\mathfrak{a}_\theta$, $\mathfrak{m}_\theta$ et par suite $\mathfrak{l}_\theta (= \mathfrak{m}_\theta \oplus \mathfrak{a}_\theta)$ sont des sous-algèbres σ et θ stables de $\mathfrak{g}$. De plus, si on pose $\mathfrak{a}^\theta := \mathfrak{m}_\theta \cap \mathfrak{a}_\emptyset$, on a $\mathfrak{a}_\emptyset = \mathfrak{a}^\theta \oplus \mathfrak{a}_\theta$. Réciproquement, étant donné un élément Q de $\mathcal{P}(P_\emptyset)$, on peut choisir $\theta \subset \Delta_{P_\emptyset}$ tel que $Q = P_\theta$. On écrit dans ce cas $\mathfrak{a}^Q$ au lieu de $\mathfrak{a}^\theta$. L'ensemble $(P_\emptyset)_Q := P_\emptyset \cap L_Q$ (resp. $(P_\emptyset)_Q^* := P_\emptyset \cap M_Q$) est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable minimal de L_Q (resp. M_Q) de σ -décomposition de Langlands $(P_\emptyset)_Q = M_\emptyset A_\emptyset N_{P_\emptyset}^Q$ (resp. $(P_\emptyset)_Q^* = M_\emptyset A_\emptyset^Q N_{P_\emptyset}^Q$), où $N_{P_\emptyset}^Q := N_{P_\emptyset} \cap M_Q$ et $A_\emptyset^Q := A_\emptyset \cap M_Q$. On notera $\Sigma_{P_\emptyset}^Q$ (resp. $\Delta_{P_\emptyset}^Q$) les éléments de $\Sigma_{P_\emptyset}$ (resp. $\Delta_{P_\emptyset}$) qui sont des poids de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_{P_\emptyset}^Q$ du groupe de Lie $N_{P_\emptyset}^Q$.

Si $Q \in \mathcal{P}(P_\emptyset)$, on note $\rho_{P_\emptyset \cap L_Q}$ la différentielle du caractère:

$$d_{P_\emptyset \cap L_Q}: x \mapsto |\det \text{Ad}(x)|_{\mathfrak{n}_{P_\emptyset}^Q}^{1/2}$$

de $L_\emptyset$, associé au sous-groupe parabolique $P_\emptyset \cap L_Q$ de L_Q (cf. (1.6)).

Soit $P \in \mathcal{P}_{st}$, on note $\mathfrak{a}_P^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_P$ pour B (si $P \in \mathcal{P}_{st}^{min}$ on écrira $\mathfrak{a}_P^G$ au lieu de $\mathfrak{a}_P^G$).

Pour toute la suite de ce travail, (τ, E) désignera une représentation unitaire de dimension finie de K sur un espace hilbertien.

Remarque 5. Soient F une fonction de classe C^∞ sur G/H , τ -sphérique, $\mathbb{D}(G/H)$ -propre et tempérée. D'après l'équivalence de notre définition de tempérance (Définition 2) avec celle de P. Delorme [D1, Définition 2] (cf.

Remarque 2), on voit, grâce à la Remarque 5 de [D1], que tout Δ -exposant ξ de $\Phi'_Q := d_Q^{-1} F|_{A_{\bar{P}_Q}}$ vérifie,

$$\operatorname{Re} \xi - \rho_{P_Q \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta)$$

puisque $\rho_{P_Q} = \rho_{P_Q \cap L_Q} + \rho_Q$.

En particulier, on a

$$\operatorname{Re} \xi|_{\mathfrak{a}_G} = 0, \quad \xi \in \mathcal{E}_\Delta^0(\Phi'_Q)$$

car la forme linéaire $\rho_{P_Q \cap L_Q}$ est nulle sur $\mathfrak{a}_G$ de même que tout élément de Δ .

Le lien entre les Δ -exposants directeurs de Φ'_Q et les éléments de l'ensemble $S_\Delta(\Phi'_Q)$ (cf. [Ca.M, Remarque 5.7]) implique immédiatement:

$$\operatorname{Re} v - \rho_{P_Q \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta), \quad v \in S_\Delta(\Phi'_Q)$$

et en particulier

$$\operatorname{Re} v|_{\mathfrak{a}_G} = 0, \quad v \in S_\Delta(\Phi'_Q).$$

LEMME 10. *Soit $\Theta \subset \Delta$. La restriction à $A_{\bar{P}_Q}$ d'une fonction F de classe C^∞ sur G/H , τ -sphérique et $\mathbb{D}(G/H)$ -propre, est de type $\mathcal{D}'_{\Delta, \Theta}$.*

Démonstration. Grâce aux résultats de van den Ban [B2, §5], l'énoncé est trivial pour la restriction, F_1 , de F à M_G/H . Par ailleurs, $\mathfrak{a}_G$ est contenu dans $\mathbb{D}(G/H)$, donc F se transforme sous A_G par un caractère. Ceci permet de passer aisément du développement de F_1 à celui de F , grâce à l'égalité $G = M_G A_G$. D'où le lemme. ■

Hypothèse 1. Dans toute la suite de ce travail, χ désignera un caractère de $\mathbb{D}(G/H)$ dont le paramètre d'Harish-Chandra est régulier par rapport aux racines d'un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, et tel que $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi) \neq \{0\}$.

Alors (cf. [C, Corollaire 2 de la Proposition 8]), on peut choisir, un sous espace de Cartan standard $\mathfrak{a}^d$ de $\mathfrak{s}^d$, une forme linéaire λ_0 de $(\mathfrak{a}_\Gamma^d)^*$, et une forme linéaire ν_0 de $\sqrt{-1}(\mathfrak{a}_s^d)^*$, tels que:

- (i) λ_0 est réel sur $(\mathfrak{a}_\Gamma^d)^*$ et régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_\Gamma^d$ dans le centralisateur de $\mathfrak{a}$ ($= \mathfrak{a}_s^d$) dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$;
- (ii) $\chi = \chi_{\lambda_0 + \nu_0}$ (via l'homomorphisme d'Harish-Chandra $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$).

Quitte à conjuguer $\mathfrak{a}^d$ par un élément de $N_K(\mathfrak{a}_Q)$, on peut même supposer qu'il existe $P \in \mathcal{P}_{st}$ avec $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$. Ce que nous ferons dans la suite.

On fixe une fois pour toute un choix d'un triplet (α^d, A_0, ν_0) comme ci-dessus. D'après [C, Lemme 2], la dimension de α ne dépend que de χ , ce qui justifie la définition ci-dessous.

DÉFINITION 4. On pose $i(\chi) := \dim \alpha$.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons fortement les résultats de Carmona (cf. [C]) concernant le terme constant d'un élément F de $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ le long d'un sous-groupe parabolique Q de G . Dans ce dernier, les développements sont donnés le long des chambres de Weyl positives. Pour adapter ces résultats à nos besoins, nous avons noté F_Q (au lieu de $F_{\bar{Q}}$ dans [C, Théorème 1]) le terme constant de F le long du sous-groupe parabolique de G , $\bar{Q}$, opposé à Q . Les modifications à apporter à ce changement de notation sont évidentes.

PROPOSITION 1. Soit $F \in \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$, et Q un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable de G contenant $P_{\emptyset}$. La restriction Φ_Q de F_Q à $A_{\bar{P}_{\emptyset}}$ admet un développement de type $\mathcal{D}_A$, tel que:

- (i) pour tout $\eta \in S_A(\Phi_Q)$ et tout $m \in M_A(\Phi_Q)$, tels que $(\Phi_Q)_{\eta, m}^A$ est non identiquement nulle, on a $m_{\alpha} = 0$, pour tout $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q$,
- (ii) pour tout $\eta \in S_A(\Phi_Q)$, $\operatorname{Re} \eta - \rho_{P_{\emptyset} \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q)$. En particulier, $\operatorname{Re} \eta|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$,
- (iii) les termes, $(\Phi_Q)_{\eta, m}^A$ ($\eta \in S_A(\Phi_Q)$, $m \in M_A(\Phi_Q)$), du développement de type $\mathcal{D}_A$ de Φ_Q ne dépendent pas des variables z_{α} , $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q$.

Démonstration. On dispose (cf. [C, Théorème 2]) d'une écriture de F_Q en somme finie de fonctions tempérées, $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ -propres et τ_Q -sphériques, où τ_Q est la restriction à $K \cap L_Q$ de τ . Alors, grâce au Lemme 5 suivi du Lemme 6, on peut remplacer F_Q par une fonction tempérée, $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ -propre et τ_Q -sphérique qu'on notera encore F_Q . La proposition est alors une conséquence du Lemme 10 et de la Remarque 5. En effet, on complète la base $\Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q$ de $(\mathfrak{a}^Q)^*$ en une base Δ_A^Q de $(\mathfrak{a}_{\emptyset})^*$, par des éléments nuls sur $\mathfrak{a}^Q$. Donc, si on remplace le couple (G, A) par $(L_Q, \Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q)$, le Lemme 10 s'applique à toute fonction définie sur $L_Q/L_Q \cap H$, tempérée, sphérique, et $\mathbb{D}(L_Q/L_Q \cap H)$ -propre. Ce qui montre que Φ_Q est de type $\mathcal{D}_{\Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q}$. D'autre part, le fait que les éléments de $\Delta_A^Q \setminus \Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q$ n'interviennent pas dans le développement de type $\mathcal{D}_A$ de Φ_Q , implique que ce dernier peut être regardé comme un développement de type $\mathcal{D}_A$ avec les propriétés (i) et (iii) ci-dessus. En remplaçant encore (G, A) par $(L_Q, \Delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^Q)$ dans la Remarque 5, et en prenant soin de noter que $\mathfrak{a}_Q$ est la composante $\sigma|_{L_Q}$ -déployée de L_Q , le point (ii) en résulte. Ceci achève la démonstration de la proposition. ■

COROLLAIRE 1. *Pour tout $\eta \in (\mathfrak{a}_\varnothing)_\mathbb{C}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^d$ tels que $C_{\eta, m}^d(\Phi_Q)$ est non nul, on a :*

- (i) $m_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_{\bar{P}_\varnothing}^Q$,
- (ii) $\operatorname{Re} \eta - \rho_{P_\varnothing \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta_{\bar{P}_\varnothing}^Q)$ et en particulier $\operatorname{Re} \eta|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$.

Démonstration. Grâce au lien qui existe (cf. [Ca.M, Remarque 5.7]) entre les éléments de $S_d(\Phi_Q)$ et les éléments η de $\mathcal{E}_d(\Phi_Q)$, le résultat se déduit immédiatement de la Proposition 1. ■

PROPOSITION 2. *Soient $F \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau, \chi)$, Q un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable de G contenant $P_\varnothing$, et Φ'_Q la restriction de $d_Q^{-1}F$ à $A_{\bar{P}_\varnothing}^-$. Pour tout $\eta \in (\mathfrak{a}_\varnothing)_\mathbb{C}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^d$ tels que $C_{\eta, m}^d(\Phi'_Q) \neq 0$ et $\operatorname{Re} \eta|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$, on a $m_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_{\bar{P}_\varnothing}^Q$.*

Démonstration. En utilisant la définition et les notations de [C, équation (30)], on peut écrire F_Q comme somme finie des fonctions, $p_\mu(\bar{Q} | d_Q^{-1}F)$, $\mu \in (\mathfrak{a}_Q)_\mathbb{C}^*$ avec $\operatorname{Re} \mu = 0$, lesquelles sont obtenues à partir du développement asymptotique de $d_Q^{-1}F$ le long de $\bar{Q}$. Par ailleurs, d'après [BS2, équations (89) et (93)] (le passage du cas des espaces symétriques semi-simples au cas des espaces symétriques réductifs est trivial (cf. e.g. preuve du Lemme 10)), on a :

$$p_\mu(\bar{Q} | d_Q^{-1}F, a, 0) = \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{a}_\varnothing)_\mathbb{C}^* \\ \xi|_{\mathfrak{a}_Q} = \mu}} p_\xi(\bar{P}_\varnothing | d_Q^{-1}F, e, \log a) a^\xi, \quad a \in A_{\bar{P}_\varnothing \cap L_Q}^-.$$

En outre, d'après ([C, point (ii) de la démonstration de la Proposition 4], voir aussi [BS2, fin du section 9]), il existe $d \in \mathbb{N}$, tel que pour chaque exposant, ξ , du développement asymptotique de $d_Q^{-1}F$ le long de $\bar{P}_\varnothing$, on a :

$$p_\xi(\bar{P}_\varnothing | d_Q^{-1}F, a, 0) = \sum_{|m| \leq d, m \in \mathbb{N}^d} C_{\eta, m}^d(\Phi'_Q) a^\xi \log^m \alpha_A(a), \quad a \in A_{\bar{P}_\varnothing}^-.$$

Noter que $\mathfrak{a}_G$ agit sur chacune des applications, $y \mapsto p_\xi(\bar{P}_\varnothing | d_Q^{-1}F, y)$, $y \in L_Q$ par un caractère. On peut donc remplacer dans la somme précédente A par Δ . Comme $A_{\bar{P}_\varnothing}^- \subset A_{\bar{P}_\varnothing \cap L_Q}^-$, on déduit de ce qui précède un deuxième développement de type $\mathcal{D}_\Delta$ de la restriction Φ_Q de F_Q à $A_{\bar{P}_\varnothing}^-$. Plus précisément, on a :

$$\Phi_Q(a) = \sum_{\substack{\xi \in (\mathfrak{a}_Q)_\mathbb{C}^*, m \in \mathbb{N}^d \\ \operatorname{Re} \xi|_{\mathfrak{a}_Q} = 0}} C_{\xi, m}^d(\Phi'_Q) a^\xi \log^m \alpha_\Delta(a), \quad a \in A_{\bar{P}_\varnothing}^-.$$

En tenant compte de l'unicité d'un tel développement, le résultat découle aussitôt du Corollaire 1 de la Proposition 1. ■

COROLLAIRE 1. Soient F et Q comme dans la Proposition 2. Notons Φ la restriction de $d_Q^{-1}F - F_Q$ à $A_{P_\emptyset}^-$. Alors:

- (i) pour tout $\xi \in (\mathfrak{a}_\emptyset)_\mathbb{C}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^d$ tels que $C_{\xi, m}^d(\Phi) \neq 0$, on a: $\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta)$
- (ii) pour tout $\xi \in (\mathfrak{a}_\emptyset)_\mathbb{C}^*$ vérifiant $\text{Re } \xi|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$, on a $C_{\xi, m}^d(\Phi) = 0$.

Démonstration. L'assertion (i) se déduit par application du Lemme 6 aux restrictions de $d_Q^{-1}F$ et F_Q à $A_{P_\emptyset}^-$, grâce aux résultats de la Remarque 5 et de la Proposition 1(ii).

Quant au point (ii), il résulte immédiatement de la démonstration de la Proposition 2. ■

Remarque 6. D'après [Ca.M, Remarque 5.7], le point (i) du Corollaire 1 de la Proposition 2 implique que,

$$\text{pour tout } \mu \in S_\Delta(\Phi), \quad \text{Re } \mu - \rho_{P_\emptyset \cap L_Q} \in \mathbb{R}^+(\Delta).$$

LEMME 11. Soit $F \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(G/H, \tau, \chi)$, et φ sa restriction à $A_{P_\emptyset}^-$. Si $\xi \in (\mathfrak{a}_\emptyset)_\mathbb{C}^*$ et $m \in \mathbb{N}^d$ sont tels que $C_{\xi, m}^d(\varphi) \neq 0$, alors pour tout $\alpha \in \Delta$ tel que $m_\alpha \neq 0$, on a $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})_\alpha > 0$.

Démonstration. Soient ξ et m comme dans l'énoncé du lemme. On note ω_α , $\alpha \in \Delta$, la base de $\mathfrak{a}_\emptyset$ duale de la base Δ de $(\mathfrak{a}_\emptyset)_\mathbb{C}^*$ et on pose $\Theta := \{\alpha \in \Delta \mid (\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})(\omega_\alpha) = 0\}$ et $Q := P_{\Delta \setminus \Theta}$. On remarque que $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})_\alpha = (\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})(\omega_\alpha)$, donc grâce à la définition de Θ , $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})_\alpha = 0$, pour tout $\alpha \in \Theta$. D'autre part, on a (cf. Remarque 5), $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})|_{\mathfrak{a}_G} = 0$, donc $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})(\omega_\alpha) = 0$, pour tout $\alpha \in \Delta \setminus \Delta$. Comme l'espace $\mathfrak{a}_Q$ est engendré par les vecteurs ω_α , $\alpha \in (\Delta \setminus \Delta) \cup \Theta$, on en déduit que,

$$(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})|_{\mathfrak{a}_Q} = 0.$$

Par ailleurs, avec les notations de la Proposition 2, $C_{\xi - \rho_Q, m}^d(\Phi'_Q)$ est égal à $C_{\xi, m}^d(\varphi)$, donc non nul d'après l'hypothèse faite sur ξ et m . En outre, $(\text{Re } \xi - \rho_Q)|_{\mathfrak{a}_Q}$ est égal à $(\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset})|_{\mathfrak{a}_Q}$, donc nul d'après ce qui précède. On applique le résultat de la Proposition 2 à $\xi - \rho_Q$ et m , et on conclut que,

$$m_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in \Theta = \Delta \setminus \Delta_Q^Q.$$

Ceci joint à la condition $\text{Re } \xi - \rho_{P_\emptyset} \in \mathbb{R}^+(\Delta)$ (cf. Remarque 5), permet d'achever la démonstration du lemme. ■

THÉOREME 2. *On rappelle que χ satisfait à l'Hypothèse 1.*

Soient $F \in \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ et Q un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable de G contenant $P_\emptyset$. Il existe, $\gamma > 0$, $c > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\|(d_Q^{-1}F - F_Q)(\exp(X))\| \leq c(1 + \|X^Q\|)^d e^{(\gamma\beta_Q + \rho_{P_\emptyset \cap L_Q})(X)}, \quad X \in \text{cl}(\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-)$$

où pour $X \in \mathfrak{a}_\emptyset$, on a noté X^Q sa projection orthogonale sur $\mathfrak{a}^Q$ et $\beta_Q(X) := \sup\{\alpha(X) \mid \alpha \in \Sigma_{P_\emptyset} \text{ avec } \alpha|_{\mathfrak{a}_Q} \neq 0\}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Les ensembles

$$\mathfrak{a}_\emptyset(\Theta, \varepsilon) := \{X \in \mathfrak{a}_\emptyset \mid \log \varepsilon \leq \alpha(X) \leq 0, \alpha \in \Theta \text{ et } \alpha(X) < \log \varepsilon, \alpha \in \Delta \setminus \Theta\}$$

$\Theta \subset \Delta$, forment un recouvrement de $\text{cl}(\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-)$. Donc, pour prouver le théorème, il suffit d'établir une majoration du type proposé sur chacun d'eux.

Soit $\Theta \subset \Delta$. Chacune des fonctions $\Phi'_Q := d_Q^{-1}F|_{\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-}$ et $\Phi_Q := F_Q|_{\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-}$ a un développement de type $\mathcal{D}_\Delta$ (cf. Lemme 10 et Proposition 1), et il en va de même pour leur différence $\Phi := \Phi'_Q - \Phi_Q$ (cf. Lemme 5). Ceci joint au Lemme 8, donne le développement de type $\mathcal{D}_{\Delta, \Theta}$ de Φ , que nous noterons:

$$\Phi(\exp X) = \sum_{\eta \in S, m \in M} \Phi_{\mu, m}^{\Delta, \Theta}(\alpha_\Delta(\exp X)) e^{\eta(X)} X^m, \quad X \in \mathfrak{a}_\emptyset^- \quad (3.7)$$

D'autre part, le Lemme 10 montre que Φ'_Q est de type $\mathcal{D}'_{\Delta, \Theta}$. Soit $\tilde{\Theta} := \Theta \cap \Delta_{P_\emptyset}^Q$. Le Lemme 10 appliqué à F_Q montre que Φ_Q est de type $\mathcal{D}'_{\Delta_{P_\emptyset \cap L_Q}, \tilde{\Theta}}$. Il est clair que ce développement est aussi celui de type $\mathcal{D}'_{\Delta, \Theta}$ de Φ_Q . Ceci assure, grâce au Lemme 5, l'existence du développement de type $\mathcal{D}'_{\Delta, \Theta}$ de Φ , lequel est le développement (3.7), d'après l'argument d'unicité (cf. Lemme 7). En particulier, les fonctions $\Phi_{\eta, m}^{\Delta, \Theta}$ ($\eta \in S, m \in M$) sont holomorphes sur un voisinage ouvert, $\Omega(\Theta)$, de $]0, 1]^\Theta \times D^{\Delta \setminus \Theta}$ dans $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times D^{\Delta \setminus \Theta}$. Par ailleurs, en tenant compte du fait que les ensembles $S = S_{\Delta, \Theta}(\Phi)$ et $M = M_{\Delta, \Theta}(\Phi)$ sont finis, on voit que pour établir la majoration désirée, il suffit de prouver pour chaque $\eta \in S$ et chaque $m \in M$, l'existence de $C > 0$, $\delta > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $X \in \mathfrak{a}_\emptyset(\Theta, \varepsilon)$, on ait:

$$\|\Phi_{\eta, m}^{\Delta, \Theta}(\alpha_\Delta(\exp X)) e^{\eta(X)} X^m\| \leq C(1 + \|X^Q\|)^d e^{(\delta\beta_Q + \rho_{P_\emptyset \cap L_Q})(X)}. \quad (3.8)$$

Fixons $\eta \in S$ et $m \in M$. On définit sur $\mathbb{N}^{\Delta \setminus \Theta}$ la relation d'ordre $\leq$ par, $k \leq k'$ si et seulement si $k' - k \in \mathbb{N}^{\Delta \setminus \Theta}$, et on pose

$$n := \inf\{k \mid C_{\eta + \nu_k, m}^{\Delta, \Theta}(\Phi) \neq 0, k \in \mathbb{N}^{\Delta \setminus \Theta}\}$$

où, rappelons le, $\nu_k = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus \Theta} k_\alpha \alpha$.

Cette définition de n conduit aisément, grâce au développement (3.1), à l'écriture:

$$\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(z) = z^n \tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}(z), \quad z \in \Omega(\Theta) \quad (3.9)$$

où $\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}$, est une fonction qui à les mêmes propriétés que $\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}$. Par ailleurs, comme $\eta \in \mathbb{C}(A \setminus \Theta)$, il est possible d'écrire $\eta = \eta_1 + \eta_2$ avec $\eta_1 \in \mathbb{C}(A \setminus (A_{P \emptyset}^Q \cup \Theta))$ et $\eta_2 \in \mathbb{C}((A \setminus A) \cup (A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta}))$. On pose:

$$(\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_{A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta}} := (\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_\alpha \alpha \quad \text{et}$$

$$(\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_{\tilde{\Theta}} := \sum_{\alpha \in \tilde{\Theta}} (\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_\alpha \alpha.$$

Alors, grâce à la Remarque 6 et au lien entre les éléments de $S(= S_{A, \Theta}(\Phi))$ et ceux de $S_A(\Phi)$ (cf. démonstration du Lemme 8), on a

$$\operatorname{Re} \eta - (\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_{A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta}} \in \mathbb{R}^+(A \setminus \Theta). \quad (3.10)$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \eta_1 &\in \mathbb{R}^+(A \setminus (A_{P \emptyset}^Q \cup \Theta)), \\ \operatorname{Re} \eta_2 - (\rho_{P \emptyset \cap L_Q})_{A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta}} &\in \mathbb{R}^+((A \setminus A) \cup (A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta})). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Quant à m , on écrit $m = m_1 + m_2$ avec $m_1 \in \mathbb{N}^{A \setminus (A_{P \emptyset}^Q \cup \Theta)}$ et $m_2 \in \mathbb{N}^{(A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta})}$. Ceci joint à (3.9) implique, que pour tout $X \in \mathfrak{a}_{\emptyset}(\Theta, \varepsilon)$, le terme

$$\|\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(\exp X)) e^{\eta(X)} X^m\| \quad (3.12)$$

est égal à

$$\|\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(\exp X))\| |X^{m_1}| |X^{m_2}| e^{(\operatorname{Re} \eta_1 + v_n)(X)} e^{(\operatorname{Re} \eta_2 - \rho_{P \emptyset \cap L_Q})(X)} e^{\rho_{P \emptyset \cap L_Q}(X)}$$

Notons que,

$$\alpha(X) = \alpha(X^Q), \quad \alpha \in A_{P \emptyset}^Q.$$

Donc

$$|\alpha(X)| \leq \|\alpha\| \|X^Q\|, \quad \alpha \in A_{P \emptyset}^Q.$$

En outre,

$$X^{m_2} = \prod_{\alpha \in A_{P \emptyset}^Q \setminus \tilde{\Theta}} (\alpha(X))^{m_\alpha}.$$

D'où l'on déduit l'existence de $C_0 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, tels que

$$|X^{m_2}| \leq C_0(1 + \|X^Q\|)^d.$$

D'autre part, d'après (3.11) on a, $(\operatorname{Re} \eta_2 - (\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q})_{A_{P_{\varnothing}}^Q} \bar{\theta})(X) \leq 0$, pour tout $X \in \operatorname{cl}(\mathfrak{a}_{P_{\varnothing}}^-)$, et en particulier pour tout $X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}(\Theta, \varepsilon)$. En outre, $-(\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q}) \bar{\theta}$ est bornée sur $\mathfrak{a}_{\varnothing}(\Theta, \varepsilon)$ et $\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q} = (\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q}) \bar{\theta} + (\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q})_{A_{P_{\varnothing}}^Q} \bar{\theta}$. D'où l'on déduit l'existence d'une constante C_1 telle que,

$$|e^{(\operatorname{Re} \eta_2 - \rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q})(X)}| \leq C_1, \quad X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}(\Theta, \varepsilon). \quad (3.13)$$

Il en résulte que pour $X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}(\Theta, \varepsilon)$, le terme $\|\Phi_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(\exp X)) e^{\eta(X)} X^m\|$ se majore, grâce à l'égalité (3.12), par:

$$C_0 C_1 (1 + \|X^Q\|)^d \|\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(\exp X))\| |X^{m_1}| e^{(\operatorname{Re} \eta_1 + \nu_n)(X)} e^{\rho_{P_{\varnothing} \cap L_Q}(X)}. \quad (3.14)$$

Cela dit, prouver l'estimation (3.8) revient donc à montrer l'existence de $C > 0$ et $\delta > 0$, tels que pour tout $X \in \mathfrak{a}_{\varnothing}(\Theta, \varepsilon)$, on a

$$\|\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}(\alpha_A(\exp X))\| |X^{m_1}| e^{(\operatorname{Re} \eta_1 + \nu_n)(X)} \leq C e^{\delta \beta_Q(X)}. \quad (3.15)$$

Pour cela nous allons traiter séparément les cas suivants:

- (i) $\operatorname{Re} \eta_1 = 0$ et $m_1 = 0$.
- (ii) $\operatorname{Re} \eta_1 \neq 0$ et $m_1 = 0$.
- (iii) $m_1 \neq 0$.

— (i) On suppose que $\operatorname{Re} \eta_1 = 0$ et $m_1 = 0$.

Par application du Lemme 9 et puis du Corollaire 1(ii) de la Proposition 2, on a:

$$C_{\xi, m}^{A, \Theta}(\Phi) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \xi|_{\mathfrak{a}_Q} \neq 0, \quad \xi \in \zeta_{A, \Theta}(\Phi), \quad m \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}. \quad (3.16)$$

Mais l'hypothèse $\operatorname{Re} \eta_1 = 0$, signifie que $\operatorname{Re} \eta|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$. Donc (3.16) implique que si $k \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$ est tel que $C_{\eta + \nu_k, m}^{A, \Theta}(\Phi) \neq 0$, il existe $\alpha \in A \setminus (A_{P_{\varnothing}}^Q \cup \Theta)$ vérifiant $k_{\alpha} \neq 0$. Alors, en tenant compte de la définition de $\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}$ (cf. (3.9)), et par regroupement des termes dans la série convergente (3.1), il est possible d'écrire:

$$\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta} = \sum_{\alpha \in A \setminus (A_{P_{\varnothing}}^Q \cup \Theta)} z_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\eta, m, \alpha}^{A, \Theta}$$

où pour $\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta)$, z_α est la projection de $\mathbb{C}^A$ sur $\mathbb{C}^{\{\alpha\}}$, et $\tilde{\Phi}_{\eta, m, \alpha}^{A, \Theta}$ des fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert, $V(\Phi)$, de $]0, 1]^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ dans $(\mathbb{C}^*)^\Theta \times D^{A \setminus \Theta}$ (cf. Remarque 4). Comme l'ensemble $\underline{\alpha}_A(\alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon))$ est inclus dans la partie compacte $[\varepsilon, 1]^\Theta \times [0, \varepsilon]^{A \setminus \Theta}$ de $V(\Phi)$, les fonctions $\tilde{\Phi}_{\eta, m, \alpha}^{A, \Theta} \circ \underline{\alpha}_A$ sont donc bornées sur $\alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon)$. De plus, on a :

$$|z_\alpha(\underline{\alpha}_A(\exp X))| \leq e^{\beta_Q(X)}, \quad \alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta) \quad X \in cl(\alpha_{P_\varnothing}^-).$$

D'où l'on déduit l'existence d'une constante $C_2 > 0$, tel que

$$\|\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta}(\underline{\alpha}_A(\exp X))\| \leq C_2 e^{\beta_Q(X)}, \quad X \in \alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon). \quad (3.17)$$

Par ailleurs, $n \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$, donc l'application, $X \mapsto e^{v_n(X)}$, est bornée sur $\alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon)$. Comme $\text{Re } \eta_1 = 0$ et $m_1 = 0$, ceci joint à (3.17) conduit aisément à la majoration (3.15).

— (ii) On suppose que $\text{Re } \eta_1 \neq 0$ et $m_1 = 0$.

L'hypothèse $\text{Re } \eta_1 \neq 0$ et la relation (3.11) impliquent que :

$$\begin{aligned} \text{Re } \eta_1 &= \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta)} \eta_\alpha \alpha \quad \text{avec } \eta_\alpha \geq 0 \quad \text{et} \\ \delta' &:= \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta)} \eta_\alpha > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|e^{\eta_1(X)}| \leq e^{\delta' \beta_Q(X)}, \quad X \in \alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon). \quad (3.18)$$

En outre, $\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta} \circ \underline{\alpha}_A$ est bornée sur $\alpha_\varnothing(\Theta, \varepsilon)$ de même que l'application, $X \mapsto e^{v_n(X)}$ (voir ci-dessus). D'où (3.15), puisque $m_1 = 0$.

— (iii) On suppose que $m_1 \neq 0$.

Si $k \in \mathbb{N}^{A \setminus \Theta}$ est tel que $C_{\eta + v_k, m}^{A, \Theta}(\Phi) \neq 0$, par application du Lemme 9, et puis du Lemme 11, on a :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } \alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta) \quad \text{tel que } m_\alpha (= (m_1)_\alpha) \neq 0, \\ (\text{Re } \eta + v_k - \rho_{P_\varnothing \cap L_Q})_\alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Avec les notations précédentes et en tenant compte de la définition de η_1 et de (3.11), l'assertion (3.19) se traduit par :

pour tout $\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{P_\varnothing}^Q \cup \Theta)$, on a soit $(m_1)_\alpha = 0$, soit $(\text{Re } \eta_1 + v_k)_\alpha > 0$.

Tenant compte de la définition de n , cela implique que soit $(m_1)_\alpha = 0$, soit $(\operatorname{Re} \eta_1 + v_n)_\alpha > 0$. On en déduit aisément l'existence de $C_3 > 0$, tel que

$$|X^{m_1}| e^{(1/2)(\operatorname{Re} \eta_1 + v_n)(X)} \leq C_3, \quad X \in \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}^-(\Theta, \varepsilon). \quad (3.20)$$

De plus, l'hypothèse $m_1 \neq 0$ implique que $\operatorname{Re} \eta_1 + v_n \neq 0$. Donc, si on écrit $\eta_1 = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{\mathcal{P}/\mathcal{Q}}^0 \cup \Theta)} \eta_\alpha \alpha$, on a $\delta' := \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (\Delta_{\mathcal{P}/\mathcal{Q}}^0 \cup \Theta)} \eta_\alpha + n_\alpha > 0$. Par conséquent,

$$|e^{(1/2)(\operatorname{Re} \eta_1 + v_n)(X)}| \leq e^{(1/2) \delta' \beta_{\mathcal{Q}}(X)}, \quad X \in \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}(\Theta, \varepsilon). \quad (3.21)$$

Comme $\tilde{\Phi}_{\eta, m}^{A, \Theta} \circ \underline{\alpha}_A$ est bornée sur $\mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}(\Theta, \varepsilon)$, l'estimation (3.15) est une conséquence immédiate de (3.20) et (3.21).

Le Théorème 2 est donc prouvé. ■

4. DÉTERMINATION DU PRODUIT SCALAIRE SUR L'ESPACE $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \tau, \chi)$

Soit (α^d, A_0, v_0) comme au paragraphe 3.2. On fixe $P \in \mathcal{P}_{st}$ avec $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}$. On note L le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}$ ($= \alpha^d \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$), $L = MA$ sa σ -décomposition de Langlands et $\mathfrak{a}_L^G$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}$ pour la forme B (cf. §1). Pour alléger les notations, on pose $r_0 := i(\chi)$ ($= \dim \mathfrak{a}$), $p_0 = \dim \mathfrak{a}_L^G$, $l = \dim \mathfrak{a}_G^G$ et $l_0 = \dim \mathfrak{a}_G$.

Soit $L_Q = M_Q A_Q$ la σ -décomposition de Langlands de la composante de Levi L_Q d'un sous-groupe parabolique Q de G , $\sigma\theta$ -stable et contenant $L_{\mathcal{Q}}$. On dira que Q est σ -cuspidal si, et seulement si, $M_Q/M_{\mathcal{Q}} \cap H$ admet une série discrète. On note $\mathcal{P}_{cusp}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ formé d'éléments σ -cuspidaux de ce dernier, $\mathcal{P}^{r_0}$ l'ensemble des éléments Q de $\mathcal{P}$ vérifiant $\dim \mathfrak{a}_Q = r_0$, $\mathcal{P}_{cusp}^{r_0} := \mathcal{P}_{cusp} \cap \mathcal{P}^{r_0}$, $\mathcal{P}_{st, cusp} := \mathcal{P}_{cusp} \cap \mathcal{P}_{st}$, et $\mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0} := \mathcal{P}_{st, cusp} \cap \mathcal{P}^{r_0}$. On remarque que $P \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}$.

Soit $Q \in \mathcal{P}_{st}$. On note $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}$ induites par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_C$. Il résulte de [C, Proposition 8 et Théorème 2(a)] que:

Si $F \in \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ et $Q \in \mathcal{P}$, on a $F_Q = 0$ si $\dim \mathfrak{a}_Q > r_0$. De plus, si $F_Q \neq 0$ et $\dim \mathfrak{a}_Q = r_0$, alors $Q \in \mathcal{P}_{cusp}^{r_0}$ et $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \neq \emptyset$. Et en particulier, Q et P sont σ -associés, c'est à dire que $\mathfrak{a}_Q$ et $\mathfrak{a}$ sont conjugués par un élément de K . (4.1)

Pour tout $Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}$, on choisit un sous-espace, noté $\mathfrak{a}_{M_Q}^d$, abélien maximal de $i(\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{q})$ contenu dans $i(\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$. Alors $\mathfrak{a}_Q^d := \mathfrak{a}_{M_Q}^d + \mathfrak{a}_Q$ est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$. D'après [D2, Lemme 2(iv)], pour

tout $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, il existe un élément $k_s \in K^d$, tel que $Ad(k_s)$ induit une bijection $\tilde{s}$ de $\mathfrak{a}^d$ sur $\mathfrak{a}^d$ telle que:

$$\begin{aligned} \tilde{s} \text{ induit } s \text{ sur } \mathfrak{a}_Q, \\ \tilde{s}(\mathfrak{a}_Q) = \mathfrak{a}, \\ \tilde{s}(\mathfrak{a}_{M_Q}^d) = \mathfrak{a}_1^d. \end{aligned} \quad (4.2)$$

On pose $A^s := A_0 \circ \tilde{s}|_{(\mathfrak{a}_{M_Q}^d)}$ et $v^s := v_0 \circ s$.

Soit $P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}$. On garde les notations du paragraphe 3, et on pose $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, et $\Delta \setminus \Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{l_0}\}$, où les λ_i , $i = 1, \dots, l_0$, sont des éléments de $(\mathfrak{a}_\varnothing)^*$ nuls sur $\mathfrak{a}_\varnothing^G$. On note $Y_1, \dots, Y_l$ la base de $\mathfrak{a}_\varnothing^G$ duale de Δ , et $Z_1, \dots, Z_{l_0}$ la base de $\mathfrak{a}_G$ duale de $\Delta \setminus \Delta$. On suppose en outre que $Z_1, \dots, Z_{l_0}$ est orthonormée par rapport au produit scalaire induit par B sur $\mathfrak{a}_G$. Pour chaque $i = 1, \dots, l$, on associe le vecteur H_i de $\mathfrak{a}_\varnothing$, définit par:

$$(H, H_i) = \alpha_i(H), \quad H \in \mathfrak{a}_\varnothing.$$

Soit $\Theta \subset \Delta$ avec $\text{Card}(\Theta) = l - p_0$. On pose $Q = P_\Theta$. Quitte à modifier l'ordre des indices dans Δ , on peut poser $\Theta = \{\alpha_{p_0+1}, \dots, \alpha_l\}$. On pose $\mathfrak{a}_Q^G := \mathfrak{a}_Q \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Avec les notations précédentes on a:

$$\mathfrak{a}_Q^G = \sum_{i=1}^{p_0} \mathbb{R} Y_i, \quad \mathfrak{a}^Q = \sum_{i=p_0+1}^l \mathbb{R} H_i, \quad \mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_Q^G \oplus \mathfrak{a}_G. \quad (4.3)$$

Si $i \in \{p_0+1, \dots, l\}$, on note T_i la projection orthogonale de Y_i sur $\mathfrak{a}^Q$ parallèlement à $\mathfrak{a}_Q$. La famille $(T_i)_{i=p_0+1, \dots, l}$ forme évidemment une base de $\mathfrak{a}^Q$ duale de la base $(\alpha_i|_{\mathfrak{a}^Q})_{i=p_0+1, \dots, l}$. De plus, on a l'écriture:

$$Y_i = T_i + \sum_{j=1}^{p_0} a_{j,i} Y_j, \quad i = p_0+1, \dots, l \quad (4.4)$$

où les $a_{j,i}$ sont des constantes.

On a la décomposition orthogonale:

$$\mathfrak{a}_\varnothing = \mathfrak{a}_Q^G \oplus \mathfrak{a}^Q \oplus \mathfrak{a}_G. \quad (4.5)$$

Pour $X \in \mathfrak{a}_\varnothing$, on écrit $X = Y + T + Z$, avec $Y \in \mathfrak{a}_Q^G$, $T \in \mathfrak{a}^Q$, $Z \in \mathfrak{a}_G$. Alors on a:

$$\int_{\mathfrak{a}_\varnothing} \phi(X) dX = \int_{\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}^Q \times \mathfrak{a}_G} \phi(Y + T + Z) dY dT dZ, \quad \phi \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_\varnothing) \quad (4.6)$$

où dY , dT et dZ sont respectivement les mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{a}_Q^G$, $\mathfrak{a}^Q$ et $\mathfrak{a}_G$ définies au paragraphe 1 (voir après l'équation (1.7)).

Par ailleurs, si $P_{\varnothing}(\in \mathcal{P}_{st}^{min})$ est contenu dans Q , alors $P_{\varnothing} \cap M_Q$ est un sous-groupe parabolique standard minimal de M_Q . Cette correspondance est bijective. Alors (cf. (1.9) pour $M_Q/M_Q \cap H$), on peut définir une mesure dm sur $M_Q/M_Q \cap H$, M_Q -invariante à gauche et telle que:

$$\begin{aligned} & \int_{M_Q/M_Q \cap H} f(m) dm \\ &= \sum_{\substack{P_{\varnothing} \in \mathcal{P}_{st}^{min} \\ P_{\varnothing} \subset Q}} \int_{K \cap M_Q} \int_{cl(\mathfrak{a}_Q)_{\overline{P_{\varnothing} \cap M_Q}}} D_{P_{\varnothing} \cap M_Q}(T) f(k \exp(T) M_Q \cap H) dk dT \end{aligned} \quad (4.7)$$

pour tout $f \in C_c(M_Q/M_Q \cap H)$. Ici la mesure sur $K \cap M_Q$ a été choisie de masse totale 1.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme L^2 sur $L^2(M_Q/M_Q \cap H, dm)$. Soit maintenant $F \in \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ et $Q \in \mathcal{P}^{r_0}$. Alors, d'après [C, Théorème 2], on a:

$$F_Q = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} F_{Q,s} \quad (4.8)$$

où $(F_{Q,s})_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})}$ est une famille de fonctions de $\mathcal{A}_{temp}(L_Q/L_Q \cap H, \tau_Q)$, τ_Q étant la restriction de τ à $L_Q \cap K$. En raison de la dimension de $\mathfrak{a}_Q$, pour tout $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, la restriction de $F_{Q,s}$ à $M_Q/M_Q \cap H$ (notée encore $F_{Q,s}$), qui est un élément de $\mathcal{A}_{temp}(M_Q/M_Q \cap H, \tau|_{M_Q \cap K}, \lambda^s)$, est de carré intégrable (cf. [C, Corollaire 1 de la Proposition 6]). De plus,

$$F_{Q,s}(m \exp(X)) = F_{Q,s}(m) e^{v^s(X)}, \quad m \in L_Q, \quad X \in \mathfrak{a}_Q. \quad (4.9)$$

Si Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable de G on note

$$C(Q) = \int_{\mathfrak{a}_Q^-} e^{-\|X\|} dX. \quad (4.10)$$

On notera $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \chi)_{(K)}$ l'espace formé des fonctions K -finies à gauche, tempérées sur G/H sur lesquelles $\mathbb{D}(G/H)$ agit par χ .

Avec les notations précédentes, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3. *On suppose que χ satisfait à l'Hypothèse 1.*

Pour tout élément F de $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$ ou de $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \chi)_{(K)}$,

$$\|F\|_{2,r}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}} C(Q) \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} \|F_{Q,s}\|_2^2.$$

D'après (2.2) et la relation entre le terme constant d'une fonction K -finie et le terme constant de la fonction τ -sphérique associée, on voit qu'il suffit

de prouver le théorème pour F τ -sphérique. On suppose donc F τ -sphérique dans la suite.

Nous allons commencer par citer et démontrer certains résultats utiles pour la démonstration du théorème.

Notons $\mathfrak{G}_l$ le groupe symétrique d'ordre l . Pour chaque élément $t \in \mathfrak{G}_l$ on associe les sous-ensembles ouverts de $\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-$,

$$\mathcal{O}_t^G := \left\{ Y = \sum_{i=1}^l y_i Y_i, \left| y_{t(1)} < \dots < y_{t(l)} < 0 \right. \right\}$$

et

$$\mathcal{O}_t := \{ Y + Z \mid Y \in \mathcal{O}_t^G, Z \in \mathfrak{a}_G \}.$$

On notera parfois $\mathcal{O}_{P_\emptyset, t}^G$ (resp. $\mathcal{O}_{P_\emptyset, t}$) au lieu de $\mathcal{O}_t^G$ (resp. $\mathcal{O}_t$) si on veut garder la trace de la dépendance par rapport à $P_\emptyset$.

La famille des $\mathcal{O}_t$, $t \in \mathfrak{G}_l$, forme, à un ensemble de mesure nulle près, une partition de $\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-$. (4.11)

LEMME 12. Soient $t \in \mathfrak{G}_l$, $\Theta_t := \{\alpha_{t(p_0+1)}, \dots, \alpha_{t(l)}\}$, et $Q_t := P_{\Theta_t}$. Pour tout $F \in \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$, on a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{r_0} \int_{\mathcal{O}_t} \|(d_{Q_t}^{-1} F - F_{Q_t})(\exp X)\|^2 d_{Q_t}^2(X) D_{P_\emptyset}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dX = 0.$$

Démonstration. Quitte à modifier l'ordre des indices dans Δ , on peut supposer que t est l'identité de $\mathfrak{G}_l$. On supprime alors cet indice dans les notations précédentes. Soit X un élément de $\mathcal{O}$. On écrit $X = Y + Z$, $Y \in \mathcal{O}^G$, $Z \in \mathfrak{a}_G$, avec $Y = \sum_{i=1}^l y_i Y_i$ et $Z = \sum_{i=1}^{l_0} z_i Z_i$. Soit T la projection orthogonale de X sur $\mathfrak{a}^Q$ parallèlement à $\mathfrak{a}_Q$, on a $T = \sum_{i=p_0+1}^l y_i T_i$. D'après le Théorème 2, il existe, $\gamma > 0$, $c > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $X \in \mathcal{O} (\subset \mathfrak{a}_\emptyset^-)$, on a:

$$\|(d_Q^{-1} F - F_Q)(\exp(X))\| \leq c(1 + \|T\|)^d \mathbf{e}^{(\gamma\beta_Q + \rho_{P_\emptyset \cap L_Q})(X)}. \quad (4.12)$$

Par ailleurs, $\|T\| = \|\sum_{i=p_0+1}^l y_i T_i\|$ se majore, à un facteur multiplicatif près, par $\sum_{i=p_0+1}^l |y_i|$, puisque $\mathfrak{a}^Q$ est de dimension finie. En outre, d'après la définition de l'ensemble $\mathcal{O}$ on a,

$$|y_i| \leq |y_{p_0}|, \quad i = p_0 + 1, \dots, l.$$

D'où l'on déduit l'existence d'une constante positive c' telle que pour tout $X \in \mathcal{O}$ et T comme ci-dessus on ait:

$$(1 + \|T\|)^d \leq c'(1 + |y_{p_0}|)^d. \quad (4.13)$$

Comme $\mathfrak{a}_{\mathcal{O}}$ est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes. Ceci assure l'existence d'une constante δ_1 telle que,

$$\begin{aligned} \|X\| &\geq \delta_1 \left(\sum_{i=1}^l |y_i| + \sum_{i=1}^{l_0} |z_i| \right) \\ &\geq \delta_1 \left(|y_{p_0}| + \sum_{i=1}^{p_0-1} |y_i| + \sum_{i=1}^{l_0} |z_i| \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Enfin, le terme $|(d_{\mathcal{Q}}^2 D_{P_{\mathcal{O}}})(X)| e^{2\rho_{P_{\mathcal{O}}} \cap L_{\mathcal{Q}}(X)}$ se majore par une constante indépendamment de $X \in \mathcal{O}$, puisque $\mathcal{O} \subset \mathfrak{a}_{P_{\mathcal{O}}}^-$. On remarque que $\beta_{\mathcal{Q}}(X) = y_{p_0}$. Ceci joint aux inégalités (4.12), (4.13), et (4.14), implique l'existence de $C > 0$, $\delta_1 > 0$, $\gamma > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $X := \sum_{i=1}^l y_i Y_i + \sum_{i=1}^{l_0} z_i Z_i \in \mathcal{O}$, on a:

$$\begin{aligned} \|(d_{\mathcal{Q}}^{-1} F - F_{\mathcal{Q}})(\exp(X))\|^2 |(d_{\mathcal{Q}}^2 D_{P_{\mathcal{O}}})(X)| e^{-\varepsilon \|X\|} &\leq \Psi_{\varepsilon}(X) \\ \text{où } \Psi_{\varepsilon}(X) &:= C(1 - y_{p_0})^{2d} e^{(2\gamma + \varepsilon \delta_1) y_{p_0}} e^{\varepsilon \delta_1 (\sum_{i=1}^{p_0-1} y_i - \sum_{i=1}^{l_0} |z_i|)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

On intègre sur l'ensemble $\mathcal{O}$ les deux membres de l'inégalité (4.15), puis on majore l'intégrale de Ψ_{ε} en l'intégrant sur l'ensemble:

$$\mathcal{O}' := \left\{ \sum_{i=1}^l y_i Y_i + \sum_{i=1}^{l_0} z_i Z_i \left| y_{p_0} < y_i < 0, i = p_0 + 1, \dots, l; y_i \in \mathbb{R}^-, z_i \in \mathbb{R} \right. \right\}$$

qui contient $\mathcal{O}$. On intègre d'abord par rapport aux variables z_i , $i = 1, 2, \dots, l_0$, et y_i , pour $i \neq p_0$, en remarquant que lorsque $X = \sum_{i=1}^l y_i Y_i + \sum_{i=1}^{l_0} z_i Z_i$ est élément de $\mathcal{O}'$, on a $y_{p_0} < y_i < 0$, $i = p_0 + 1, \dots, l$. Puis, en tenant compte de la constante d'intégration, C' , qui est due au passage de l'écriture d'un vecteur de $\mathfrak{a}_{\mathcal{O}}$ dans une base orthonormée à son écriture dans la base $Y_1, \dots, Y_l, Z_1, \dots, Z_{l_0}$, on obtient:

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon} &:= \int_{\mathcal{O}'} \Psi_{\varepsilon}(X) dX \\ &= C' C \frac{2^{l_0}}{(\varepsilon \delta_1)^{l_0 + p_0 - 1}} \int_{-\infty}^0 (1 - y_{p_0})^{2d} (-y_{p_0})^{l - p_0} e^{(2\gamma + \delta_1 \varepsilon) y_{p_0}} dy_{p_0}. \end{aligned}$$

Comme $r_0 = l_0 + p_0$ et $\gamma > 0$, de l'égalité ci-dessus on voit clairement que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{r_0} I_{\varepsilon} = 0$. D'où le lemme. ■

LEMME 13. Soit $Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}$ contenant $P_\emptyset$, $\mathfrak{G}_{l, Q} := \{t \in \mathfrak{G}_l \mid Q = P_{\theta_t}\}$ (noté aussi $\mathfrak{G}_{l, Q}^P$). Avec l'hypothèse et les notations du Lemme 12, on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{t \in \mathfrak{G}_{l, Q}} \varepsilon^{r_0} \int_{\mathcal{O}_t} \|F_Q(X)\|^2 d_Q^2(X) D_{P_\emptyset}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dX \\ &= C(Q) \sum_{\substack{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \\ \nu^s = \nu^{s'}}} \int_{(\mathfrak{a}^Q)_{P_\emptyset \cap M_Q}^-} (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T) dT \end{aligned}$$

où $C(Q)$ est défini dans (4.10).

Démonstration. On retient les notations précédentes. Pour tout élément t de $\mathfrak{G}_{l, Q}$, on associe les ensembles :

$$\begin{aligned} \Omega_t &:= \left\{ \sum_{i=p_0+1}^l t_i T_{t(i)} \mid t_{p_0+1} < \dots < t_l < 0 \right\} \subset \mathfrak{a}^Q \\ \Omega_t^G &:= \left\{ \sum_{i=1}^{p_0} y_i Y_{t(i)} \mid y_1 < \dots < y_{p_0} < 0 \right\} \subset \mathfrak{a}_Q^G. \end{aligned}$$

Les ensembles $\Omega_t \times \Omega_t^G \times \mathfrak{a}_G$, $t \in \mathfrak{G}_{l, Q}$, forment, à un ensemble de mesure nulle près, une partition de $(\mathfrak{a}^Q)_{P_\emptyset \cap M_Q}^- \times (\mathfrak{a}_Q^G)^- \times \mathfrak{a}_G$. Donc, au vu de la définition de $C(Q)$ (cf. 4.10), pour démontrer le lemme il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{r_0} \int_{\mathcal{O}_t} \|F_Q(X)\|^2 d_Q^2(X) D_{P_\emptyset}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dX \\ &= c_t \sum_{\substack{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \\ \nu^s = \nu^{s'}}} \int_{\Omega_t} (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T) dT \end{aligned} \quad (4.16)$$

où $c_t := \int_{\Omega_t^G \times \mathfrak{a}_G} e^{-\|Y+Z\|} dY dZ$.

Grâce à la décomposition (4.8) on se ramène à l'étude des intégrales :

$$I_{\varepsilon, t}^{s, s'} := \int_{\mathcal{O}_t} \varepsilon^{r_0} \phi_\varepsilon^{s, s'}(X) dX \quad (4.17)$$

où $s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ et où $\phi_\varepsilon^{s, s'}$ est la fonction définie sur $\mathcal{O}_t$ par :

$$\phi_\varepsilon^{s, s'}(X) = (F_{Q, s}(\exp X), F_{Q, s'}(\exp X))(d_Q^2 D_{P_\emptyset})(X) e^{-\varepsilon \|X\|}.$$

Clairement, il suffit de traiter uniquement le cas où t est égal à l'identité. Pour simplifier les écritures des formules, on omet dans ce cas l'indice inférieur t . Nous allons commencer par montrer que chacune des fonctions

$\phi_\varepsilon^{s, s'}$, $s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$, est intégrable sur $\mathcal{O}$, et nous intéresserons à la limite quand ε tend vers 0 de chacun des termes $I_\varepsilon^{s, s'}$.

On définit la fonction $J_{P_\emptyset}^Q$ sur $\mathfrak{a}_\emptyset$ par:

$$J_{P_\emptyset}^Q(X) := \prod_{\alpha \in \Sigma_Q} |e^{2\alpha(X)} - 1|^{p_\alpha} |e^{2\alpha(X)} + 1|^{q_\alpha}, \quad X \in \mathfrak{a}_\emptyset. \quad (4.18)$$

Comme $\mathcal{O}$ est contenu dans $\mathfrak{a}_{P_\emptyset}^-$, il existe $C_1 > 0$, tel que:

$$J_{P_\emptyset}^Q(X) \leq C_1, \quad X \in \mathcal{O}. \quad (4.19)$$

De plus, si $X = Y + T + Z \in \mathcal{O}$, avec $Y \in \mathfrak{a}_Q^G$, $T \in \mathfrak{a}^Q$ et $Z \in \mathfrak{a}_G$ (cf. (4.5)), on a:

$$(d_Q^2 D_{P_\emptyset})(X) = J_{P_\emptyset}^Q(X) D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T). \quad (4.20)$$

Mais comme la décomposition (4.5) est orthogonale on a aussi:

$$\|Y + T + Z\| \geq \frac{1}{2} (\|Y\| + \|Z\|). \quad (4.21)$$

Alors, par application de la formule intégrale (4.6) à $\|\phi_\varepsilon^{s, s'}\|$ sur $(\mathfrak{a}^Q)_{P_\emptyset \cap M_Q}^- \times \mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$ qui contient $\mathcal{O}$, on déduit, grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz, que l'intégrale du module de $\phi_\varepsilon^{s, s'}$ sur $\mathcal{O}$ est majorée par:

$$\begin{aligned} & C_1 \int_{(\mathfrak{a}^Q)_{P_\emptyset \cap M_Q}^-} \|F_{Q, s}(\exp T)\|^2 D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T) dT \Big)^{1/2} \\ & \times \left(\int_{(\mathfrak{a}^Q)_{P_\emptyset \cap M_Q}^-} \|F_{Q, s'}(\exp T)\|^2 D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T) dT \right)^{1/2} \\ & \times \int_{\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G} e^{-(1/2) \varepsilon (\|Y\| + \|Z\|)} dY dZ. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Comme chacune des restrictions des fonctions $F_{Q, s}$, $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ à $M_Q/M_Q \cap H$ est de carré intégrable sur $M_Q/M_Q \cap H$, l'inégalité (4.22) et la formule intégrale (4.7) pour l'espace symétrique $M_Q/M_Q \cap H$ impliquent que l'application $\phi_\varepsilon^{s, s'}$ est intégrable sur $\mathcal{O}$. On lui applique alors le Théorème de Fubini et la formule intégrale (4.6), on trouve:

$$I_\varepsilon^{s, s'} = \varepsilon^{r_0} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G} \phi_\varepsilon^{s, s'}(Y + T + Z) dY dZ \right) dT$$

où $\Omega_Q^G(T) := \{Y \in \mathfrak{a}_Q^G \mid Y + T \in \mathcal{O}^G\}$, $T \in \Omega$. Puis, par application du théorème de changement de variables à la transformation de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans lui même

qui à un élément $Y + T + Z$ fait correspondre l'élément $\varepsilon^{-1}Y + T + \varepsilon^{-1}Z$, on a

$$I_{\varepsilon}^{s, s'} = \int_{\Omega} \left(\int_{\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G} \phi_{\varepsilon}^{s, s'}(\varepsilon^{-1}Y + T + \varepsilon^{-1}Z) dY dZ \right) dT. \quad (4.23)$$

On est ramené à l'étude de la fonction $\varphi_{\varepsilon}^{s, s'}$ qui est définie sur Ω par:

$$\varphi_{\varepsilon}^{s, s'}(T) := \int_{\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G} \phi_{\varepsilon}^{s, s'}(\varepsilon^{-1}Y + T + \varepsilon^{-1}Z) dY dZ. \quad (4.24)$$

Posons $\mu := v^s - v^{s'}$. Alors, grâce à la propriété (4.9) des fonctions $F_{Q, s}$, $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ et à la relation (4.20), on a:

$$\begin{aligned} \varphi_{\varepsilon}^{s, s'}(T) &= (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_{\varnothing} \cap M_Q}(T) \\ &\quad \times \int_{\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G} J_{P_{\varnothing}}^Q(\varepsilon^{-1}Y + T) e^{\mu(\varepsilon^{-1}Y + \varepsilon^{-1}Z)} e^{-\|Y + \varepsilon T + Z\|} dY dZ. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Comme l'ensemble $\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G$ est contenu dans $\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$, et μ est imaginaire pure sur $\mathfrak{a}_Q$, ceci joint à (4.19) et à (4.21), conduit aisément à l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} |\varphi_{\varepsilon}^{s, s'}(T)| &\leq C_1 \|F_{Q, s}(\exp T)\| \|F_{Q, s'}(\exp T)\| \\ &\quad \times D_{P_{\varnothing} \cap M_Q}(T) \int_{\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G} e^{-(1/2)\|Y + Z\|} dY dZ \end{aligned} \quad (4.26)$$

dont le deuxième membre ne dépend pas de ε , et est une fonction de T intégrable sur Ω , d'après ce qui précède. D'autre part, un élément $Y = \sum_{i=1}^{p_0} y_i Y_i$ de $\mathfrak{a}_Q^G$ appartient à $\varepsilon \Omega_Q^G(T)$ si et seulement si $\varepsilon^{-1}Y + T$ appartient à $\mathcal{O}^G$. Ecrivant $T = \sum_{j=p_0+1}^l t_j T_j$, alors la relation (4.4) permet d'exprimer $\varepsilon^{-1}Y + T$ dans la base $Y_1, \dots, Y_l$ et on trouve que $Y \in \Omega_Q^G(T)$ si, et seulement si:

$$y_1 - \varepsilon \sum_{j=p_0+1}^l a_{1,j} t_j < \dots < y_{p_0} - \varepsilon \sum_{j=p_0+1}^l a_{p_0,j} t_j < \varepsilon t_{p_0+1} < \dots < \varepsilon t_l < 0. \quad (4.27)$$

On note $1_{\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G}$ la fonction caractéristique de $\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$. Pour étudier la limite de $\varphi_{\varepsilon}^{s, s'}$ lorsque ε tend vers 0^+ , nous nous intéresserons aux fonctions, $g_{\varepsilon, T}$, $\varepsilon > 0$, définies sur $\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$ par:

$$g_{\varepsilon, T}(Y, Z) := 1_{\varepsilon \Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G}(Y, Z) J_{P_{\varnothing}}^Q(\varepsilon^{-1}Y + T) e^{-\|Y + \varepsilon T + Z\|} e^{\mu(\varepsilon^{-1}Y + \varepsilon^{-1}Z)}$$

Comme $\|Y + \varepsilon T + Z\| \geq \|Y + Z\|$, et $\|1_{\varepsilon\Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G}(Y, Z) J_{P_\emptyset}^Q(\varepsilon^{-1}Y + T)\|$ est majorée par une constante positive C_1 (cf. (4.19)), on a :

$$|g_{\varepsilon, T}(Y, Z)| \leq C_1 e^{-\|Y+Z\|}, \quad Y \in \mathfrak{a}_Q^G, \quad Z \in \mathfrak{a}_G.$$

Montrons que lorsque ε tend vers 0^+ , la famille de fonctions indicatrices de l'ensemble $\varepsilon\Omega_Q^G(T) \times \mathfrak{a}_G$ converge presque partout vers l'indicatrice de $\Omega^G \times \mathfrak{a}_G$. En effet, si $(Y, Z) \in \Omega^G \times \mathfrak{a}_G$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que (4.27) soit satisfaite pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Réciproquement, si (Y, Z) n'appartient pas à $\bar{\Omega}^G \times \mathfrak{a}_G$, où $\bar{\Omega}^G$ est l'adhérence de Ω^G dans $\mathfrak{a}_Q^G$, il existe $\varepsilon'_0 > 0$ tel que, pour tout ε vérifiant $0 < \varepsilon < \varepsilon'_0$, la relation (4.27) ne soit pas vérifiée. D'où le résultat.

Etudions d'abord le cas où $v^s = v^{s'}$, i.e. μ est nulle.

Comme,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{P_\emptyset}^Q(\varepsilon^{-1}Y + T) = 1, \quad Y \in \mathfrak{a}_Q^G \setminus \{0\}, \quad T \in \mathfrak{a}^Q$$

il résulte de ce qui précède que, pour tout $(Y, Z) \in (\mathfrak{a}_Q^G \setminus \{\partial\Omega^G\}) \times \mathfrak{a}_G$, où $\partial\Omega^G$ est la frontière de Ω^G dans $\mathfrak{a}_Q^G$, qui est de mesure nulle, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} g_{\varepsilon, T}(Y, Z) = 1_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} e^{-\|Y+Z\|}.$$

D'où l'on déduit, par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la famille de fonctions $(g_{\varepsilon, T})_{\varepsilon > 0}$, que la limite notée c de $\int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} g_{\varepsilon, T}(Y, Z) dY dZ$ lorsque ε tend vers 0^+ , existe et vérifie :

$$c = \int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} e^{-\|Y+Z\|} dY dZ. \quad (4.28)$$

Ainsi, grâce à (4.25), on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon^{s, s'}(T) = c(F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T). \quad (4.29)$$

Cela joint à (4.26), permet d'appliquer une nouvelle fois le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la famille de fonctions $(\varphi_\varepsilon^{s, s'})_{\varepsilon > 0}$ et de conclure que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon^{s, s'}(T) = c \int_{\Omega} (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_\emptyset \cap M_Q}(T) dT$$

ou encore, grâce à (4.23), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon}^{s, s'} = c \int_{\Omega} (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_{\emptyset \cap M_Q}}(T) dT. \quad (4.30)$$

Traitons maintenant le cas $v^s \neq v^{s'}$, i.e. $\mu \in i(\mathfrak{a}_Q)^ \setminus \{0\}$.*

Pour tout $(Y, Z) \in \mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$ on pose:

$$\tilde{g}_{\varepsilon, T}(Y, Z) := 1_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G}(Y, Z) e^{\mu(\varepsilon^{-1}Y + \varepsilon^{-1}Z)} e^{-\|Y+Z\|}$$

et

$$g'_{\varepsilon, T} := g_{\varepsilon, T} - \tilde{g}_{\varepsilon, T}.$$

Comme μ est imaginaire pure sur $\mathfrak{a}_Q$, $e^{\mu(\varepsilon^{-1}Y + \varepsilon^{-1}Z)}$ est de module égal à 1, et il résulte de la discussion sur les indicatrices et des majorations qui la précède que, pour tout $(Y, Z) \in (\mathfrak{a}_Q^G \setminus \{\partial\Omega^G\}) \times \mathfrak{a}_G$,

$$|g'_{\varepsilon, T}(Y, Z)| \leq (C_1 + 1) e^{-\|Y+Z\|}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g'_{\varepsilon, T}(Y, Z) = 0.$$

Alors par application du théorème de la convergence dominée à la famille de fonction $(g'_{\varepsilon, T})_{\varepsilon > 0}$, on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} g'_{\varepsilon, T}(Y, Z) dY dZ = 0. \quad (4.31)$$

Par ailleurs, l'intégrale $\int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} e^{\mu(\varepsilon^{-1}Y + \varepsilon^{-1}Z)} e^{-\|Y+Z\|} dY dZ$ apparaît comme l'évaluation de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur $\mathfrak{a}_Q^G \times \mathfrak{a}_G$ au point $\varepsilon^{-1}\mu$. Alors, par application du lemme de Riemann–Lebesgue, on a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} \tilde{g}_{\varepsilon, T}(Y, Z) dY dZ = 0. \quad (4.32)$$

On déduit de (4.31) et (4.32), que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^G \times \mathfrak{a}_G} g_{\varepsilon, T}(Y, Z) dY dZ = 0.$$

De manière analogue au résultat (4.30), on établit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon}^{s, s'} = 0. \quad (4.33)$$

Rappelons que grâce à la décomposition (4.8) on a (cf. 4.17):

$$\varepsilon^{r_0} \int_{\mathcal{O}} \|F_Q(X)\|^2 d_Q^2(X) D_{P_\varnothing}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dX = \sum_{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} I_\varepsilon^{s, s'}.$$

Alors (4.16) se déduit de (4.30) et (4.33). D'où le lemme. ■

Démonstration du Théorème 3. Pour étudier l'intégrale $I_\varepsilon = \int_{G/H} \|F(x)\|^2 e^{-\varepsilon \varpi(x)} dx$, on utilise la formule intégrale (1.9), puis (4.11) qui permet d'écrire pour chaque $P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}$, la chambre de Weyl négative $\alpha_{P_\varnothing}^-$, comme réunion disjointe (à un ensemble de mesure nulle près) d'ouverts $\mathcal{O}_{P_\varnothing, t}$, $t \in \mathfrak{G}_l$. On est ramené à étudier une somme d'intégrales sur les ensembles $\mathcal{O}_{P_\varnothing, t}$, $t \in \mathfrak{G}_l$, $P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}$. Ensuite, pour chaque $Q \in \mathcal{P}_{st}^{r_0}$, on regroupe toutes les intégrales sur les ensembles $\mathcal{O}_{P_\varnothing, t}$ où $P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}$, $P_\varnothing \subset Q$, et $t \in \mathfrak{G}_{l, Q}^{P_\varnothing}$, et on écrit:

$$d_Q^{-1} F = (d_Q^{-1} F - F_Q) + F_Q.$$

Posons $\mathcal{P}_Q := \{(P_\varnothing, t) \mid P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min}, P_\varnothing \subset Q \text{ et } t \in \mathfrak{G}_{l, Q}^{P_\varnothing}\}$. Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble $\mathcal{P}_{st}^{min} \times \mathfrak{G}_l$ est une réunion disjointe des ensembles $\mathcal{P}_Q$, $Q \in \mathcal{P}_{st}^{r_0}$. I_ε s'écrit donc comme somme sur $Q \in \mathcal{P}_{st}^{r_0}$ et sur $(P_\varnothing, t) \in \mathcal{P}_Q$ d'intégrales sur $\mathcal{O}_{P_\varnothing, t}$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, joint au Lemme 12 et à (4.1), on voit que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{r_0} I_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{r_0} \sum_{Q \in \mathcal{P}_{st}^{r_0}, \text{ cusp}} \sum_{(P_\varnothing, t) \in \mathcal{P}_Q} \int_{\mathcal{O}_{P_\varnothing, t}} \|F_Q(X)\|^2 d_Q^2(X) \\ &\quad \times D_{P_\varnothing}(X) e^{-\varepsilon \|X\|} dX. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 13 la limite du membre de droite existe est égale à:

$$\sum_{Q \in \mathcal{P}_{st}^{r_0}, \text{ cusp}} C(Q) \sum_{\substack{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \\ \nu^s = \nu^{s'}} \mathcal{J}(Q)$$

où

$$\mathcal{J}(Q) := \sum_{\substack{P_\varnothing \in \mathcal{P}_{st}^{min} \\ P_\varnothing \subset Q}} \int_{(\alpha_Q)^-_{P_\varnothing \cap M_Q}} (F_{Q, s}(\exp T), F_{Q, s'}(\exp T)) D_{P_\varnothing \cap M_Q}(T) dT. \quad (4.34)$$

D'autre part, grâce à la formule intégrale (4.7), on a:

$$\mathcal{J}(Q) = \int_{M_Q/M_Q \cap H} (F_{Q, s}(m), F_{Q, s'}(m)) dm.$$

On déduit de ce qui précède que:

$$\|F\|_{2,r_0}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}} C(Q) \sum_{\substack{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}) \\ v^s = v^{s'}} \int_{M_Q/M_Q \cap H} (F_{Q,s}(m), F_{Q,s'}(m)) dm. \quad (4.35)$$

Pour achever la démonstration du théorème, il nous reste à prouver le lemme suivant:

LEMME 14. *Soit $Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{r_0}$, s et s' deux éléments distincts de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ et vérifiant $v^s = v^{s'}$. On a*

$$\int_{M_Q/M_Q \cap H} (F_{Q,s}(m), F_{Q,s'}(m)) dm = 0.$$

Démonstration. Il résulte de [D2, (5.11), Lemme 5(ii) et preuve de (iii)], que pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que $F_{Q,s}$ et $F_{Q,s'}$ n'ont pas la même valeur propre sous $\mathbb{D}(M_Q/M_Q \cap H)$. Avec les notations (4.2), l'hypothèse du lemme signifie que,

$$v_0 \circ s = v_0 \circ s'.$$

Supposons que $F_{Q,s}$ et $F_{Q,s'}$ ont la même valeur propre sous $\mathbb{D}(M_Q/M_Q \cap H)$. Avec les notations du début de ce paragraphe, cela implique qu'on peut choisir un élément w du groupe de Weyl $W(\mathfrak{a}_{M_Q}^d, (\mathfrak{m}_Q)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^d)$ (contenu dans $W(\mathfrak{a}_Q^d, \mathfrak{g}^d)$) tel que,

$$w(A_0 \circ \tilde{s})|_{\mathfrak{a}_{M_Q}^d} = A_0 \circ \tilde{s}'|_{\mathfrak{a}_{M_Q}^d}.$$

Comme w est trivial sur $\mathfrak{a}_Q$, grâce aux propriétés des éléments $\tilde{s}$ et $\tilde{s}'$ (cf. (4.2)), et à notre hypothèse $v_0 \circ s = v_0 \circ s'$, on a aussi

$$w(v_0 \circ \tilde{s})|_{\mathfrak{a}_Q} = v_0 \circ \tilde{s}'|_{\mathfrak{a}_Q}.$$

Il en résulte que,

$$w((A_0 + v_0) \circ \tilde{s}) = (A_0 + v_0) \circ \tilde{s}'. \quad (4.36)$$

Mais comme $A_0 + v_0$ est régulier part rapport aux racines de $\mathfrak{a}_Q^d$ dans $\mathfrak{g}^d$, l'égalité (4.36) implique que $\tilde{s} \circ w^{-1} \circ (\tilde{s}')^{-1}$ est triviale sur $\mathfrak{a}^d$. Mais w est trivial sur $\mathfrak{a}_Q$, donc

$$\tilde{s}|_{\mathfrak{a}_Q} = \tilde{s}'|_{\mathfrak{a}_Q}.$$

Soit encore,

$$s = s'.$$

Ce qui contredit notre hypothèse $s \neq s'$. Le lemme en résulte. Cela termine la démonstration du Théorème 3. ■

THÉORÈME 4. *Toujours en supposant l'hypothèse 1 satisfaite, on a:*

(i) $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$ est une norme sur $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \tau, \chi)$ (resp. $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)$) dérivant d'un produit scalaire.

(ii) Si $r < i(\chi)$, $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$ et $\mathcal{H}_r(G/H, \chi)$ sont réduits à zéro.

(iii) Si $r \geq i(\chi)$, on a:

$$\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi) = \mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi) \text{ et } \mathcal{H}_r(G/H, \chi)_{(K)} = \mathcal{A}_{temp}(G/H, \chi)_{(K)}.$$

De plus, si $r > i(\chi)$, $\| \cdot \|_{2, r}$ est nulle sur ces espaces.

Démonstration. Soit F un élément non nul de $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \tau, \chi)$. F appartient à $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$, d'après le Théorème 1. Alors, il existe (cf. [C, Proposition 8 et Lemme 2]) un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable Q de G , minimal parmi les sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G vérifiant:

$$F_Q \neq 0, \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{a}_Q = i(\chi).$$

D'autre part, si $k \in K \cap H$, le terme constant de F le long de $\bar{Q}^k := k\bar{Q}k^{-1}$ est non nul. En effet:

$$F_Q(kmk^{-1}) = \tau(k) F_Q(m), \quad m \in M_Q/M_Q \cap H. \quad (4.37)$$

Donc, quitte à conjuguer par un élément de $N_{K \cap H}(\mathfrak{a}_Q)$, on peut supposer Q standard. Alors, d'après (4.1), $Q \in \mathcal{P}_{st, cusp}^{i(\chi)}$, de plus (cf. (4.9)), il existe $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ tel que $F_{Q, s}$ soit non nul. On déduit du Théorème 3 que $\|F\|_{2, i(\chi)}$ est non nul. Donc $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$ est bien une norme sur $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \tau, \chi)$ dérivant d'un produit scalaire.

Le lien entre fonction τ -sphérique et fonction K -finie (cf. 2.2), montre que $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$ est aussi une norme sur $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)_{(K)}$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)$ avec $\|f\|_{2, i(\chi)} = 0$. Alors, d'après le Lemme 2(i) joint à ce qui précède, on a:

$$\chi_\delta * f = 0, \quad \text{pour tout } \delta \in \hat{K}.$$

Donc $f = 0$ (cf. Lemme 2(ii)). Ceci montre que $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$ est une norme sur $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)$. D'autre part, grâce aux propriétés de $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$ sur $\mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \chi)_{(K)}$

et encore au Lemme 2, on voit que cette norme dérive d'un produit scalaire. Ceci achève de prouver (i).

Montrons (ii). En tenant compte du Lemme 2 et de (2.2), on voit qu'il suffit de prouver que tout élément F de $\mathcal{H}_r(G/H, \tau, \chi)$ est nul si $r < i(\chi)$. D'après le Théorème 1, un tel élément F appartient à $\mathcal{A}_{temp}(G/H, \tau, \chi)$. Donc, $F \in \mathcal{H}_{i(\chi)}(G/H, \tau, \chi)$ (cf. Théorème 3 et après l'équation (4.7)). Cela implique, grâce à (i), que F est nulle si $\|F\|_{2, i(\chi)}$ est nulle. Il résulte de la comparaison de $\|F\|_{2, r}$ et $\|F\|_{2, i(\chi)}$, que si F est non nulle, $\|F\|_{2, r}$ est infini. On en déduit que F est nulle. D'où (ii).

Pour montrer (iii), il suffit d'utiliser le Théorème 1, le Théorème 3, et la comparaison entre $\| \cdot \|_{2, r}$ et $\| \cdot \|_{2, i(\chi)}$. ■

5. APPLICATION AUX INTÉGRALES D'EISENSTEIN

On appelle σ -sous-groupe de Levi de G , toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable contenant $L_\emptyset$. Si L est un σ -sous-groupe de Levi de G , on note $\mathcal{P}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$ -stables de G dont la composante de Levi est égale à L , et $\mathcal{P}_{st}(L) := \mathcal{P}_{st} \cap \mathcal{P}(L)$.

Soit L un σ -sous-groupe de Levi de G et MA sa σ -décomposition Langlands.

Hypothèse (a). On suppose que $M/M \cap H$ admet une série discrète, et on choisit un sous-espace, noté α_M^d , abélien maximal de $i(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q})$ contenu dans $i(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{f} \cap \mathfrak{q})$. On suppose aussi que $\mathcal{P}_{st}(L)$ est non vide.

On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\alpha_\emptyset)$ de $\alpha_\emptyset$ dans K par son centralisateur. Soit $W_\emptyset^H$ (resp. $W_\emptyset^M$) l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ admettant un représentant dans l'intersection de H (resp. M) avec $N_K(\alpha_\emptyset)$. On fixe dans $N_K(\alpha_\emptyset)$ un ensemble, $\mathcal{W}_M$ (noté aussi $\mathcal{W}_L$), de représentants des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$ -double-classes. C'est, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable Q de G de sous groupe de Levi L , un ensemble de représentants des (H, Q) -double-classes ouvertes de G (cf. e.g. [CD1, Lemme 3]).

Pour w élément de $N_K(\alpha_\emptyset)$, on définit l'involution σ_w de G par:

$$\sigma_w(g) := w^{-1} \sigma(wgw^{-1}) w, \quad g \in G.$$

Le quadruplet $(G, \sigma_w, \theta, w^{-1}Hw)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G, σ, θ, H) et on lui applique les notations déjà introduites pour de tels quadruplets.

Soit (τ, V_τ) une représentation unitaire de dimension finie de K dans un espace hilbertien. On note τ_M la restriction de τ à $K_M := K \cap M$. On définit:

$$\mathcal{A}_2(M, \tau) := \bigoplus_{w \in \mathcal{W}_M} \mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M) \quad (5.1)$$

où $\mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$ est l'espace des fonctions C^∞ , τ_M -sphériques sur $M/M \cap w^{-1}Hw$, qui sont de carré intégrable et $\mathbb{D}(G/H)$ -finies. Ces espaces sont de dimension finie (cf. [D2, Proposition 1]).

On définit maintenant les intégrales d'Eisenstein comme dans [D3, §3.1]. Plus précisément, soit P un élément de $\mathcal{P}(L)$, et ν un élément du dual complexe $(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, tel que $\operatorname{Re}(\nu - \rho_P)$ soit strictement dominant pour les racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$. A tout élément $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathcal{W}_M}$ de $\mathcal{A}_2(M, \tau)$ on associe la fonction Ψ_ν définie pour $x \in G/H$ par:

$$\Psi_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w \in \mathcal{W}_M} Pw^{-1}H \\ a^{-\nu + \rho_P} \psi_w(m) & \text{si } x = namw^{-1}H, \quad n \in N_P, \\ & a \in A, \quad m \in M, \quad w \in \mathcal{W}_M. \end{cases}$$

L'intégrale d'Eisenstein $E(P, \psi, \nu)$ est définie pour $x \in G/H$ par:

$$E(P, \psi, \nu)(x) := \int_K \tau(k^{-1}) \Psi_\nu(kx) dk. \quad (5.2)$$

Cette intégrale converge et définit une fonction de classe C^∞ , τ -sphérique et $\mathbb{D}(G/H)$ -finie. De plus l'application, $\nu \mapsto E(P, \psi, \nu)$, admet un prolongement méromorphe à $(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [CD2, §3.1]).

Hypothèse (b). On suppose que ψ est élément non nul de $\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)$ (c'est à dire que ses composantes dans $\mathcal{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$, $w \neq 1$, sont nulles), et $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ -propre pour une valeur propre λ de $(\mathfrak{a}_M^d)^*$.

Sous ces hypothèses, $E(P, \psi, \nu)$, lorsqu'elle est définie, est $\mathbb{D}(G/H)$ -propre pour la valeur propre $\lambda - \nu$ du dual complexe de l'espace de Cartan standard $\mathfrak{a}^d := \mathfrak{a}_M^d + \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{s}^d$ (cf. [D3, équation (3.31)]).

On remarque que λ est réel et régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}_M^d$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$. Donc, si ν est un élément de $i\mathfrak{a}^*$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, $\lambda + \nu$ est régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Hypothèse (c). On suppose de plus que $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, que $\lambda - \nu$ est régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et que $E(P, \psi, \nu)$ est bien définie.

Soit (δ, V_δ) une représentation unitaire irréductible de M . On note $(V_\delta^{-\infty})_{disc}^{M \cap H}$ l'espace des vecteurs distributions, $\eta \in V_\delta^{-\infty}$, qui sont $M \cap H$ -invariants de carré intégrable, i.e. tels que les coefficients, $m(M \cap H) \mapsto \langle \delta'(m) \eta, v \rangle$, $v \in V_\delta^\infty$, soient de carré intégrable sur $M/M \cap H$. On note $C^\infty(K, \delta, \tau)$ l'espace des invariants sous $K \times K_M$ de $C^\infty(K) \otimes V_\delta^\infty \otimes V_\tau$, où K agit sur le premier facteur par représentation régulière gauche, trivialement sur le deuxième, et par la représentation τ sur le troisième, et où K_M agit par représentation régulière droite sur le premier facteur, naturellement

sur le deuxième, et trivialement sur le troisième (cf. [CD2, équation (2.5)]. On note $\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)^\delta$ l'espace engendré par les fonctions $\psi_{f \otimes \eta}$, $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$, $\eta \in (V_\delta^{-\infty})_{disc}^{M \cap H}$, définies pour $m \in M$ par:

$$\psi_{f \otimes \eta}(mM \cap H) := \langle \delta'(m) \eta, f(e) \rangle \quad (\in V_\tau).$$

Hypothèse (d). On suppose en outre que ψ est élément de $\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)^\delta$.

Comme ψ est élément de $\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)^\delta$, $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ -propre pour la valeur propre λ de $(i\alpha_M^d)^*$, ψ est dans l'espace engendré par les éléments $\psi_{f \otimes \eta}$ avec $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta \in (V_\delta^{-\infty})_{disc}^{M \cap H}$, $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ -propre pour la même valeur propre λ .

On note $\mu_P(\delta, \nu)$ le facteur de Plancherel défini dans [CD2, après l'équation (3.8)].

THÉORÈME 5. *Avec l'ensemble des hypothèses ci-dessus, on a:*

$$\|E(P, \psi, \nu)\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = C \mu_P(\delta, \nu)^{-1} \|\psi\|_2^2$$

où $C := \int_{\mathfrak{a}} e^{-\|X\|} dX$.

Pour démontrer le théorème nous aurons besoin du résultat suivant:

LEMME 15. *Soit $P_1, P_2, \dots, P_n$ un ensemble de représentants dans $\mathcal{P}_{st}(L)$ des classes de conjugaisons d'éléments de $\mathcal{P}(L)$. Alors,*

(i) *L'ensemble des éléments réguliers par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}^{reg}$, est égal à la réunion disjointe des ensembles $w(\mathfrak{a}_{\bar{P}_i})$, $w \in W(\mathfrak{a})$ ($:= W(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$), $i = 1, \dots, n$.*

(ii) *On retient la notation (4.10). On a:*

$$\sum_{i=1}^n C(P_i) = (\text{Card}(W(\mathfrak{a})))^{-1} \int_{\mathfrak{a}} e^{-\|X\|} dX.$$

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{a}^{reg}$. On peut choisir $Q \in \mathcal{P}(L)$ tel que $X \in \mathfrak{a}_{\bar{Q}}$. En effet, il suffit de poser $\mathfrak{n}_Q := \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}), \alpha(X) < 0} \mathfrak{g}^\alpha$. Alors Q est conjugué à l'un de P_i par un élément de G . D'après [D2, Lemme 2(i)], Q et P_i sont conjugués par un élément k de K , lequel normalise $\mathfrak{a}$ et induit donc un élément de $W(\mathfrak{a})$ qui conjugue $\mathfrak{a}_{\bar{Q}}$ et $\mathfrak{a}_{\bar{P}_i}$ (car la forme bilinéaire B est $\text{Ad}(G)$ -invariante).

Ceci prouve que $\mathfrak{a}^{reg}$ est égal à la réunion annoncée. Il reste à voir que celle-ci est disjointe. Soit $X \in w(\mathfrak{a}_{\bar{P}_i}) \cap w'(\mathfrak{a}_{\bar{P}_j})$, où w, w' sont des éléments de $W(\mathfrak{a})$ admettant respectivement k, k' comme représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_{\emptyset})$. Alors, $Q := kP_i k^{-1}$ et $Q' := k'P_j k'^{-1}$ vérifient (voir ci-dessus), $X \in \mathfrak{a}_{\bar{Q}} \cap \mathfrak{a}_{\bar{Q'}}$,

donc $Q = Q'$. Par suite $i = j$, donc $k^{-1}k'$ normalise P_i . Alors $k^{-1}k' \in K \cap P_i = K \cap M$. On en déduit que $w = w'$ comme désiré. Ceci achève de prouver (i).

En tenant compte de (i), pour démontrer (ii), il suffit de remarquer que le complémentaire de $\mathfrak{a}^{\text{reg}}$ dans $\mathfrak{a}$ est de mesure nulle, que les éléments de $W(\mathfrak{a})$ sont des isométries, et que la fonction à intégrer est invariante par les isométries. ■

Démonstration du Théorème 5. On pose $F = E(P, \psi, \nu)$.

On choisit un sous-groupe parabolique minimal de $G^{\sigma\theta}$ contenu dans $\bar{P}$, définissant une notion auxiliaire de sous-groupe parabolique $\sigma\theta$ -stable standard pour appliquer le Théorème 3.

Alors, on a :

$$\|F\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = \sum_{Q \in \mathcal{P}_{st, \text{cusp}}^{\dim \mathfrak{a}}} C(Q) \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})} \|F_{\bar{Q}, s}\|_2^2. \quad (5.3)$$

Comme $F_{\bar{Q}}$ est nulle chaque fois que Q n'est pas σ -associé à P ou n'est pas σ -cuspidal (cf. (4.2)), la somme ci-dessus peut être vue comme la somme, sur tous les éléments Q de $\mathcal{P}_{st}$ qui sont σ -associés à P ($\in \mathcal{P}(L)$), des sommes sur les $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a})$ de $C(Q) \|F_{\bar{Q}, s}\|_2^2$. Il en résulte, que chacun des sous-groupes paraboliques Q qui intervient est conjugué à un élément de $\mathcal{P}(L)$. Donc, avec les notations du lemme précédent, chacun des Q ($\in \mathcal{P}_{st}$) qui intervient dans le calcul de la somme précédente est conjugué à un unique élément P_i de $\mathcal{P}_{st}(L)$. Par ailleurs, on sait (cf. [D2, Lemme 10(iii)]) que dans chaque $(W_{\varnothing}^H, W_{\varnothing}^M)$ -double-classe w dans $W_{\varnothing}$, il existe un unique élément $w_{P_i} \in W_{\varnothing}/W_{\varnothing}^M$ tel que $P^{w_{P_i}}$ soit standard. De plus, si on note $\mathcal{W}_{P_i}$ le sous ensemble de $W_{\varnothing}/W_{\varnothing}^M$ formé par les w_{P_i} lorsque w décrit $W_0^H \backslash W_{\varnothing}/W_{\varnothing}^M$, pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'application qui à x élément de $\mathcal{W}_{P_i}$ associe $xP_i x^{-1}$ est une bijection entre $\mathcal{W}_{P_i}$ et l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_{st}$ qui sont conjugués à P_i , et on a :

$$C(xP_i x^{-1}) = C(P_i).$$

Il en résulte que (5.3) s'écrit aussi :

$$\|F\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = \sum_{i=1}^n C(P_i) \sum_{w \in \mathcal{W}_{P_i}} \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_{P_i^w}, \mathfrak{a})} \|F_{\overline{P_i^w}, s}\|_2^2. \quad (5.4)$$

Mais l'image de $\mathcal{W}_M$ dans $W_{\varnothing}/W_{\varnothing}^M$ est, comme $\mathcal{W}_{P_i}$, un ensemble de représentants des $(W_{\varnothing}^H, W_{\varnothing}^M)$ -doubles-classes dans $W_{\varnothing}$. Par ailleurs, si $k \in K \cap H$, on

a déjà comparé les termes constants $F_{\overline{P_i^w}}$ et $F_{\overline{P_i^{kw}}}$ de F respectivement le long des sous-groupes paraboliques P_i^w et $P_i^{kw} = (P_i^w)^k$ (cf. (4.37)). Ceci permet de remplacer dans l'égalité (5.4), chacun des ensembles $\mathcal{W}_{P_i}$, $i = 1, \dots, n$, par $\mathcal{W}_M$. D'où l'on déduit que:

$$\|F\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = \sum_{i=1}^n C(P_i) \sum_{w \in \mathcal{W}_M} \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_{P_i^w}, \mathfrak{a})} \|F_{\overline{P_i^w}, s}\|_2^2.$$

Mais, pour $w \in \mathcal{W}_M$, on a $w^{-1} \in W(\mathfrak{a}_{P_i^w}, \mathfrak{a})$ et $W(\mathfrak{a}_{P_i^w}, \mathfrak{a}) = \{sw^{-1} \mid s \in W(\mathfrak{a})\}$. Donc,

$$\|F\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = \sum_{i=1}^n C(P_i) \sum_{w \in \mathcal{W}_M} \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} \|F_{\overline{P_i^w}, sw^{-1}}\|_2^2.$$

Mais, d'après la définition des fonctions C (cf. [CD2, Théorème 1]), on a:

$$\sum_{w \in \mathcal{W}_m} \|F_{\overline{P_i^w}, sw^{-1}}\|_2^2 = \|C_{P_i|P}(s, v) \psi\|_2^2.$$

Mais d'après les relations de Maass Selberg (cf. [CD2, Théorème 2(i)]),

$$\|C_{P_i|P}(s, v) \psi\|_2 = \|C_{P|P}(1, v) \psi\|_2.$$

En outre, si on note $C_{P|P}(1, v)^*$ l'opérateur adjoint de $C_{P|P}(1, v)$, alors d'après [D3, après l'équation (3.14)], l'opérateur $C_{P|P}(1, v) C_{P|P}(1, v)^*$ se diagonalise est égal sur $\mathcal{A}_2(M/M \cap H, \tau_M)^\delta$ à l'homothétie de rapport $\mu_P(\delta, v)^{-1}$. Donc,

$$\|C_{P|P}(1, v) \psi\|_2^2 = \mu_P(\delta, v)^{-1} \|\psi\|_2^2.$$

Finalement:

$$\|F\|_{2, \dim \mathfrak{a}}^2 = \mu_P(\delta, v)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n C(P_i) \right) \text{Card}(W(\mathfrak{a})) \|\psi\|_2^2. \quad (5.5)$$

Le théorème s'en déduit grâce au Lemme 15(ii). ■

Le σ -sous-groupe de Levi $L = MA$ étant fixé (voir début de ce paragraphe), soit P un élément de $\mathcal{P}(L)$, (δ, V_δ) un élément du dual unitaire de M , et v un élément de $(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*$. On note $(\pi_{\delta, v}^P, I_{\delta, v}^P)$ la série principale généralisée correspondante. Ici $I_{\delta, v}^P$ est l'espace des fonctions C^∞ , $\varphi: G \rightarrow V_\delta^\infty$ vérifiant $\varphi(gman) = \delta(m^{-1}) a^{-v-\rho_P} \varphi(g)$, $g \in G$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P$, et le groupe G agit par représentation régulière gauche. La restriction des fonctions à K induit un isomorphisme de $I_{\delta, v}^P$ sur l'espace noté $C^\infty(K, \delta)$, ou I_δ , des fonctions C^∞ ,

$\varphi: K \rightarrow V_{\delta}^{\infty}$ vérifiant $\varphi(km) = \delta(m^{-1}) \varphi(k)$, $k \in K$, $m \in M \cap K$. On note $\bar{\pi}_{\delta, v}^P$ la représentation de G dans I_{δ} déduite de $\pi_{\delta, v}^P$ par transport de structure. On note $\mathcal{V}(\delta) := (V_{\delta}^{-\infty})_{disc}^{M \cap H}$. Le produit scalaire L^2 permet de définir un produit scalaire sur cet espace [CD2, (1.6)].

On suppose que $\text{Re}(v - \rho_P)$ est strictement Δ_P -dominant. Soit $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$. On dispose d'une fonction continue sur G à valeurs dans $V_{\delta}^{-\infty}$, $j(P, \delta, v, \eta)$, H -invariante à gauche valant η en l'identité de G et se transformant par $a^v - \rho_P \delta'(m^{-1})$ sous la translation à droite par man , $m \in M$, $a \in A$, $n \in N_P$. Ces propriétés sont caractéristiques de cette fonction qui détermine un vecteur distribution H -invariant de $\pi_{\delta, v}^P$ (cf. [CD1, (2.4.6)]). On notera $\bar{j}(P, \delta, v, \eta)$ la forme linéaire continue correspondante sur $C^{\infty}(K, \delta)$. L'application $v \mapsto \bar{j}(P, \delta, v, \eta)$ se prolonge en un fonction méromorphe sur $(\alpha)_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans le dual topologique de $C^{\infty}(K, \delta)$, qu'on note de même.

THÉORÈME 6. *Soit φ un élément K -fini de $C^{\infty}(K, \delta)$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$, $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ -propre pour une valeur propre Λ de $(\alpha_M^d)^*$, et $v \in i\alpha^*$, tels que $\Lambda - v$ soit régulier par rapport aux racines de α^d dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, et tels que $E(P, \delta, v, \eta, \varphi)$ soit défini.*

Alors:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{dima} \int_{G/H} |\langle (\bar{\pi}_{\delta, v}^P)'(g) \bar{j}(P, \delta, v, \eta), \varphi \rangle|^2 e^{-\varepsilon \varpi(x)} dx \\ = C(\mu_P(\delta, v))^{-1} \|\eta\|^2 \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

où $C := \int_{\alpha} e^{-\|X\|} dX$, $\mu_P(\delta, v)$ a été défini ci-dessus, et où $\|\eta\|$ est définie dans [CD2, équation (1.5)].

Démonstration. On définit les “intégrales d'Eisenstein” en posant:

$$E(P, \delta, v, \eta, \varphi)(gH) := \langle (\bar{\pi}_{\delta, v}^P)'(g) \bar{j}(P, \delta, v, \eta), \varphi \rangle, \quad \eta \in \mathcal{V}(\delta), \quad g \in G. \quad (5.6)$$

On dispose du lien entre les intégrales d'Eisenstein et les “intégrales d'Eisenstein” (cf. [CD2, §3.1]). Ceci joint à la relation qui existe entre les fonctions τ -sphériques et les fonctions K -finies (cf. (2.2)), permet de conclure grâce au Théorème 5 et à la définition du produit scalaire sur l'espace $\mathcal{V}(\delta)$ (cf. [CD2, (1.6)]). ■

Remarque 7. Comme les “intégrales d'Eisenstein” sont des coefficients généralisés, ce théorème fournit des relations d'orthogonalité de Schur généralisées.

BIBLIOGRAPHIE

- [B1] E. P. van den Ban, Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel Formula, *Ark. Mat.* **25** (1987), 175–187.
- [B2] E. P. van den Ban, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.* **90** (1987), 225–249.
- [B3] E. P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space. I. H-fixed distribution vectors, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **21** (1988), 359–412.
- [B4] E. P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space. II. Eisenstein integrals, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.
- [BS1] E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull, Local boundary data of eigenfunctions on Riemannian symmetric space, *Invent. Math.* **98** (1989), 639–657.
- [BS2] E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull, Fourier transforms on a semisimple symmetric space, *Invent. Math.* **130** (1997), 517–574.
- [C] J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, *J. Reine Angew. Math.* **491** (1997), 17–63.
- [CD1] J. Carmona et P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distributions H -invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 152–221.
- [CD2] J. Carmona et P. Delorme, Transformation de Fourier sur les espaces symétriques réductifs, *Invent. Math.* **134** (1998), 59–99.
- [Ca.M] W. Casselman et D. Miličević, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke. Math. J.* **49** (1982), 869–930.
- [D1] P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs: tempérance, majorations. Petite matrice B , *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 422–509.
- [D2] P. Delorme, Troncature pour les espaces symétriques réductifs, *Acta Math.* **179** (1997), 41–77.
- [D3] P. Delorme, Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, *Ann. of Math.* **147** (1998), 417–452.
- [F-J] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, *Ann. of Math.* **111** (1980), 253–311.
- [H-C1] Harish-Chandra, Discrete serie for semisimple Lie groupes, II, *Acta Math.* **116** (1996), 1–111.
- [H-C2] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, I. The theory of the constant term, *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 103–204.
- [K] Knapp, “Representation Theory of Semisimple Groupe,” Princeton Univ. Press, Princeton, 1986.
- [Mi1] H. Midorikawa, Schur orthogonality relations for certain non square integrable representations of real semisimple Lie group, *Tokyo J. Math.* **8** (1985), 303–336.
- [Mi2] H. Midorikawa, Schur orthogonality relations for non square integrable representations of real semisimple linear group and its application, *Adv. Stud. Pure Math.* **14** (1988), 257–287.
- [R] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, *Can. J. Math.* **31** (1979), 157–180.
- [Va] V. S. Varadarajan, “Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups,” p. 576, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.
- [W] G. Warner, “Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I,” Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.