

Terme constant de fonctions sur un espace symétrique réductif p -adique

Constant term of functions on a p -adic reductive symmetric space

Nathalie Lagier *

*Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 CNRS, Université de la Méditerranée, 163 Avenue de Luminy,
Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France*

Reçu le 9 juin 2007 ; accepté le 16 juillet 2007

Disponible sur Internet le 2 octobre 2007

Communiqué par P. Delorme

Résumé

Nous établissons une généralisation de la dualité de Casselman aux espaces symétriques réductifs p -adiques et nous étudions le comportement asymptotique de certains coefficients généralisés. Nous prouvons aussi un analogue d'un Lemme de Langlands grâce auquel nous obtenons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan des espaces symétriques réductifs p -adiques.

© 2007 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Abstract

We generalize Casselman's pairing to p -adic reductive symmetric spaces and study the asymptotic behaviour of certain generalized coefficients. We also prove an analogue of a lemma due to Langlands which allows us to prove a disjunction result for the Cartan decomposition of the p -adic reductive symmetric spaces.

© 2007 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Mots-clés : Espace symétrique ; Groupe réductif p -adique ; Module de Jacquet

* Fax : +33 04 91 26 96 55.

Adresse e-mail : nathalie.lagier@wanadoo.fr.

Keywords: Symmetric space; p -Adic reductive group; Jacquet module

0. Introduction

0.1. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique 0. Soit $G = \underline{G}(F)$, le groupe des points sur F d'un groupe algébrique réductif connexe, $\underline{G}$, défini sur F et soit σ une involution rationnelle définie sur F du groupe algébrique $\underline{G}$. On notera encore σ l'involution de G induite par σ . Soit $H = \underline{H}(F)$ le groupe des points sur F d'un sous-groupe ouvert au sens de Zariski du groupe des points fixes de σ . Le quotient du groupe G par H est appelé espace symétrique réductif p -adique.

La motivation de ce travail est l'analyse harmonique sur G/H . Noter que G lui-même peut être vu comme un espace symétrique en considérant l'involution de $G \times G$ donnée par l'inversion des facteurs.

Harish-Chandra a établi la formule de Plancherel pour les groupes réductifs réels (cf. [13]) et les groupes réductifs p -adiques (cf. [23]). La formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs réels a été établie par deux méthodes différentes par E.P. van den Ban et H. Schlichtkrull d'une part et P. Delorme d'autre part (cf. [1] pour une présentation des deux méthodes).

Dans plusieurs cas particuliers, les fonctions sur G/H invariantes par un sous-groupe compact maximal ont été étudiées (cf. [16,17,22]). A.G. Helminck et G.F. Helminck ont obtenu des résultats de structure de G/H (cf. [14,15]). Pour l'analyse harmonique sur G/H , on s'intéresse aux triplets (π, V, ξ) , où (π, V) est une représentation lisse admissible de G et $\xi \in V^{*H}$, où V^{*H} désigne l'espace vectoriel des vecteurs H -invariants du dual de V . P. Blanc et P. Delorme ont étudié le comportement de ces objets par l'induction parabolique (cf. [3]).

Enfin on dispose d'une décomposition de type Cartan, ou décomposition polaire, des espaces symétriques réductifs p -adiques (cf. [2,11]).

On considère dans un premier temps le comportement de ces objets sous les foncteurs de Jacquet, obtenant une généralisation de résultats de Casselman (cf. [9]), la preuve utilisant les résultats de celui-ci. L'expérience du cas réel conduit à s'intéresser à des sous-groupes paraboliques P de G tels que P et $\bar{P} := \sigma(P)$ soient opposés, on les appelle σ -sous-groupes paraboliques. Alors $M = P \cap \sigma(P)$ est le sous-groupe de Levi σ -stable de P .

Si (π, V) est une représentation lisse admissible de G , si $\xi \in V^{*H}$ et si $v \in V$, on note $c_{\xi,v}$ le coefficient généralisé défini par $c_{\xi,v}(g) := \langle \pi^*(g)\xi, v \rangle$, $g \in G$, où (π^*, V^*) est la représentation $g \mapsto \pi(g^{-1})$ sur le dual algébrique V^* de V . On regarde $c_{\xi,v}$ comme une fonction sur G/H . Nos résultats, joints à la décomposition de Cartan, nous permettent notamment de démontrer que si π est bornée, i.e. telle que tous ses coefficients sont bornés, les coefficients généralisés $c_{\xi,v}$ sont bornés, ce qui est l'analogue d'un résultat de M. Flensted-Jensen, T. Oshima, H. Schlichtkrull pour les espaces symétriques réductifs réels (cf. [12]).

On établit l'analogue d'un Lemme de Langlands (cf. [4, Chapitre IV, Lemme 4.4]) pour les coefficients généralisés $c_{\xi,v}$, où (π, V) est une représentation induite à partir d'un σ -sous-groupe parabolique. Cela nous permet d'obtenir un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan de G/H .

N.B. : Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [21].

Indépendamment, S. Kato et K. Takano (cf. [19, Paragraphe 5]) ont démontré le Corollaire 1 du Théorème 1 et le Théorème 3 de notre travail. Nous remercions Jacques Carmona de nous l'avoir signalé.

0.2. On considère divers groupes algébriques définis sur F , et on utilisera des abus de terminologie du type suivant : « soit A un tore déployé » signifiera « soit A le groupe des points sur F d'un tore défini et déployé sur F ». Avec ces conventions, soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe défini sur F . Soit A_0 un tore déployé maximal de G ; on note M_0 son centralisateur. Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant A_0 , il possède un unique sous-groupe de Levi contenant A_0 , noté M . Son radical unipotent sera noté U . On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G .

On note $X(G)$ le groupe des caractères non ramifiés de G et $X_*(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de A_G , qui est un groupe abélien libre de type fini. On fixe une fois pour toutes une uniformisante ϖ de F . On note alors $\Lambda(G)$ l'image de $X_*(G)$ dans G par le morphisme de groupes $\lambda \mapsto \lambda(\varpi)$, qui est isomorphe à $X_*(G)$ par ce morphisme. On adopte des notations similaires pour les sous-groupes de Levi de G .

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G et $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$.

On reprend les notations et hypothèses du paragraphe 0.1 notamment pour σ et H .

Un tore déployé de G contenu dans $\{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$ sera dit σ -déployé, $((\sigma, F)$ -split torus dans [15]).

On fixe désormais un tore σ -déployé maximal, $A_\emptyset$, et on suppose A_0 choisi de telle sorte que A_0 soit un tore déployé σ -stable maximal contenant $A_\emptyset$ (cf. [15, Lemme 4.5 (iii)] pour l'existence). On note $(A_i)_{i \in I}$, un ensemble de représentants des classes de H -conjugaison de tores σ -déployés maximaux de G , qui est fini (cf. [15, 6.10 et 6.16]). On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les A_i sont tous conjugués sous G (cf. [14, Proposition 1.16]). On choisit, pour tout i dans I , un élément x_i de G , avec $x_i A_\emptyset x_i^{-1} = A_i$ en prenant $x_\emptyset = e$, où e est l'élément neutre de G .

On fixe $P_\emptyset$ un σ -sous-groupe parabolique minimal de G contenant $A_\emptyset$. Soit P un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$. On note $\overline{W}(A_\emptyset)$ un ensemble de représentants du quotient $W(A_\emptyset)$ du normalisateur dans G de $A_\emptyset$ par son centralisateur dans G , noté $M_\emptyset$. On extrait de l'ensemble $\{x_i w \mid w \in \overline{W}(A_\emptyset)\}$ un ensemble de représentants $\overline{W}_{M_\emptyset}^G$ (resp. $\overline{W}_M^G$) de $(H, P_\emptyset)$ -doubles classes ouvertes de G (resp. (H, P) -doubles classes ouvertes de G) avec $\overline{W}_M^G \subset \overline{W}_{M_\emptyset}^G$. Ces ensembles sont finis (cf. [15, Proposition 6.10, Corollaire 6.16]).

On note $X(M)_\sigma$ la composante neutre de l'ensemble des caractères de $X(M)$ anti-invariants par σ . On note δ_P le module de P , qui est un élément de $X(M)_\sigma$.

0.3. On considère $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G , de sous-groupe de Levi σ -stable M et de radical unipotent U . Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on note :

$$A_M^-(\varepsilon) := \{a \in A_M; |\alpha(a)|_F \leq \varepsilon, \alpha \in \Delta(P)\},$$

où $|\cdot|_F$ est la valeur absolue normalisée de F . On pose $A_M^- := A_M^-(1)$.

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G , notons V_P le module de Jacquet de V relativement à P et $j_P : V \rightarrow V_P$ la projection naturelle. On munit V_P de la représentation lisse admissible π_P de M définie par $\pi_P(m)j_P(v) := \delta_P(m)^{-1/2}j_P(\pi(m)v)$ pour tout $m \in M, v \in V$.

Lemme 2. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G , il existe un sous-groupe ouvert compact K' de K possédant la propriété suivante :

Pour toute représentation lisse admissible (π, V) de G , pour tout élément ξ de V^{*H} et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\langle \pi^*(k)\xi, \pi(a)v \rangle = \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-, k \in K'.$$

Le Lemme précédent permet d'utiliser des résultats de Casselman (cf. [9, Théorème 4.2.4]) que nous étendons aux coefficients généralisés dans le Théorème suivant.

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G .

Théorème 1. Soit $\xi \in V^{*H}$. Alors il existe une unique $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M \cap H}$ vérifiant :
Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de v , tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon).$$

De plus, on peut choisir ε indépendamment de $\xi \in V^{*H}$.

On note $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$. On note $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Soient $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$ et $\Delta(U, A_\emptyset)$ les racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de U qui sont éléments de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$ l'ensemble :

$$\{a \in A_\emptyset; |\alpha(a)|_F < \varepsilon, \alpha \in \Delta(U, A_\emptyset) \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1, \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Delta(U, A_\emptyset)\}.$$

Le Théorème suivant est une extension aux coefficients généralisés du Théorème 4.3.3 de [9] pour les coefficients.

Théorème 2. Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\xi \in V^{*H}$, on ait :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

Fixons un plongement algébrique $\tau : G \rightarrow GL_n(F)$. On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K_0) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F (cf. [23, I.1]). Pour $g \in G$, écrivons : $\tau(g) = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $\tau(g^{-1}) = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $\|g\| = \sup_{i,j} \sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F)$ et :

$$\|gH\| := \|g\sigma(g^{-1})\|. \quad (0.1)$$

Théorème 4.

(i) Soit (π, V) une représentation lisse, admissible et de type fini de G . Soit $\xi \in V^{*H}$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe $C_v > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C_v \|gH\|^c, \quad g \in G.$$

(ii) Si (π, V) est une représentation lisse bornée irréductible de G et $\xi \in V^{*H}$, alors pour tout $v \in V$, la fonction $c_{\xi,v}$ est bornée.

Remarque. Le point (i) permet de voir qu'une des hypothèses du Théorème 3 de [3] est toujours satisfaite.

Noter aussi que d'après un théorème de Howe, une représentation lisse est admissible de type fini si et seulement si elle est de longueur finie.

0.4. Soit P un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$, soient M son sous-groupe de Levi σ -stable et U son radical unipotent. Soit (δ, V_δ) une représentation lisse, admissible, bornée et de type fini de M . On introduit, pour $\chi \in X(M)_\sigma$, la représentation $\delta_\chi = \delta \otimes \chi$ de M . L'espace de δ_χ s'identifie à V_δ . On étend l'action de M à P en la prenant triviale sur U . Soit $I_\chi^P(\delta)$ l'espace des applications $\varphi : G \rightarrow V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\delta_\chi(m^{-1})\varphi(g), \quad g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe G agit par la représentation régulière gauche $\pi_{\delta, \chi}^P$ sur $I_\chi^P(\delta)$.

Si $x \in G$ et E est une partie de G , on note $x.E := xEx^{-1}$.

A tout $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, on associe l'espace : $\mathcal{V}(\delta, w) = V_\delta^{*M \cap w^{-1}H}$. On considère la somme $\mathcal{V}(\delta) := \bigoplus_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \mathcal{V}(\delta, w)$. La projection de $\mathcal{V}(\delta)$ sur $\mathcal{V}(\delta, w)$ parallèlement aux autres composantes sera notée $\text{pr}(\delta, w)$ ou pr_w .

Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $|\chi \delta_P^{-1/2}|$ soit strictement P -dominant. On associe à $\eta \in \mathcal{V}(\delta, e)$, la fonction $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)$ définie sur G à valeurs dans V_δ^* par les relations :

- (a) $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta) = 0$ en dehors de HP .
- (b) Pour tout $(h, m, u) \in H \times M \times U$, on a :

$$\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)(hmu) = \delta_P^{-1/2}(m)\chi(m)\delta^*(m^{-1})\eta.$$

Pour $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$, on définit également :

$$\varepsilon_w(P, \delta, \chi, \eta) = R_{w^{-1}}\varepsilon_e(w.P, w.\delta, w.\chi, \eta),$$

où R désigne la représentation régulière droite de G et $w.\delta$ (resp. $w.\chi$) la représentation de $w.M$ déduite de δ (resp. χ) par transport de structure. On définit enfin pour $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$:

$$j(P, \delta, \chi, \eta) = \sum_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \varepsilon_w(P, \delta, \chi, \text{pr}(\delta, w)\eta).$$

On peut appliquer le Théorème 3 de [3] avec $r = 0$ grâce à notre Théorème 4 (ii). On en déduit que pour tout $v \in V_\delta$, l'application $g \mapsto \langle j(P, \delta, \chi, \eta)(g), v \rangle$ est continue sur G . Alors $\varphi \mapsto \int_K \langle j(P, \delta, \chi, \eta)(k), \varphi(k) \rangle dk$ définit une forme linéaire sur $I_\chi^P(\delta)$, invariante par H sous $(\pi_{\delta, \chi}^P)^*$, on la note encore $j(P, \delta, \chi, \eta)$.

On dispose des intégrales d'entrelacements $A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ qui entrelacent $I_\chi^P(\delta)$ et $I_\chi^{\bar{P}}(\delta)$ et définies par des intégrales convergentes pour $\chi \in X(M)$, tel que $|\chi \delta_P^{-R_\delta}|$ soit P -dominant pour $R_\delta > 0$ bien choisi (cf. [23, Théorème IV.1.1]).

Le symbole $a \rightarrow_{\bar{p}} \infty$ signifie que $a \in A_M$ et que $|\alpha(a)|_F \rightarrow +\infty$ pour tout $\alpha \in \Sigma(\bar{P})$.

Théorème 5. On suppose de plus que (δ, V_δ) est irréductible. Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $|\chi \delta_P^{-1/2}|$ et $|\chi \delta_P^{-R_\delta}|$ soient strictement P -dominants. Alors, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, $g \in G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$:

$$\lim_{a \rightarrow_{\bar{p}} \infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) (\pi_{\delta, \chi}^P)^*(ga) j(P, \delta, \chi, \eta), \varphi = \langle \text{pr}_e \eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(g) \rangle, \quad (0.9)$$

où μ_δ est le caractère central de δ .

On note $\Lambda_T^-(A_\emptyset) := \{\lambda \in \Lambda(A_\emptyset); |\alpha(\lambda)|_F \leq e^{-T}, \alpha \in \Delta(P_\emptyset)\}$, où $T \geq 0$ et $\Lambda^-(A_\emptyset) := \Lambda_0^-(A_\emptyset)$.

La décomposition de Cartan (cf. [2, 11]) donne l'existence d'une partie compacte Ω de G telle que :

$$G = \bigcup_{y \in \overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda^-(A_\emptyset) y^{-1} H. \quad (0.3)$$

Théorème 7. Il existe $T > 0$ tel que la réunion $\bigcup_{y \in \overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda_T^-(A_\emptyset) y^{-1} H$ soit disjointe.

0.5. Dans le Paragraphe 1, on précise les notations et on fait quelques rappels, notamment sur les involutions rationnelles de G . Dans le Paragraphe 2, on établit les liens entre module de Jacquet et vecteur distribution H -invariant (Théorème 1), on définit le terme constant de fonctions sur G/H , on établit le Théorème 2 et enfin, on obtient une propriété de transitivité du terme constant dans le Théorème 3 et on introduit la notion de vecteurs distributions H -invariants cuspidaux. Dans le Paragraphe 3, on obtient des majorations qui nous conduisent à comparer la fonction $\|\cdot\|$ à une autre fonction définie sur G/H par P. Blanc et P. Delorme (cf. [3]). On établit ensuite des majorations de certains coefficients généralisés de représentations admissibles de type fini dans le Théorème 4. Dans le Paragraphe 4, on obtient l'analogue d'un lemme de Langlands (Théorème 5) et on en déduit une propriété de disjonction dans la décomposition de Cartan des espaces symétriques réductifs p -adiques (Théorème 7).

1. Notations et rappels

1.1. Notations

On va utiliser largement des notations et conventions de [23]. Soit F un corps local non archimédien, de caractéristique 0. On considère divers groupes algébriques définis sur F , et on utilisera des abus de terminologie ou convention du type suivant :

$$\begin{aligned} \text{« Soit } A \text{ un tore déployé »} &\text{ signifiera « soit } A \text{ le groupe des points sur } F \\ \text{d'un tore } \underline{A} \text{ défini et déployé sur } F \text{ »}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Avec ces conventions, soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe. Soit A_0 un sous-tore de G , déployé et maximal pour cette propriété, on note M_0 son centralisateur dans G . Si P

est un sous-groupe parabolique de G contenant A_0 , il possède un unique sous-groupe de Levi contenant A_0 , noté M (ou M_P). Son radical unipotent sera noté U ou U_P .

Si H est un groupe algébrique, on note $\text{Rat}(H)$ le groupe des caractères algébriques de H définis sur F . Si E est un espace vectoriel, on note E^* son dual. S'il est réel, on note $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié. On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G .

On note $\mathfrak{a}_G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Rat}(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères rationnels de G à A_G induit un isomorphisme :

$$\text{Rat}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \text{Rat}(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

On dispose de l'application canonique, $H_G : G \rightarrow \mathfrak{a}_G$ définie par :

$$e^{\langle H_G(x), \chi \rangle} = |\chi(x)|_F, \quad x \in G, \chi \in \text{Rat}(G) \quad (1.3)$$

où $|\cdot|_F$ est la valeur absolue normalisée de F . Le noyau de H_G , qui est noté G^1 , est l'intersection des noyaux des caractères de G de la forme $|\chi|_F$, $\chi \in \text{Rat}(G)$. On notera $X(G) = \text{Hom}(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. On a des notations similaires pour les sous-groupes de Levi.

Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant A_0 , on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$, $H_P = H_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$. On note $\mathfrak{a}_{G,F}$, resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}$ l'image de G , resp. A_G , par H_G . Alors G/G^1 est isomorphe au réseau $\mathfrak{a}_{G,F}$. Soit M un sous-groupe de Levi contenant A_0 . Les inclusions $A_G \subset A_M \subset M \subset G$, déterminent un morphisme de groupe surjectif $\mathfrak{a}_{M,F} \rightarrow \mathfrak{a}_{G,F}$, et un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} \rightarrow \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$. Le premier (resp. le second) se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$ (resp. injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$). La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, noté $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie :

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G. \quad (1.4)$$

Il y a une surjection :

$$(\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}} \rightarrow X(G) \rightarrow 1 \quad (1.5)$$

qui associe à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|^s$ (cf. [23, I.1(1)]). Le noyau est un réseau et cela définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G)$ est de dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_G$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\nu \in (\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}}$ un élément se projetant sur χ par l'application (1.5). La partie réelle $\text{Re } \nu \in \mathfrak{a}_G^*$ est indépendante du choix de ν . Nous la noterons $\text{Re } \chi$. Si $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $\text{Re } \chi = \text{Re } |\chi|$. De même, si $\chi \in \text{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$ est continu, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, que l'on note encore $|\chi|$ et on pose $\text{Re } \chi = \text{Re } |\chi|$.

De l'isomorphisme naturel (1.2) on déduit aisément l'égalité :

$$A_G^1 = A_G \cap G^1. \quad (1.6)$$

Alors A_G^1 est le plus grand sous-groupe compact de A_G .

On note $X_*(G)$ ou $X_*(A_G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de A_G . C'est un groupe abélien libre de type fini. On fixe une fois pour toute une uniformisante ϖ de F . On

note alors $\Lambda(G)$, l'image de $X_*(G)$ dans G par le morphisme de groupes $\underline{\lambda} \mapsto \underline{\lambda}(\varpi)$, qui est isomorphe à $X_*(G)$ par ce morphisme.

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G , qui s'identifie à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}_M^*$, $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$.

On note W^G le groupe de Weyl de G relativement à A_0 , qui agit sur $\mathfrak{a}_0$. On choisit un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$ invariant par W^G . On le notera $(\cdot|\cdot)$, et $|\cdot|$ la norme qu'on en déduit. (1.7)

On note :

$$\begin{aligned} {}^+\mathfrak{a}_P^* \text{ (resp. } {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P^*) &= \left\{ \nu \in \mathfrak{a}_M^* \mid \nu = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} x_\alpha \alpha \text{ où } x_\alpha > 0 \text{ (resp. } x_\alpha \geq 0) \right\}, \\ \mathfrak{a}_P^{*+} \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_P^{*+}) &= \left\{ \nu \in \mathfrak{a}_M^* \mid (\nu|\alpha) > 0 \text{ (resp. } \geq 0), \alpha \in \Sigma(P) \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Comme dans [23, I.1], on fixe K_0 un sous-groupe compact maximal de G qui est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G .

Soit P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G contenant A_0 .

On note :

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{a}}_P^+ \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_P^-) &:= \{ X \in \mathfrak{a}_P \mid \langle \alpha, X \rangle \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0), \alpha \in \Delta(P) \}, \\ \text{On écrira } \bar{\mathfrak{a}}_0^+ \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_0^-) &\text{ au lieu de } \bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^+ \text{ (resp. } \bar{\mathfrak{a}}_{P_0}^-), \\ {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P &:= \{ X \in \mathfrak{a}_P \mid (\nu, X) \geq 0, \nu \in \mathfrak{a}_P^{*+} \}, \\ \bar{M}_0^+ &:= H_{M_0}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}_0^+) \text{ et } \bar{M}_0^- := H_{M_0}^{-1}(\bar{\mathfrak{a}}_0^-). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Si N est un sous-groupe fermé de G , on note dn une mesure de Haar invariante à gauche sur N . Si N et N' sont deux sous-groupes fermés de G tels que $N' \subset N$, on notera $d\hat{n}$, si elle existe, une mesure sur N/N' , invariante à gauche par N , positive et non nulle. C'est le cas si N et N' sont unimodulaires.

Soit P un sous-groupe parabolique de G contenant A_0 , soit M son sous-groupe de Levi contenant A_0 et soit $\bar{P} = M\bar{U}$ le sous-groupe parabolique de G opposé à P relativement à M .

Soit P un sous-groupe parabolique de G de sous-groupe de Levi M . On note ρ_P la demi-somme des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P , on note δ_P l'élément de $X(M)_\sigma$ tel que l'on ait :

$$\delta_P(m) = e^{2\rho_P(H_M(m))}, \quad m \in M.$$

On note $C(G, P, -2\rho_P)$ l'espace des fonctions continues $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$f(gmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))} f(g), \quad g \in G, m \in M, u \in U.$$

On remarque que si $f \in C(G, P, -2\rho_P)$, alors f est invariante à droite par $K_0 \cap P$. En raisonnant comme dans la preuve de la Conséquence 7 de la Proposition 5.26 de [20], et en remplaçant $K \cap M$ par $K_0 \cap P$, on montre que, pour une bonne normalisation des mesures :

Pour toute fonction f de $C(G, P, -2\rho_P)$, l'intégrale $\int_{\tilde{U}} f(\tilde{u}) d\tilde{u}$ est absolument convergente et :

$$\int_{K_0} f(k) dk = \int_{\tilde{U}} f(\tilde{u}) d\tilde{u}. \quad (1.10)$$

Il en résulte que la forme linéaire $\mathcal{M}$ sur $C(G, P, -2\rho_P)$ définie par :

$$\mathcal{M}(f) := \int_{K_0} f(k) dk, \quad f \in C(G, P, -2\rho_P)$$

est invariante par les translations à gauche par les éléments de K_0 , de $\tilde{U}$ ainsi que ceux de M .
Donc :

La forme linéaire $\mathcal{M}$ sur $C(G, P, -2\rho_P)$ est invariante par les translations à gauche par les éléments de G . (1.11)

1.2. Involutions rationnelles de G

On utilisera parfois de façon implicite les deux faits suivants. Avec nos hypothèses sur F , on a (cf. [18, Théorème 34.4 (d)]) :

Si L est le groupe des points sur F d'un groupe algébrique réductif $\underline{L}$ défini sur F , alors L est Zariski dense dans $\underline{L}$. (1.12)

Il résulte facilement de ceci et du Théorème 34.4 (c) de [18], que :

Si L est comme ci-dessus et A le groupe des points sur F d'un tore déployé $\underline{A}$ de $\underline{L}$, alors le centralisateur de $\underline{A}$ est un groupe réductif défini sur F dont le groupe des points sur F est égal au centralisateur de A dans L . (1.13)

Soit σ une involution rationnelle, définie sur F , du groupe algébrique dont G est le groupe des points sur F . Soit H le groupe des points sur F d'un sous-groupe ouvert, défini sur F , du groupe des points fixes de σ .

Un tore déployé de G contenu dans $\{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$ sera dit σ -déployé, ((σ, F) -split torus dans [14]). On dira que P est un σ -sous-groupe parabolique de G si P est un sous-groupe parabolique de G tel que P et $\sigma(P)$ soient opposés, c'est à dire tel que $P \cap \sigma(P)$ soit un sous-groupe de Levi de P . C'est alors le sous-groupe de Levi σ -stable de P : en effet, tout sous-groupe σ -stable de P est inclus dans $P \cap \sigma(P)$ qui est σ -stable. On utilisera la convention suivante :

La phrase : « Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G » signifiera que P est un σ -sous-groupe parabolique de G , que M est son sous-groupe de Levi σ -stable (i.e. $M = P \cap \sigma(P)$) et que U est son radical unipotent. On notera $\tilde{P} = M\tilde{U}$ le sous-groupe parabolique $\sigma(P)$ qui est opposé à P relativement à M . (1.14)

D'après [14, Corollaire 6.16], si P_0 est un sous-groupe parabolique minimal de G , le nombre de (H, P_0) -doubles classes est fini, donc aussi le nombre de (H, P) -doubles classes pour tout sous-groupe parabolique P de G .

On a (cf. [15, l'équivalence de (i) et (iv) de la Proposition 4.7 et Lemme 4.5]) :

Si $P_\emptyset$ est un σ -sous-groupe parabolique minimal, son sous-groupe de Levi σ -stable, $M_\emptyset$, contient un unique tore σ -déployé maximal de G , $A_\emptyset$, et $M_\emptyset = Z_G(A_\emptyset)$. (1.15)

On fixe désormais $A_\emptyset$ un tore σ -déployé maximal de G et on note $M_\emptyset$ son centralisateur. On fixe A_0 un tore déployé maximal de $M_\emptyset$. Alors (cf. [15, Lemme 4.5 (i)]), A_0 est σ -stable et c'est un tore déployé maximal de G . Donc :

Le tore A_0 est un tore déployé maximal σ -stable de G contenant $A_\emptyset$. (1.16)

On fixe aussi $P_\emptyset$ un σ -sous-groupe parabolique minimal contenant $A_\emptyset$. On note $(A_i)_{i \in I}$, un ensemble de représentants des classes de H -conjugaison de tores σ -déployés maximaux de G . On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les A_i sont tous conjugués sous G (cf. [14, Proposition 1.16]).

On choisit, pour tout i dans I , un élément x_i de G , avec $x_i A_\emptyset x_i^{-1} = A_i$ en prenant $x_\emptyset = e$. On note $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des σ -sous-groupes paraboliques minimaux de G contenant A_i , qui est fini, et les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont tous conjugués entre eux par un élément du normalisateur de A_i (cf. [14, Proposition 2.7]). Comme les A_i sont conjugués entre eux, tous les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont conjugués sous G à $P_\emptyset$ et à $P_i := x_i P_\emptyset x_i^{-1}$.

On note M_i le centralisateur dans G de A_i . Si L est un sous-groupe de G , on note $W_L(A_i)$ le quotient du normalisateur dans L de A_i par son centralisateur. On note $W(A_i)$ au lieu de $W_G(A_i)$.

On note $\overline{W}_i$ un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ de $W_{H_i}(A_\emptyset) \setminus W(A_\emptyset)$ où $H_i = x_i^{-1} H x_i$. Soit $\mathcal{W}_i^G$ l'ensemble $\{x_i x \mid x \in \overline{W}_i\}$ et $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_i^G$. Alors (cf. [14, Théorème 3.1]) :

$\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ forme un ensemble de représentants des $(H, P_\emptyset)$ -doubles classes ouvertes dans G . (1.17)

En particulier, comme l'ensemble des $(H, P_\emptyset)$ -doubles classes est fini (cf. [15, Proposition 6.10 et Corollaire 6.16]), on voit que I est fini.

Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G . On remarque que A_M , le plus grand tore déployé du centre de M , est invariant par σ , donc σ agit naturellement sur $\mathfrak{a}_M$.

Si $x \in G$ et E est une partie de G , on note $x.E := xEx^{-1}$ et si f est une application définie sur E , on note $x.f$ l'application définie sur $x.E$ par : $x.f(xy x^{-1}) = f(y)$, pour $y \in E$.

On note $X(M)_\sigma$ (resp. $X_{\mathbb{R}}(M)_\sigma$) l'ensemble des caractères non ramifiés de M qui sont l'image par l'application de (1.5) (pour M au lieu de G), de l'ensemble des éléments de $(\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{a}_M^*$) anti-invariants par σ . Alors $X(M)_\sigma$ est la composante neutre de l'ensemble des caractères de $X(M)$ anti-invariants par σ . On remarque de plus que :

Si $\chi \in X(M)_\sigma$, alors $\chi(h) = 1$, $h \in M \cap H$, (1.18)

En effet :

$$\chi \circ \sigma(h) = \chi(h)^{-1}, \quad h \in M \cap H.$$

On en déduit que :

$$\chi(h)^2 = 1, \quad h \in M \cap H.$$

Alors, pour $h \in M \cap H$ fixé, l'application continue sur $X(M)_\sigma$ définie par $\chi \mapsto \chi(h)$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Par connexité, on en déduit que $\chi(h) = 1$, d'où (1.18).

On fixe P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G contenant A_0 et contenu dans $P_\emptyset$. (1.19)

On pose :

$$\begin{aligned} A_T^-(A_\emptyset) &:= \{\lambda \in \Lambda(A_\emptyset); |\alpha(\lambda)|_F \leq e^{-T}, \alpha \in \Delta(P_\emptyset)\}, \quad \text{où } T \geq 0 \text{ et} \\ \Lambda^-(A_\emptyset) &:= \Lambda_0^-(A_\emptyset). \end{aligned} \quad (1.20)$$

La décomposition de Cartan (cf. [2, Théorème 1.1] et [11, Théorème 0.1]) donne l'existence d'un ensemble compact Ω tel que :

$$G = \bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda^-(A_\emptyset) y^{-1} H. \quad (1.21)$$

Comme A_0 est σ -invariant, σ agit naturellement sur $\mathfrak{a}_0$. On définit $\mathfrak{a}_\emptyset$ le sous-espace des éléments anti-invariants de $\mathfrak{a}_0$.

Pour des raisons de dimension, $\mathfrak{a}_\emptyset$ est égal au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}_0$ engendré par $H_{M_\emptyset}(A_\emptyset)$. (1.22)

Le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}_0$ engendré par σ et le groupe de Weyl de G relativement à A_0 , W^G , est fini car σ préserve A_0 et donc $N_G(A_0)$. En conséquence, le produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$ introduit en (1.7) peut être supposé également σ -invariant.

Soit P un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$ et M son sous-groupe de Levi σ -stable. On note $A_{G,\sigma}$ (resp. $A_{M,\sigma}$) le plus grand tore σ -déployé de A_G (resp. de A_M), $\mathfrak{a}_G^\sigma$ (resp. $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$) l'ensemble des points fixes (resp. anti-invariants) de A_G sous σ .

On note p_σ la projection de $\mathfrak{a}_G$ sur $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ parallèlement à $\mathfrak{a}_G^\sigma$ et $H_{G,\sigma}$ la composée $p_\sigma \circ H_G$.

1.3. Représentations

1.3.1. Représentations lisses

Soit (π, V) une représentation de G sur un espace vectoriel V complexe. Si K est un sous-groupe de G , on note V^K l'espace des vecteurs de V invariants sous $\pi(K)$. On dit qu'une représentation (π, V) est lisse si tout élément v de V appartient à V^K pour un sous-groupe compact ouvert K . On dit qu'elle est admissible si elle est lisse et si V^K est de dimension finie pour tout sous-groupe compact ouvert K . On dira qu'une représentation lisse est bornée si tous ses coefficients lisses son bornés.

Une fonction de G dans $\mathbb{C}$ bi-invariante par un sous-groupe compact ouvert sera dite lisse. On note $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions lisses à support compact qui est aussi l'espace des fonctions localement constantes à support compact.

On note R (resp. L) la représentation régulière droite (resp. gauche) de G sur $C^\infty(G)$.

Si (π, V) est une représentation lisse de G , on définit sa représentation duale (π^*, V^*) par la représentation $g \mapsto {}^t \pi(g^{-1})$ sur le dual algébrique V^* de V et on définit sa contragrédiente lisse $(\check{\pi}, \check{V})$ par la restriction de π^* au sous espace $\check{V}$ des éléments de V^* fixés par un sous-groupe ouvert compact.

Si (π, V) est une représentation admissible de G et K un sous-groupe ouvert compact de G , on définit l'opérateur $\pi(e_K)$ par la formule :

$$\pi(e_K)v := \int_K \pi(k)v \, dk$$

où $v \in V$ et dk est la mesure de Haar normalisée de K . (1.23)

Comme v est fixé par un sous-groupe ouvert compact, cette intégrale est une somme finie.

Avec les mêmes hypothèses, pour un élément ξ de V^{*H} , on définit l'élément $\pi^*(e_K)\xi$ de $V^{*K} \subset \check{V}$ par :

$$\langle \pi^*(e_K)\xi, v \rangle := \langle \xi, \pi(e_K)v \rangle, \quad v \in V. \quad (1.24)$$

1.3.2. Représentations rationnelles

Soit Λ un élément de $\text{Rat}(M_0)$, on appelle représentation de plus haut poids Λ relativement à P_0 , une représentation rationnelle de G , définie sur F , de dimension finie, (π_Λ, V_Λ) , irréductible et possédant un vecteur non nul v_Λ , dit de plus haut poids Λ , invariant par le radical unipotent U_0 de P_0 et se transformant par Λ sous M_0 .

Une telle représentation, si elle existe, est unique à isomorphisme près (cf. [18, Théorème 31.3 (c)]). Il résulte du Théorème 31.3 (b) de [18] que :

Pour tout élément P_0 -dominant, a de A_0 , la plus grande des valuations des valeurs propres de $\pi_\Lambda(a)$ est égale à $|\Lambda(a)|_F$. (1.25)

Toujours d'après ce Théorème 31.3, on a :

Si (π_Λ, V_Λ) est une représentation de plus haut poids Λ relativement à P_0 , alors sa représentation contragrédiente $(\pi_\Lambda^*, V_\Lambda^*)$ est une représentation de plus haut poids Λ^{-1} relativement à $\bar{P}_0$. (1.26)

2. Modules de Jacquet et vecteurs-distributions H -invariants

2.1. Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G fixé pour ce Chapitre 2.

On associe à $\varepsilon > 0$ l'ensemble :

$$A_M^-(\varepsilon) := \{a \in A_M; |\alpha(a)|_F \leq \varepsilon, \alpha \in \Delta(P)\},$$

Si l'on veut expliciter la dépendance par rapport à P , on notera $A_M(P, \leq \varepsilon)$ au lieu de $A_M^-(\varepsilon)$.

On notera $A_M^- := A_M^-(1)$, $A_M^+(\varepsilon) := (A_M^-(\varepsilon))^{-1}$ et $A_M^+ := (A_M^-)^{-1}$.

On dit qu'un sous-groupe ouvert compact K de G admet une factorisation d'Iwahori par rapport à P s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. [9, 1.4]) :

- (a) l'application produit de $K_{\bar{U}} \times K_M \times K_U$ dans K est une bijection, où $K_{\bar{U}} = K \cap \bar{U}$, $K_M = K \cap M$ et $K_U = K \cap U$;
 (b) pour tout $a \in A_M^-$, $aK_U a^{-1} \subseteq K_U$, $a^{-1}K_{\bar{U}}a \subseteq K_{\bar{U}}$.

(2.1)

Tout sous-groupe compact ouvert contient un sous-groupe compact ouvert admettant une factorisation d'Iwahori (cf. [9, Proposition 1.4.4]).

(2.2)

Nous remercions Joseph Bernstein pour nous avoir fourni la démonstration du Lemme suivant :

Lemme 1. Soit K un sous-groupe ouvert compact admettant une factorisation d'Iwahori par rapport à $P : K = K_{\bar{U}} K_M K_U$. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact K' de G , contenu dans $K \cap K_{\bar{U}} K_M H$.

Démonstration. Avec la convention (1.1), si G est un groupe algébrique, alors G est un groupe de Lie sur F au sens de Bourbaki (cf. [6, Chapitre III, Paragraphe 1, Définition 1]). On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

La différentielle en (e, e) de la fonction analytique :

$$\begin{aligned} p : \bar{P} \times H &\rightarrow G \\ (\bar{p}, h) &\rightarrow \bar{p}h \end{aligned}$$

est l'application :

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{h} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\rightarrow X + Y. \end{aligned}$$

Or $\bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ (cf. [3, début du Paragraphe 2.4]), elle est donc surjective. Les propriétés des submersions (cf. [5, 5.9.1 à 5.9.4]) nous donnent alors l'existence de deux voisinages de e , l'un, V_1 , dans $\bar{P}$ que l'on peut prendre dans $K_{\bar{U}} K_M$ et l'autre, V_2 , dans H tels que l'image de $V_1 \times V_2$ par p contienne un voisinage de e . Quitte à restreindre, on peut supposer ce dernier contenu dans K et que c'est un sous-groupe compact ouvert. On le note K' . $\square$

Lemme 2. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G , il existe un sous-groupe ouvert compact K' de K possédant la propriété suivante :

Pour toute représentation lisse (π, V) de G , pour tout élément ξ de V^{*H} et pour tout $v \in V^K$,

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v \rangle = \langle \pi^*(a)\xi, v \rangle, \quad a \in A_M^+, k \in K'.$$

En particulier, pour tout sous-groupe compact ouvert $K'' \subset K'$:

$$\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle = \langle \pi^*(a)\pi^*(e_{K''})\xi, v \rangle, \quad a \in A_M^+ \quad (2.3)$$

(cf. (1.23) et (1.24) pour les définitions de $\pi(e_{K''})v$ et de $\pi^*(e_{K''})\xi$).

Démonstration. D'après (2.2), on se ramène au cas où K admet une factorisation d'Iwahori par rapport à P , on a alors $K = K_{\bar{U}} K_M K_U$. D'après le Lemme 1, il existe un sous-groupe ouvert compact K' de G contenu dans $K \cap K_{\bar{U}} K_M H$. Soit $k \in K'$, et soient $k_{\bar{U}} \in K_{\bar{U}}$, $k_M \in K_M$ et $h \in H$ tels que $k = k_{\bar{U}} k_M h$. Puisque $\xi \in V^{*H}$, on a :

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v \rangle = \langle \pi^*(ak_{\bar{U}} a^{-1} a k_M a^{-1} a)\xi, v \rangle, \quad a \in A_M^+.$$

De plus $ak_M a^{-1} = k_M \in K_M$ et $ak_{\bar{U}} a^{-1} \in K_{\bar{U}}$ car $a \in A_M^+$ donc $ak_M a^{-1} ak_{\bar{U}} a^{-1} \in K$. Or $v \in V^K$, donc :

$$\langle \pi^*(ak)\xi, v \rangle = \langle \pi^*(a)\xi, v \rangle, \quad a \in A_M^+. \quad \square$$

On déduit du Lemme 12 de l'appendice que :

Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G . Si φ est une fonction de A_M dans $\mathbb{C}$, lisse et A_M -finie, elle est entièrement déterminée par sa restriction à $A_M^-(\varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$.

Si de plus $A_{\emptyset} \subset M$ et si φ est une fonction définie sur $A_M \cap A_{\emptyset}$, lisse et $A_M \cap A_{\emptyset}$ -finie, alors elle est déterminée par sa restriction à $A_M^-(\varepsilon) \cap A_{\emptyset}$ pour un $\varepsilon > 0$. (2.4)

Si (π, V) est une représentation admissible de G , tout vecteur est A_G -fini. En effet, si v est élément de V , il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que v soit élément de V^K . Alors, pour tout élément a de A_G , $\pi(a)v$ est élément de V^K et comme (π, V) est admissible, la dimension de V^K est finie.

Soit (π, V) une représentation admissible de G , notons (π_P, V_P) le module de Jacquet de V relativement à P , où $V_P := V/V(P)$, avec $V(P) := \langle \pi(u)v - v, v \in V, u \in U \rangle$, et $j_P : V \rightarrow V_P$ la projection naturelle. On munit V_P de la représentation π_P de M définie par $\pi_P(m)j_P(v) := \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v)$ pour tout $m \in M$, $v \in V$. Elle est admissible (cf. [9, Théorème 3.3.1]), donc, d'après ce qui précède :

Tout vecteur $v_P \in V_P$ est A_M -fini. (2.5)

Soit $(\check{\pi}, \check{V})$ la contragrédiente de (π, V) , on note $((\check{\pi})_{\bar{P}}, (\check{V})_{\bar{P}})$ le module de Jacquet de $\check{V}$ relativement à $\bar{P}$ et $\check{j}_{\bar{P}} : \check{V} \rightarrow (\check{V})_{\bar{P}}$ la projection naturelle. Alors (cf. [9], voir aussi [23, Théorème I.4.1]), il existe un crochet de dualité canonique entre $(\check{V})_{\bar{P}}$ et V_P noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ qui vérifie :

Pour tout $(v, \check{v}) \in V \times \check{V}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\langle \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P = \delta_P(a)^{-1/2} \langle \check{v}, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon). \quad (2.6)$$

D'autre part,

Pour tout $\check{v}_{\bar{P}} \in (\check{V})_{\bar{P}}$ et pour tout $v_P \in V_P$, la fonction de A_M dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$a \mapsto \langle \check{v}_{\bar{P}}, \pi_P(a)v_P \rangle_P$$

est lisse et A_M -finie.

(2.7)

Le Théorème suivant est une extension aux coefficients généralisés du Théorème 4.3.3 de [9] pour les coefficients.

Théorème 1. Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique.

- (i) Soit (π, V) une représentation admissible de G et soit $\xi \in V^{*H}$. Alors il existe un unique $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M \cap H}$ vérifiant :

Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon). \quad (2.8)$$

De plus, on peut choisir ε indépendamment de $\xi \in V^{*H}$.

- (ii) Soit K un sous-groupe ouvert compact de G . Soit $K' \subset K$ un sous-groupe ouvert compact satisfaisant aux conditions du Lemme 2. Alors pour toute représentation admissible (π, V) de G , pour tout élément ξ de V^{*H} et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M.$$

Démonstration. (i) Soient $j_P^*(\xi)$ et $j_P^*(\xi)'$ deux éléments de $(V_P)^{*M \cap H}$ vérifiant (2.8). Soit $v \in V$, alors la fonction ψ_v de A_M dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\psi_v(a) = \langle j_P^*(\xi)' - j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle$$

est une fonction lisse A_M -finie nulle sur $A_M^-(\varepsilon)$ pour ε assez petit. Elle est donc nulle d'après le résultat (2.4). On a donc $\psi_v(e) = 0$ et ceci pour tout $v \in V$; d'où l'unicité de $j_P^*(\xi)$ s'il existe.

Soit $v \in V$, on va définir $\langle j_P^*(\xi), j_P(v) \rangle$.

On va montrer qu'il existe une unique application, φ_v , définie sur A_M à valeurs dans $\mathbb{C}$, lisse et A_M -finie valant $\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle$ pour $a \in A_M^-(\varepsilon)$ pour au moins un $\varepsilon > 0$. On définira alors $\langle j_P^*(\xi), j_P(v) \rangle$ comme étant la valeur en e (élément neutre du groupe G) de φ_v . Soit K un sous-groupe ouvert compact admettant une factorisation d'Iwahori par rapport à P et tel que $v \in V^K$ (K existe d'après (2.2)), et soit K' comme dans le Lemme 2.

Vérifions l'existence de φ_v . D'après le Lemme 2,

$$\langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-. \quad (2.9)$$

D'après [23, Théorème I.4.1] (cf. (2.6)), il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de K' et pas de ξ , tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M^-(\varepsilon). \quad (2.10)$$

On déduit de (2.9) et (2.10) que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M^-(\varepsilon). \quad (2.11)$$

La fonction définie par :

$$\varphi_v(a) := \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M, \quad (2.12)$$

vérifie :

$$\varphi_v(a) = \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon). \quad (2.13)$$

Donc φ_v convient car elle est lisse et A_M -finie d'après (2.5). Cette fonction est unique d'après le résultat (2.4).

Pour P et ξ fixés, on voit sur la formule (2.12) qu'elle ne dépend que de $j_P(v)$.

On remarque grâce au Lemme 2 équation (2.3) que l'on peut remplacer K' par un quelconque de ses sous-groupes compacts ouverts dans la définition de φ_v . (2.14)

L'unicité de φ_v permet de définir une application $j_P^*(\xi)$ de V_P dans $\mathbb{C}$ qui, à $j_P(v)$, associe $\varphi_v(e)$, pour v élément de V . L'application $j_P^*(\xi)$ est linéaire grâce à (2.12) et (2.14) qui impliquent : $\varphi_{v+v'} = \varphi_v + \varphi_{v'}$, $v, v' \in V$. Montrons que $j_P^*(\xi) \in (V_P^*)^{M \cap H}$.

Si $m \in M \cap H$, pour $\varepsilon' > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} \varphi_v(a) &= \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon'). \\ \varphi_{\pi(m)v}(a) &= \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(am)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon'). \end{aligned}$$

Or a et m commutent et $m \in M \cap H$, donc :

$$\varphi_{\pi(m)v}(a) = \delta_P(a)^{-1/2} \langle \pi^*(m^{-1})\xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon').$$

Comme m est élément de $M \cap H$, les applications φ_v et $\varphi_{\pi(m)v}$ coïncident sur $A_M^-(\varepsilon')$. Comme φ_v et $\varphi_{\pi(m)v}$ sont toutes deux lisses et A_M -finies, on déduit du résultat (2.4) que $\varphi_v(e) = \varphi_{\pi(m)v}(e)$. Comme $\delta_P \in X(M)_\sigma$, d'après (1.18), on a $\delta_P(m) = 1$, $m \in M \cap H$. On en déduit que $j_P^*(\xi) \in (V_P^*)^{M \cap H}$.

Montrons que, pour ε comme dans (2.10), on a (2.8). On a par définition de $j_P^*(\xi)$:

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle = \delta_P(a)^{-1/2} \varphi_{\pi(a)v}(e), \quad a \in A_M. \quad (2.15)$$

Montrons que :

$$\varphi_{\pi(a')v}(a) = \delta_P(a')^{1/2} \varphi_v(aa'), \quad a, a' \in A_M, \quad v \in V. \quad (2.16)$$

D'après (2.12) et (2.14), pour tout sous-groupe compact ouvert assez petit K'' , on a :

$$\begin{aligned} \varphi_v(a) &= \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M, \\ \varphi_{\pi(a')v}(a) &= \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(a)j_P(\pi(a')v) \rangle_P, \\ &= \delta_P(a')^{1/2} \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(aa')j_P(v) \rangle_P, \quad a, a' \in A_M. \end{aligned}$$

D'où (2.16). Finalement :

$$\varphi_{\pi(a)v}(e) = \delta_P(a)^{1/2} \varphi_v(a).$$

Donc, d'après (2.15) :

$$\begin{aligned} \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle &= \varphi_v(a) \\ &= \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de (2.13). Donc $j_P^*(\xi)$ vérifie (2.8). La preuve montre que ε ne dépend pas de ξ .

(ii) D'après (2.11), il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon_1).$$

Et d'après le Théorème 1 (i), il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon_2).$$

En posant $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on obtient :

$$\langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_M^-(\varepsilon).$$

D'après le résultat (2.4), on a donc l'égalité sur A_M . $\square$

On suppose que $A_\emptyset \subset M$ ce qui équivaut à $A_\emptyset \subset P$ car $A_\emptyset$ est σ -stable.

Corollaire 1. Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique.

- (i) On suppose que (π, V) est une représentation admissible de G et soit $\xi \in V^{*H}$. Pour tout $v \in V$, $a \mapsto \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v) \rangle$ est l'unique fonction sur $A_M \cap A_\emptyset$ à valeurs complexes, lisse, $A_M \cap A_\emptyset$ -finie qui soit égale à $\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle$ sur $A_M^-(\varepsilon) \cap A_\emptyset$ pour au moins un $\varepsilon > 0$.
- (ii) Plus généralement, on a le même résultat en remplaçant, dans l'énoncé de (i), $A_\emptyset$ par un tore σ -déployé maximal contenu dans M .

Démonstration. La fonction considérée vérifie l'égalité voulue d'après le Théorème 1. L'unicité provient du résultat (2.4), (i) en résulte. Le choix de $A_\emptyset$ (précédant l'équation (1.16)) étant indifférent, (ii) est immédiat. $\square$

Soit K un sous-groupe compact ouvert de G totalement décomposé relativement à M_0 au sens de [7, Section 1.1]. On note $\Lambda^-(P, K)$ l'ensemble des éléments strictement P -anti-dominants de A_M (i.e. dans A_M^-), qui sont (P, K) positifs au sens de [7, Section 3.1]. Les propriétés importantes de ces notions sont :

- L'ensemble $\Lambda^-(P, K)$ est non vide (cf. [8, Lemma 6.14 et l'observation de la fin de la preuve]).

- Les sous-groupes compacts ouverts totalement décomposés relativement à M_0 forment une base de voisinage de l'élément neutre de G (cf. [7, Lemma 1]).

Le résultat suivant, dû à J. Bernstein, est une forme renforcée d'un résultat de Casselman [9] (cf. (2.6)). C'est une conséquence de son Théorème de stabilisation (voir [7, Théorème 1 pour une preuve publiée]) et de la description du crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ entre V_P et $\check{V}_{\bar{P}}$ (cf. [7, Section 5] et [9], voir (2.6)) :

Soit K un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé relativement à M_0 et soit $\lambda \in \Lambda^-(P, K)$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour toute représentation lisse de G , (π, V) , pour tout $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$ invariants par K :

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2} \langle \check{v}, \pi(\lambda^n)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \rangle_P, \quad n \geq n_0. \quad (2.17)$$

On établit le résultat suivant en vue d'une application analogue à celle du Lemme 9 de [5].

Proposition 1. *Soit K un sous-groupe compact ouvert totalement décomposé relativement à M_0 et $\lambda \in \Lambda^-(P, K)$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,*

*Pour toute représentation admissible (π, V) de G , pour tout $\xi \in V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on ait :*

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2} \langle \xi, \pi(\lambda^n)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \rangle, \quad n \geq n_0.$$

Démonstration. D'après le Lemme 2, il existe un sous-groupe ouvert compact K' de K tel que :

Pour tout sous-groupe compact ouvert $K'' \subset K'$, pour toute représentation admissible (π, V) de G , pour tout élément ξ de V^{*H} et pour tout $v \in V^K$,

$$\langle \xi, \pi(\lambda^n)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K''})\xi, \pi(\lambda^n)v \rangle, \quad \lambda \in A_M^-. \quad (2.18)$$

D'après [7, Lemme 1], on peut prendre K'' totalement décomposé, ce que l'on fait. Alors, pour tout $v \in V^K$ et tout $\xi \in V^{*H}$, v et $\pi^*(e_{K''})\xi$ sont invariants par K'' , on peut donc appliquer le résultat (2.17). Donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de K'' , donc de K , et de λ tel que :

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2} \langle \pi^*(e_{K''})\xi, \pi(\lambda^n)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \rangle_P, \quad n \geq n_0. \quad (2.19)$$

D'après (2.18) et (2.19), et comme $\Lambda^-(P, K) \subset A_M^-$, on en déduit que pour toute représentation admissible (π, V) de G , pour tout $\xi \in V^{*H}$ et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\delta_P(\lambda^n)^{-1/2} \langle \xi, \pi(\lambda^n)v \rangle = \langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \rangle_P, \quad n \geq n_0.$$

Or d'après le Théorème 1 (ii), et en remarquant que K'' satisfait aux hypothèses du Lemme 2, on a :

$$\left\langle \check{j}_{\bar{P}}(\pi^*(e_{K''})\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \right\rangle_P = \left\langle j_P^*(\xi), \pi_P(\lambda^n)j_P(v) \right\rangle, \quad n \geq n_0. \quad (2.20)$$

La propriété résulte des équations (2.19) et (2.20). $\square$

2.2. Terme constant de fonctions sur G/H

Considérons l'espace :

$$C^\infty(G/H) = \bigcup_K C(K \setminus G/H),$$

où K parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G et où $C(K \setminus G/H)$ est l'ensemble des fonctions sur G/H invariantes à gauche par K .

Le groupe G agit sur $C^\infty(G/H)$ par la représentation régulière gauche L .

Pour toute représentation admissible (π, V_π) de G et tout $\xi \in (V_\pi^*)^H$, notons $\mathcal{A}(\pi, \xi)$ le sous-espace de $C^\infty(G/H)$ engendré par les fonctions $c_{\xi, v} : gH \mapsto \langle \pi^*(g)\xi, v \rangle$, $v \in V_\pi$.

Posons :

$$\mathcal{A}(G/H) := \bigcup_{(\pi, \xi)} \mathcal{A}(\pi, \xi), \quad (2.21)$$

où π parcourt les représentations admissibles de G et $\xi \in (V_\pi^*)^H$.

En utilisant les sommes directes de représentations, on voit que :

$$\mathcal{A}(G/H) = \sum_{(\pi, \xi)} \mathcal{A}(\pi, \xi), \quad (2.22)$$

où π parcourt les représentations admissibles de G et $\xi \in (V_\pi^*)^H$.

Le sous-espace $\mathcal{A}(G/H)$ de $C^\infty(G/H)$ est invariant par la représentation régulière gauche L .

On note que si $f \in \mathcal{A}(G/H)$, f est A_G -finie (cf. (2.5)).

Remarque 1. On peut se limiter à ce que π parcourt les représentations admissibles de type fini de G et $\xi \in (V_\pi^*)^H$ car tout vecteur d'une représentation admissible engendre une représentation admissible de type fini.

Proposition 2.

- (i) Si f est un élément de $\mathcal{A}(G/H)$, il existe un unique élément f_P de $\mathcal{A}(M/M \cap H)$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $m \in M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A_M^+(\varepsilon)$, on ait l'égalité :

$$\delta_P(ma)^{1/2} f(maH) = f_P(ma(M \cap H)).$$

On appelle f_P terme constant de f le long de P .

- (ii) L'application $f \mapsto f_P$ de $\mathcal{A}(G/H)$ dans $\mathcal{A}(M/M \cap H)$ est linéaire.

(iii) Si (π, V_π) est une représentation admissible de G , si $\xi \in (V_\pi^*)^H$, si $v \in V_\pi$, et si $f = c_{\xi, v}$, alors :

$$f_P(m(M \cap H)) = \langle \pi_P^*(m) j_P^*(\xi), j_P(v) \rangle, \quad m \in M.$$

Démonstration. Prouvons (i) et (iii). Soit $f \in \mathcal{A}(G/H)$, supposons que deux éléments f_P et f'_P de $\mathcal{A}(M/M \cap H)$ vérifient les conditions de la Proposition.

Pour tout $m \in M$, les fonctions sur A_M :

$$a \mapsto f_P(ma(M \cap H)) \quad \text{et} \quad a \mapsto f'_P(ma(M \cap H))$$

coincident sur $A_M^+(\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Le fait qu'elles soient toutes deux lisses et A_M -finies assure alors leur égalité d'après le résultat (2.4). D'où l'unicité de f_P s'il existe.

Si $f = c_{\xi, v}$, la fonction définie par $f_P(m(M \cap H)) = \langle \pi_P^*(m) j_P^*(\xi), j_P(v) \rangle$ convient d'après le Théorème 1.

Dans le cas où f est un élément quelconque de $\mathcal{A}(G/H)$, l'existence de f_P est claire par linéarité. Ceci achève de prouver (i) et (iii). La linéarité de (ii) résulte de l'unicité dans (i). $\square$

Soit (δ, V_δ) une représentation lisse de M . On étend l'action de M à P en la prenant triviale sur U . On considère l'ensemble $\text{ind}_P^G V_\delta$ des $\varphi : G \rightarrow V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_p^{-1/2}(m) \delta(m^{-1}) \varphi(g), \quad g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe G agit par la représentation régulière gauche L sur $\text{ind}_P^G V_\delta$.

Lemme 3. Pour $f \in \mathcal{A}(G/H)$, on définit l'application :

$$\begin{aligned} f_P^{\text{ind}} : G &\rightarrow \mathcal{A}(M/M \cap H) \\ g &\mapsto (L_{g^{-1}} f)_P. \end{aligned}$$

$$\text{Alors } f_P^{\text{ind}} \in \text{ind}_P^G \mathcal{A}(M/M \cap H). \quad (2.23)$$

Démonstration. Par linéarité, on se ramène à $f = c_{\xi, v}$, où $v \in V$, $\xi \in V^{*H}$ et (π, V) est une représentation admissible de type fini de G . Pour $g_1 \in G$:

$$(f_P^{\text{ind}}(g_1))(m(M \cap H)) = \langle \pi_P^*(m) j_P^*(\xi), j_P(\pi(g_1^{-1})v) \rangle.$$

Montrons que $f_P^{\text{ind}}(g_1 mu) = \delta_p^{-1/2}(m) L_{m^{-1}} f_P^{\text{ind}}(g_1)$, $g_1 \in G$, $m \in M$, $u \in U$.

Cela revient à montrer que pour $m' \in M$:

$$(f_P^{\text{ind}}(g_1 mu))(m'(M \cap H)) = \delta_p^{1/2}(m^{-1}) (L_{m^{-1}} f_P^{\text{ind}}(g_1))(m'(M \cap H)). \quad (2.24)$$

On a :

$$\begin{aligned}
(f_P^{\text{ind}}(g_1 mu))(m'(M \cap H)) &= \langle \pi_P^*(m') j_P^*(\xi), j_P(\pi(u^{-1} m^{-1} g_1^{-1})v) \rangle \\
&= \langle \pi_P^*(m') j_P^*(\xi), j_P(\pi(m^{-1} g_1^{-1})v) \rangle \\
&= \delta_P^{1/2}(m^{-1}) \langle \pi_P^*(m') j_P^*(\xi), \pi_P(m^{-1}) j_P(\pi(g_1^{-1})v) \rangle \\
&= \delta_P^{1/2}(m^{-1}) \langle \pi_P^*(mm') j_P^*(\xi), j_P(\pi(g_1^{-1})v) \rangle \\
&= \delta_P^{1/2}(m^{-1}) (f_P^{\text{ind}}(g_1))(mm'(M \cap H))
\end{aligned}$$

d'où (2.24). Le Lemme en résulte. $\square$

2.3. Comportements asymptotiques de certains coefficients généralisés de représentations admissibles

On rappelle qu'on a fixé $A_\emptyset$, un tore σ -déployé maximal de G , et $P_\emptyset$ un σ -sous-groupe parabolique minimal contenant $A_\emptyset$.

Soit $\Sigma(G, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de G . Alors $\Sigma(G, A_\emptyset)$ est un système de racines dont le groupe de Weyl s'identifie au quotient du normalisateur dans G de $A_\emptyset$, $N_G(A_\emptyset)$, par son centralisateur $Z_G(A_\emptyset)$ (cf. [15, Proposition 5.9]).

On note $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$. On note $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Si Θ est une partie de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, on note $\langle \Theta \rangle_\emptyset$ le sous-système de $\Sigma(G, A_\emptyset)$ engendré par Θ , et P_Θ le sous-groupe parabolique de G pour lequel $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset) \cup \langle \Theta \rangle_\emptyset$ est l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de P_Θ . Alors :

$$P_\Theta \text{ contient } P_\emptyset \text{ et } P_\Theta \text{ est un } \sigma\text{-sous-groupe parabolique de } G, \quad (2.25)$$

en effet, comme les éléments de $A_\emptyset$ sont anti-invariants par σ , l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $\sigma(P_\Theta)$ est égal à l'ensemble des opposés des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de P_Θ .

Soit $0 < \varepsilon \leq 1$, on note pour $P = P_\Theta$:

$$A_\emptyset^-(P, < \varepsilon) := \{a \in A_\emptyset^-; |\alpha(a)|_F < \varepsilon, \alpha \text{ racine de } A_\emptyset \text{ dans } U_P\}. \quad (2.26)$$

Comme $\varepsilon \leq 1$, on a l'égalité :

$$A_\emptyset^-(P, < \varepsilon) = \{a \in A_\emptyset^-; |\alpha(a)|_F < \varepsilon, \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta\}. \quad (2.27)$$

Elle résulte immédiatement du fait que si α est une racine de $A_\emptyset$ dans U_P , $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} n_\beta \beta$, $n_\beta \in \mathbb{N}$, alors il existe $\beta_0 \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta$ tel que $n_{\beta_0} \neq 0$.

Ceci est cohérent avec les notations de l'introduction au sous-chapitre 0.3.

On définit $A_0^-(P, < \varepsilon) := \{a \in A_0^-; |\alpha(a)|_F < \varepsilon, \alpha \text{ racine de } A_0 \text{ dans } U_P\}$.

On suppose, pour la suite de ce sous-chapitre 2.3, que P contient $A_\emptyset$.

Théorème 2. Soit (π, V) une représentation admissible de G . Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\xi \in V^{*H}$,

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

En d'autres termes, si f est l'élément de $\mathcal{A}(G/H)$ défini par $f = c_{\xi,v}$, alors :

$$\delta_P(a)^{-1/2} f(a^{-1}H) = f_P(a^{-1}(M \cap H)), \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

On peut remplacer P par un σ -sous-groupe parabolique quelconque et $A_\emptyset$ par un tore σ -déployé maximal contenu dans P .

Démonstration. Soient $v \in V$ et K un sous-groupe compact ouvert tel que $v \in V^K$. On applique le Lemme 2 à $P = P_\emptyset$. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K' de K , tel que :

$$\langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_{M_\emptyset}^-.$$

Or $A_\emptyset^- \subset A_{M_\emptyset}^-$. Donc on a :

$$\langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-. \quad (2.28)$$

D'après [9, Théorème 4.3.3], il existe $0 < \varepsilon \leq 1$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \pi^*(e_{K'})\xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_0^-(P, < \varepsilon). \quad (2.29)$$

Donc d'après (2.28) et (2.29) :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_0^-(P, < \varepsilon) \cap A_\emptyset^-. \quad (2.30)$$

On a de plus l'égalité : $A_0^-(P, < \varepsilon) \cap A_\emptyset^- = A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$, d'où :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle_P, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon). \quad (2.31)$$

Pour $a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$ fixé, la fonction définie sur $A_M \cap A_\emptyset$ par :

$$b \mapsto \langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba)j_P(v) \rangle_P$$

est une fonction lisse et $A_M \cap A_\emptyset$ -finie. Or, pour $b \in A_M^- \cap A_\emptyset$ et $a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$, on a $ba \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$. Donc, d'après (2.31) appliqué à $ba \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$ au lieu de a , on a l'égalité :

$$\delta_P(ba)^{-1/2} \langle \xi, \pi(ba)v \rangle = \langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba)j_P(v) \rangle_P, \quad b \in A_M^- \cap A_\emptyset.$$

D'après le Corollaire 1 du Théorème 1 appliqué à $v' := \pi(a)v$, on a alors :

$$\langle \check{j}_P(\pi^*(e_{K'})\xi), \pi_P(ba)j_P(v) \rangle_P = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(ba)j_P(v) \rangle, \quad b \in A_M^- \cap A_\emptyset, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

En joignant (2.31) à cette dernière égalité appliquée à $b = e$, on obtient :

$$\delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon). \quad \square$$

2.4. σ -Sous-groupes paraboliques

Donnons d'autres caractérisations des σ -sous-groupes paraboliques.

Soient A un tore déployé de G , et $\lambda \in \Lambda(A)$. On note P_λ le sous-groupe parabolique de G contenant A pour lequel les poids α de A dans l'algèbre de Lie de P_λ vérifient $|\alpha(\lambda)|_F \geq 1$.

On a une dualité :

$$\begin{aligned} \text{Rat}(A) \times X_*(A) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\alpha, \underline{\lambda}) &\mapsto \langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle \end{aligned}$$

caractérisée par : $\alpha \circ \underline{\lambda}(\varpi) = \varpi^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}$.

On note $P(\underline{\lambda})$ le sous-groupe parabolique de G contenant A dont les racines de A dans son algèbre de Lie sont les $\alpha \in \Sigma(G, A)$ tels que $\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle \geq 0$.

Remarque 2. $P(\underline{\lambda}) = P_\lambda$, où $\lambda := \underline{\lambda}(\varpi)$.

En effet, $P(\underline{\lambda})$ et P_λ sont deux sous-groupes paraboliques de G , donc il suffit de montrer qu'ils ont la même algèbre de Lie. Mais :

$$|\alpha(\lambda)|_F = |\alpha(\underline{\lambda}(\varpi))|_F = |\varpi^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}|_F = |\varpi|_F^{\langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle}.$$

Donc :

$$|\alpha(\lambda)|_F \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \alpha, \underline{\lambda} \rangle \geq 0.$$

D'où la remarque.

Lemme 4. Soient P un σ -sous-groupe parabolique de G , $M = P \cap \sigma(P)$ son sous-groupe de Levi σ -stable et $A_{M,\sigma}$ le plus grand tore σ -déployé du centre de M . Il existe $\lambda \in \Lambda(A_{M,\sigma})$ tel que $P = P_\lambda$. Alors M est égal au centralisateur dans G de λ .

Démonstration. D'après [15, Lemme 4.6] et en tenant compte de (1.13), il existe $\underline{\lambda} \in X_*(A)$ tel que $\sigma(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}^{-1}$, $P = P(\underline{\lambda})$ et $M = Z_G(\underline{\lambda})$.

Comme $M = Z_G(\underline{\lambda})$, $\lambda := \underline{\lambda}(\varpi)$ est un élément de $\Lambda(A_{M,\sigma})$. D'après la Remarque 2, on a $P = P_\lambda$. Clairement $Z_G(\underline{\lambda}) \subset Z_G(\lambda)$. Par ailleurs, comme $\sigma(\underline{\lambda}) = \underline{\lambda}^{-1}$, on a $\sigma(\lambda) = \lambda^{-1}$. De plus, $Z_G(\lambda) = Z_G(\lambda^{-1})$ et $\sigma(P_\lambda) = P_{\lambda^{-1}}$. Donc $Z_G(\lambda) \subset P_\lambda \cap \sigma(P_\lambda) = M = Z_G(\underline{\lambda})$. Finalement $Z_G(\lambda) = Z_G(\underline{\lambda})$. $\square$

Lemme 5.

- (i) Si $\lambda \in \Lambda(A_\emptyset)$ est $P_\emptyset$ -dominant, i.e. $|\alpha(\lambda)|_F \geq 1$, $\alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $P_\lambda = P_\Theta$, où $\Theta = \{\alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset); |\alpha(\lambda)|_F = 1\}$.
- (ii) Tout σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$ est de la forme P_Θ pour $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$.
- (iii) Tout σ -sous-groupe parabolique de G est conjugué par un élément de H à un σ -sous-groupe parabolique de G de la forme $x_i w.P_\Theta$, $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $w \in W(A_\emptyset)$, $i \in I$ (cf. 1.2 pour définition de I).

On peut remplacer $A_\emptyset$ par n'importe quel tore σ -déployé maximal et $P_\emptyset$ par n'importe quel σ -sous-groupe parabolique de G le contenant dans les trois premières assertions.

Démonstration. (i) est clair.

Montrons (ii) : soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$. D'après le Lemme 4, il est de la forme P_μ pour μ élément de $\Lambda(A_{M,\sigma})$. Or $A_{M,\sigma}$ est contenu dans un tore σ -déployé maximal $A'_\emptyset$ de G , donc $\mu \in \Lambda(A'_\emptyset)$. Comme $A_\emptyset$ et $A'_\emptyset$ sont σ -stable, ils sont contenus dans $M = P \cap \sigma(P)$. Alors $A_\emptyset$ et $A'_\emptyset$ sont deux tores σ -déployés maximaux de M , donc conjugués par un élément m de M (cf. [14, Proposition 1.16]). Posant $\lambda = m\mu m^{-1}$, on a $\lambda \in \Lambda(A_\emptyset)$ et $P_\lambda = m.P_\mu = P$ car $m \in M$. Enfin, comme P contient $P_\emptyset$, l'élément λ de $\Lambda(A_\emptyset)$ doit être $P_\emptyset$ -dominant. Alors (ii) résulte de (i).

On montre (iii) en reprenant les notations de 1.2. Soit P un σ -sous-groupe parabolique de G , alors P est conjugué par un élément de H à un sous-groupe parabolique de G de la forme P_λ , pour un élément λ de $\Lambda(A_i)$. Soit $\mu \in \Lambda(A_\emptyset)$ tel que $\lambda = x_i \mu x_i^{-1}$; alors $P = P_\lambda = x_i.P_\mu$. Alors il existe $v \in \Lambda(A_\emptyset)$ qui est $P_\emptyset$ -dominant, et $w \in W(A_\emptyset)$ tel que $wv = \mu$ et $x_i.P_\mu = x_i w.P_v$.

D'après (i), il existe $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ tel que $P_v = P_\Theta$; alors $P = x_i w.P_\Theta$ d'où (iii). $\square$

2.5. Transitivité du terme constant

Théorème 3. Soient $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $A_\emptyset$ et Q un σ -sous-groupe parabolique de M contenant $A_\emptyset$. On pose $P_Q := QU$ de sorte que P_Q est un σ -sous-groupe parabolique de G contenu dans P , on note M_{P_Q} son sous-groupe de Levi σ -stable. Soit (π, V) une représentation admissible de G et soit $\xi \in V^{*H}$, alors $j_{P_Q}^*(\xi) = j_Q^*(j_P^*(\xi))$.

Démonstration. Soit $P_{\emptyset,M}$ un σ -sous-groupe parabolique minimal de M contenant $A_\emptyset$ et contenu dans Q . Alors $P_{\emptyset,M}U$ est un σ -sous-groupe parabolique minimal de G . Notre choix de $P_\emptyset$ contenant $A_\emptyset$ étant indifférent, on peut supposer $P_{\emptyset,M}U$ égal à $P_\emptyset$. Alors $P_{\emptyset,M} = P_\emptyset \cap M$. On pose $\Delta_G := \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Delta_M := \Delta(P_{\emptyset,M}, A_\emptyset)$, $P = P_{\Theta_P}$ avec $\Theta_P \subset \Delta_G$ et $Q = P_{\Theta_Q}$ avec $\Theta_Q \subset \Delta_M$. Alors :

$$\Theta_P = \Delta_M \quad \text{et donc} \quad \Theta_Q \subset \Theta_P. \quad (2.32)$$

Soit (π, V) une représentation admissible de G . Soient $\xi \in V^{*H}$ et $v \in V$, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_{P_Q}(a) j_{P_Q}(v) \rangle = \delta_{P_Q}(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P_Q, < \varepsilon). \quad (2.33)$$

En remarquant que $j_{P_Q}(v) = j_Q(j_P(v))$, on a :

$$\langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_{P_Q}(a) j_{P_Q}(v) \rangle = \langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_Q(a) j_Q(j_P(v)) \rangle.$$

On remarque que dans le Théorème 2, on peut prendre $\varepsilon \leq 1$. Alors, d'après (2.27) et en appliquant le Théorème 2 au sous-groupe parabolique Q de M , à la représentation admissible de M , (π_P, V_P) , et à $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M \cap H}$, on trouve qu'il existe $0 < \varepsilon' \leq 1$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_Q(a)j_Q(j_P(v)) \rangle &= \delta_Q(a)^{-1/2} \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle, \\ a \in A_\emptyset, |\alpha(a)|_F &< \varepsilon', \alpha \in \Delta_M \setminus \Theta_Q \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1, \alpha \in \Delta_M. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En appliquant d'autre part le Théorème 2 au sous-groupe parabolique P de G , à (π, V) , représentation admissible de G , et à $\xi \in V^{*H}$, on trouve qu'il existe $0 < \varepsilon'' \leq 1$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a)j_P(v) \rangle &= \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \\ a \in A_\emptyset, |\alpha(a)|_F &< \varepsilon'', \alpha \in \Delta_G \setminus \Theta_P \text{ et } |\alpha(a)|_F \leq 1, \alpha \in \Delta_G. \end{aligned} \quad (2.35)$$

D'après (2.32), on déduit de (2.34) et de (2.35) que :

$$\begin{aligned} \langle j_Q^*(j_P^*(\xi)), \pi_Q(a)j_Q(j_P(v)) \rangle &= \delta_Q(a)^{-1/2} \delta_P(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle, \\ a \in A_\emptyset, |\alpha(a)|_F &< \min(\varepsilon', \varepsilon''), \alpha \in \Delta_G \setminus \Theta_Q, |\alpha(a)|_F \leq 1, \alpha \in \Delta_G. \end{aligned} \quad (2.36)$$

L'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de P_Q est, par définition de P_Q , la réunion disjointe de l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de U_P et dans celle de U_Q . Donc :

$$\delta_{P_Q}(a) = \delta_Q(a)\delta_P(a), \quad a \in A_\emptyset.$$

D'où (2.33) en posant $\varepsilon := \min(\varepsilon', \varepsilon'')$.

Or $A_{M_{P_Q}}^-(\varepsilon) \cap A_\emptyset \subset A_\emptyset^-(P_Q, < \varepsilon)$. Donc, d'après le Corollaire 1 du Théorème 1, on a :

$$j_{P_Q}^*(\xi) = j_Q^*(j_P^*(\xi)). \quad \square$$

On reprend les notations du Théorème précédent.

Corollaire 1. Soit f un élément de $\mathcal{A}(G/H)$, alors f_P est élément de $\mathcal{A}(M/M \cap H)$, et on peut considérer $(f_P)_Q$ élément de $\mathcal{A}(M_Q/M_Q \cap H)$. De plus, $f_{P_Q} = (f_P)_Q$.

2.6. Vecteurs distributions H -invariants cuspidaux

Définition 1. Soit (π, V) une représentation admissible de G et soit $\xi \in V^{*H}$, on dira que la paire (π, ξ) est H -cuspidale si pour tout σ -sous-groupe parabolique P de G , distinct de G , $j_P^*(\xi) = 0$.

Proposition 3. La paire (π, ξ) est H -cuspidale si et seulement si pour tout σ -sous-groupe parabolique P de G , distinct de G , égal à l'un des $x_i w.P_\Theta$, pour un $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, un $w \in W(A_\emptyset)$ et un $i \in I$ (voir notations en 1.1), $j_P^*(\xi) = 0$.

Démonstration. Supposons que pour tout σ -sous-groupe parabolique P de G distinct de G égal à l'un des $x_i w.P_\Theta$, pour un $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, un $w \in W(A_\emptyset)$ et un $i \in I$, on ait : $j_P^*(\xi) = 0$. Soit $P \neq G$ un σ -sous-groupe parabolique de G , alors d'après le Lemme 5 (iii), il existe $h \in H$, $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Theta \neq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $w \in W(A_\emptyset)$ et $i \in I$ tels que $h.P = x_i w.P_\Theta$. Et donc $j_{h.P}^*(\xi) = 0$.

On note $\bar{v}$ la classe d'un élément $v \in V$ dans $V_P := V/V(P)$ et $[v]$ sa classe dans $V_{h.P} := V/V(h.P)$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} T_h : V_P &\rightarrow V_{h.P} \\ j_P(v) &\mapsto j_{h.P}(\pi(h)v). \end{aligned}$$

T_h est bien définie, de plus, c'est un isomorphisme car $V(h.P) = \pi(h)V(P)$. En utilisant le Théorème 1, on montre par transport de structure que :

$$T_h^*(j_{h.P}^*(\xi)) = j_P^*(\xi).$$

Mais $j_{h.P}^*(\xi) = 0$ donc $j_P^*(\xi) = 0$. $\square$

Proposition 4. Soit (π, V) une représentation admissible de G , soit $\xi \in V^{*H}$, et soit P un σ -sous-groupe parabolique minimal de G parmi ceux tels que $j_P^*(\xi) \neq 0$, alors $(\pi_P^*, j_P^*(\xi))$ est $H \cap M$ -cuspidale.

Démonstration. Soit $Q \subset M$ un σ -sous-groupe parabolique de M , montrons que $j_Q^*(j_P^*(\xi)) = 0$. En reprenant les notations du Théorème 3, on a $j_Q^*(j_P^*(\xi)) = j_{P_Q}^*(\xi)$. Or $P_Q \subset \bar{P}$ et $P_Q \neq P$, par définition de P , on a donc $j_{P_Q}^*(\xi) = 0$, d'où la Proposition. $\square$

On rappelle qu'une représentation admissible de type fini de G , (π, V) , est cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique P de G , distinct de G , $j_P(V) = \{0\}$.

Proposition 5. Si (π, V) est une représentation admissible de type fini de G cuspidale et si $\xi \in V^{*H}$, alors (π, ξ) est H -cuspidale.

Démonstration. Soit P un σ -sous-groupe parabolique de G , comme $j_P^*(\xi)$ est une forme linéaire sur $j_P(V) = \{0\}$, elle est nulle. D'où la Proposition. $\square$

3. Majorations

3.1. Fonctions Θ_G et N_d , $d \in \mathbb{N}$ sur G/H

Fixons un plongement algébrique

$$\tau : G \rightarrow GL_n(F). \quad (3.1)$$

On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K_0) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F (cf. [23, I.1]). Pour $g \in G$, écrivons :

$$\tau(g) = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \quad \tau(g^{-1}) = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Posons

$$\|g\| = \sup_{i,j} \sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F). \quad (3.2)$$

On a (cf. [23, I.1]) :

$$\begin{aligned} \|g\| &\geq 1 \quad \text{pour tout } g \in G, & \|g_1 g_2\| &\leq \|g_1\| \|g_2\| \quad \text{pour tout } g_1, g_2 \in G \quad \text{et} \\ \|k_1 g k_2\| &= \|g\| \quad \text{pour tout } k_1, k_2 \in K_0, \quad g \in G. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Avec les notations du Paragraphe 1.1 et (1.19), on rappelle que P_0 est un sous-groupe parabolique minimal de G que l'on a fixé. On note $(\varepsilon_{M_0}, \mathbb{C})$ la représentation triviale de M_0 , $(\pi_0, V_0) = (\text{ind}_{P_0}^G \varepsilon_{M_0}, \text{ind}_{P_0}^G \mathbb{C})$, e_0 l'unique élément de V_0 invariant par K_0 et tel que $e_0(e) = 1$, où e est l'élément neutre du groupe G .

Remarquons que $(\check{\pi}_0, \check{V}_0)$ est isomorphe à (π_0, V_0) . Pour $g \in G$, on pose :

$$\mathcal{E}(g) = \langle \pi_0(g)e_0, e_0 \rangle.$$

Alors $\mathcal{E}$ est bi-invariante par K_0 .

On dira que deux fonctions f_1 et f_2 définies sur un ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sont équivalentes sur un sous ensemble E' de E (on notera $f_1(x) \asymp f_2(x)$, $x \in E'$), s'il existe $C, C' > 0$ tels que :

$$C' f_2(x) \leq f_1(x) \leq C f_2(x), \quad x \in E'. \quad (3.4)$$

Lemme 6. Avec les notations de (1.9), il existe $C_1, C_2 > 0$ et $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, on ait :

$$C_1 \delta_{y.P_0}(m')^{1/2} (1 + \log \|m'\|)^{-d_1} \leq \mathcal{E}(m') \leq C_2 \delta_{y.P_0}(m')^{1/2} (1 + \log \|m'\|)^{d_2}, \quad m' \in y.\bar{M}_0^+.$$

On a la même inégalité en remplaçant P_0 par $\bar{P}_0$ et $\bar{M}_0^+$ par $\bar{M}_0^-$.

Démonstration. On rappelle le Lemme II.1.2 de [23] :

Il existe $d \in \mathbb{N}$ et, pour tous $g_1, g_2 \in G$, il existe $c > 0$ tels que, pour tout $g \in G$, on ait :

$$\mathcal{E}(g_1 g g_2) \leq c \mathcal{E}(g) (1 + \log \|g\|)^d. \quad (3.5)$$

On l'applique à ymy^{-1} (resp. $y^{-1}ymy^{-1}y$) pour obtenir l'inégalité de droite (resp. de gauche) suivante. Et du fait de la finitude de $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, il existe $c_1, c_2 > 0$ et $d_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$c_1 (1 + \log \|ymy^{-1}\|)^{-d_1} \mathcal{E}(m) \leq \mathcal{E}(ymy^{-1}) \leq c_2 (1 + \log \|m\|)^{d_1} \mathcal{E}(m), \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \quad m \in M_0. \quad (3.6)$$

De plus, d'après [23, Lemme II.1.1], il existe $c'_1, c'_2 > 0$ et $d'_1 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$c'_1 \delta_{P_0}(m)^{1/2} \leq \mathcal{E}(m) \leq c'_2 \delta_{P_0}(m)^{1/2} (1 + \log \|m\|)^{d'_1}, \quad m \in \bar{M}_0^+. \quad (3.7)$$

En appliquant (3.7) à (3.6), on obtient l'existence de $C_1, C_2 > 0$ et $d_1, d'_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout élément y de $\mathcal{W}_{M_0}^G$ et pour tout élément m de $\overline{M}_0^+$, on ait :

$$C_1 \delta_{P_0}(m)^{1/2} (1 + \log \|ymy^{-1}\|)^{-d_1} \leq \mathcal{E}(ymy^{-1}) \leq C_2 \delta_{P_0}(m)^{1/2} (1 + \log \|m\|)^{d_1 + d'_1}.$$

Or

$$\delta_{P_0}(m) = \delta_{y.P_0}(ymy^{-1}), \quad y \in \mathcal{W}_{M_0}^G, \quad m \in \overline{M}_0^+,$$

et il existe $C'_2 > 0$ tel que :

$$1 + \log \|m\| \leq C'_2 (1 + \log \|ymy^{-1}\|), \quad y \in \mathcal{W}_{M_0}^G, \quad m \in M_0,$$

puisque $\|m\| \leq \|y^{-1}\| \|ymy^{-1}\| \|y\|$. Donc quitte à changer C'_2 , l'assertion est démontrée.

L'assertion sur $\tilde{P}_0$ est immédiate. $\square$

On pose :

$$\|gH\| := \|g\sigma(g^{-1})\|, \quad g \in G. \quad (3.8)$$

Grâce à (3.3), on voit que si Ω' est une partie compacte de G ,

$$\|\omega gH\| \asymp \|gH\|, \quad \omega \in \Omega', \quad g \in G. \quad (3.9)$$

On définit les fonctions Θ_G et N_d , $d \in \mathbb{N}$, par :

$$\Theta_G(gH) = (\mathcal{E}(g\sigma(g^{-1})))^{1/2}, \quad g \in G, \quad (3.10)$$

et

$$N_d(gH) = (1 + \log \|gH\|)^d, \quad g \in G. \quad (3.11)$$

On notera N au lieu de N_1 .

En utilisant le fait que tous les tores déployés maximaux du centralisateur $M_\emptyset$ de $A_\emptyset$ sont conjugués entre eux par des éléments de $M_\emptyset$, on voit que si n est un élément du normalisateur de $A_\emptyset$ dans G , $N_G(A_\emptyset)$, il existe un élément z de $M_\emptyset$ tel que zn normalise A_0 . On en déduit que tout automorphisme de $\mathfrak{a}_\emptyset$ induit par un élément de $N_G(A_\emptyset)$ préserve la restriction du produit scalaire de $\mathfrak{a}_0$ à $\mathfrak{a}_\emptyset$ d'après (1.7). Si deux éléments y, y' de $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ vérifient $yA_\emptyset y^{-1} = y'A_\emptyset y'^{-1}$, on a $y'^{-1}y \in N_G(A_\emptyset)$. Il résulte de ce qui précède :

$$\text{Si } y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \text{ le produit scalaire sur } y.\mathfrak{a}_\emptyset \text{ déduit de celui de } \mathfrak{a}_\emptyset \text{ ne dépend que de } y.\mathfrak{a}_\emptyset. \text{ On le note encore } (|\cdot|) \text{ et } \|\cdot\| \text{ la norme qu'on en déduit.} \quad (3.12)$$

Si x est un élément de G tel que $x.A_\emptyset = A_i$, l'action par conjugaison induit une application linéaire de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{a}_i$ notée $X \mapsto x.X$ et caractérisée par (cf. (1.22)) :

$$H_{M_i}(xax^{-1}) = x.H_{M_\emptyset}(a), \quad a \in A_\emptyset,$$

où $M_i := x_i M_\emptyset x_i^{-1}$.

Pour $a \in A_\emptyset$ et $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, on notera $a_y := ya_y^{-1}$ et on remarque qu'alors $a_y \sigma(a_y)^{-1} = a_y^2$ car $y.A_\emptyset$ est égal à A_i pour un $i \in I$ (cf. Paragraphe 1.2), donc $y.A_\emptyset$ est σ -déployé.

Lemme 7. Soit Ω' une partie compacte de G .

(i) Pour tout $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$:

$$1 + \log \|m'\| \asymp 1 + |H_{y.M_0}(m')|, \quad m' \in y.M_0.$$

(ii) On a l'égalité :

$$H_{y.M_0}(a_y^2) = 2y.H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a), \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \quad a \in A_\emptyset.$$

(iii) On a :

$$N(\omega a y^{-1} H) \asymp (1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|), \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Il existe des constantes $c, C, c', C' > 0$ telles que :

$$C e^{c|H_{M_0}(a)|} \leq \| \omega a y^{-1} H \| \leq C' e^{c'|H_{M_0}(a)|}, \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

(iv) Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a :

$$N_d(a_y H) \asymp N_d(a H), \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G, \quad a \in A_\emptyset^-.$$

Démonstration. (i) cf. [23, I.1(6)], en remarquant que la formule reste vraie pour $y.M_0$.

(ii) On a :

$$H_{y.M_0}(a_y^2) = y.H_{M_0}(a^2) = 2y.H_{M_0}(a) = 2y.H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a),$$

la dernière égalité provenant du fait que $a \in A_\emptyset$.

(iii) Montrons qu'il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que :

$$C(1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|) \leq N(\omega a y^{-1} H) \leq C'(1 + |H_{M_{\emptyset,\sigma}}(a)|), \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \quad (3.13)$$

On a :

$$N(gH) = 1 + \log \|\omega y^{-1} a_y \sigma(a_y)^{-1} \sigma(y) \sigma(\omega)^{-1}\|, \quad g = \omega a y^{-1}, \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G,$$

d'où :

$$N(gH) \leq 1 + \log \|\omega\| + \log \|y^{-1}\| + \log \|a_y^2\| + \log \|\sigma(y)\| + \log \|\sigma(\omega)^{-1}\|,$$

$g = \omega a y^{-1}$, $\omega \in \Omega'$, $a \in A_{\emptyset}^{-}$, $y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$.

Par compacité de Ω' et finitude de $\mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$, il existe $c > 0$ tel que :

$$N(gH) \leq c + \log \|a_y^2\|, \quad g = \omega a y^{-1}, \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

On en déduit l'inégalité de droite de l'équation (3.13) en combinant (i) et (ii). L'inégalité de gauche se démontre de la même façon en partant de l'égalité

$$a_y \sigma(a_y)^{-1} = y \omega^{-1} g \sigma(g)^{-1} \sigma(\omega) \sigma(y)^{-1}.$$

L'autre inégalité de (iii) est obtenue en exponentiant les inégalités de (3.13).

(iv) Il suffit de montrer l'assertion pour $d = 1$. Soit $y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$, en prenant $\Omega' = \{y\}$ dans (iii), on a :

$$N(y a y^{-1} H) \asymp 1 + |H_{M_{\emptyset, \sigma}}(a)|, \quad a \in A_{\emptyset}^{-},$$

et, en appliquant à nouveau (iii) à $y = e$ et $\Omega' = \{e\}$, on obtient :

$$1 + |H_{M_{\emptyset, \sigma}}(a)| \asymp N(aH), \quad a \in A_{\emptyset}^{-},$$

d'où (iv) d'après la finitude de $\mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$. $\square$

Proposition 6.

- (i) Θ_G est $K_0 \cap \sigma(K_0)$ invariante à gauche.
- (ii) Soit Ω' une partie compacte de G . Il existe $C, C' > 0$ et $d, d' \in \mathbb{N}$ tels que :

$$C \delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^{1/2}(a) N_{-d}(aH) \leq \Theta_G(gH) \leq C' \delta_{\bar{P}_{\emptyset}}^{1/2}(a) N_{d'}(aH),$$

$$g = \omega a y^{-1}, \quad \omega \in \Omega', \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

Démonstration. (i) est clair.

(ii) Par compacité de Ω' , il existe un ensemble fini F tel que $\Omega' \subset (K_0 \cap \sigma(K_0))F$. Par invariance de Θ_G à gauche par $K_0 \cap \sigma(K_0)$ et par finitude de F , on se réduit à étudier $\Theta_G(\omega a y^{-1} H)$, $a \in A_{\emptyset}^{-}$, $y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$ pour $\omega \in F$ fixé. On le fixe. On a :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1} H) = \left(\Xi(\omega y^{-1} a_y^2 \sigma(y) \sigma(\omega)^{-1}) \right)^{1/2}, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

Montrons l'inégalité de droite de (ii). D'après [23, Lemme II.1.2] (cf. (3.5)) (appliqué à $g_1 = \omega y^{-1}$ et $g_2 = \sigma(y) \sigma(\omega)^{-1}$) et du fait de la finitude de $\mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G$, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $c' > 0$ tels que :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1} H)^2 \leq c' \Xi(a_y^2) N_d(a_y H), \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

En appliquant l'inégalité de droite du Lemme 6 à $m' = a_y^2 \in y \cdot A_{\emptyset}^{-} \subset y \cdot \overline{M}_0^{-}$, il existe $d_2 \in \mathbb{N}$ et $c'' > 0$ tels que :

$$\Theta_G(\omega a y^{-1} H)^2 \leq c'' \delta_{y, \bar{P}_0}^{1/2}(a_y^2) N_{d+d_2}(a_y H), \quad a \in A_\emptyset^-, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Or :

$$\delta_{y, \bar{P}_0}(a_y^2) = \delta_{\bar{P}_0}(a^2) = \delta_{\bar{P}_0}(a)^2, \quad a \in A_\emptyset^-, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

La dernière égalité provenant du fait que $a \in A_\emptyset$. On obtient alors l'inégalité voulue en appliquant le Lemme 7 (iv).

L'inégalité de gauche se démontre de la même façon en partant de l'égalité :

$$a_y \sigma(a_y)^{-1} = y \omega^{-1} g \sigma(g)^{-1} \sigma(\omega) \sigma(y)^{-1}, \quad g = \omega a y^{-1}, \omega \in \Omega', a \in A_\emptyset^-, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G,$$

et en utilisant l'inégalité de gauche du Lemme 6. $\square$

Lemme 8. Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur G/H à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telles que :

(a) Pour tout $x \in G$ fixé, on ait :

$$f_i(xgH) \asymp f_i(gH), \quad g \in G, i = 1, 2.$$

(b) Pour un sous-groupe compact ouvert K , on ait $f_i(kgH) \asymp f_i(gH)$, $g \in G, k \in K, i = 1, 2$.

(c) Pour tout $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, on ait :

$$f_i(y a y^{-1} H) \asymp f_i(aH), \quad a \in A_\emptyset^-, i = 1, 2.$$

(d) $f_1(aH) \asymp f_2(aH)$, $a \in A_\emptyset^-, i = 1, 2$.

Alors f_1 et f_2 sont équivalentes sur G/H .

Démonstration. On fixe Ω comme dans la décomposition de Cartan (1.21) et on utilise cette décomposition de l'espace symétrique G/H . Par compacité de Ω , il existe un ensemble fini F' tel que $\Omega \subset K F'$. Par finitude de $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ et F' , il suffit de montrer que f_1 et f_2 sont équivalentes sur $\bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} y A_\emptyset^- y^{-1} H$ d'après (a) et (b). Ce qui équivaut à montrer que f_1 et f_2 sont équivalentes sur $A_\emptyset^-$ d'après (c), ce qui est donné par (d). $\square$

3.2. Comparaison des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{BD}$

On note $\Sigma(G, A_0)$ (resp. $\Sigma(P_0, A_0)$ ou $\Sigma(P_0)$) l'ensemble des racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de G (resp. P_0). On rappelle que l'on note $\Delta(P_0)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_0)$. Si Θ est une partie de $\Delta(P_0)$, on note $\langle \Theta \rangle$ le sous-système de $\Sigma(G, A_0)$ engendré par Θ et $P_{\langle \Theta \rangle}$ le sous-groupe parabolique de G contenant P_0 pour lequel $\Sigma(P_0) \cup \langle \Theta \rangle$ est l'ensemble des racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de $P_{\langle \Theta \rangle}$. On définit $\Theta_\emptyset$ par l'égalité :

$$P_\emptyset = P_{\langle \Theta_\emptyset \rangle},$$

On écrit

$$\Delta(P_0) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad \Delta(P_0) \setminus \Theta_\emptyset = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\},$$

avec $k \geq l$.

On note $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathfrak{a}_0^*$ les poids fondamentaux de $\Sigma(P_0, A_0)$. Ils sont nuls sur $\mathfrak{a}_G$. Alors pour $i = 1, \dots, l$, $\delta_i \in \mathfrak{a}_{M_0}^*$. Reprenons les notations de [3, Paragraphe 2.7]. Il existe des entiers $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_i \delta_i$ corresponde à un plus haut poids $\Lambda_i \in \text{Rat } M_0$ d'une représentation rationnelle irréductible de dimension finie (π_i, V_i) de G de vecteur de plus haut poids v_i relativement à P_0 (cf. 1.3.2). La droite Fv_i est $P_\emptyset$ -invariante (cf. [3, (2.23) et ce qui suit]). On note v_i^* l'unique élément de V_i^* de poids Λ_i^{-1} sous M_0 et vérifiant $\langle v_i^*, v_i \rangle = 1$. Pour $i = 1, \dots, l$, on notera $\tilde{\Lambda}_i := \Lambda_i(\Lambda_i^{-1} \circ \sigma)$ et $(\tilde{\pi}_i, \tilde{V}_i)$ la représentation rationnelle de G $(\pi_i \otimes (\pi_i^* \circ \sigma), V_i \otimes V_i^*)$. On note $\tilde{v}_i := v_i \otimes v_i^*$ qui est de poids $\tilde{\Lambda}_i$ sous $\tilde{\pi}_i$ relativement à M_0 . Alors, il existe un vecteur H -invariant non nul sur $\tilde{\pi}_i^*$ dans $\tilde{V}_i^* = (V_i \otimes V_i^*)^* \simeq V_i^* \otimes V_i \simeq \text{End } V_i$, égal à l'identité, $\tilde{e}_{i,H}^*$, vérifiant $\langle \tilde{e}_{i,H}^*, \tilde{v}_i \rangle = 1$. On notera $\tilde{\delta}_i := \delta_i - \delta_i \circ \sigma$, alors $\tilde{\delta}_i \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$. Pour $i = 1, \dots, l$, on fixe une base de V_i formée de vecteurs poids sous A_0 , ce qui permet de définir une norme sur V_i notée $\| \cdot \|_i$ en prenant le maximum des valuations des coordonnées dans cette base, puis une norme sur $\text{End } V_i = \tilde{V}_i^*$ encore notée $\| \cdot \|_i$.

On pose, pour $g \in G$:

$$\|gH\|_i = \|\tilde{\pi}_i^*(g)\tilde{e}_{i,H}^*\|_i = \|\pi_i(g^\sigma g^{-1})\|_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad (3.14)$$

$$\|gH\|_0 = e^{|H_{G,\sigma}(g)|}, \quad (3.15)$$

où l'on a muni $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ de la norme provenant du produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$.

On définit :

$$\|gH\|_{BD} = \prod_{i=0}^l \|gH\|_i, \quad g \in G. \quad (3.16)$$

Proposition 7. *Il existe $c, C, c', C' > 0$ tels que :*

$$C\|gH\|_{BD}^c \leq \|gH\| \leq C'\|gH\|_{BD}^{c'}, \quad g \in G. \quad (3.17)$$

Démonstration. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension finie et soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\text{End } V$ déduite d'une norme sur V . Alors si Γ est une partie compacte de $GL(V)$, on a :

$$\|\gamma T \gamma'\| \asymp \|T\|, \quad T \in \text{End } V. \quad (3.18)$$

Par ailleurs,

$$-|H_{G,\sigma}(g)| + |H_{G,\sigma}(g')| \leq |H_{G,\sigma}(gg')| \leq |H_{G,\sigma}(g)| + |H_{G,\sigma}(g')|, \quad g, g' \in G. \quad (3.19)$$

Tenant compte de la deuxième égalité de (3.14), de (3.18) et de (3.19), et en écrivant $\omega a y^{-1} = \omega y^{-1}(y a y^{-1})$, on déduit de ce qui précède :

$$\|\omega a y^{-1} H\|_{BD} \asymp \|y a y^{-1} H\|_{BD}, \quad \omega \in \Omega, \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_0}^G.$$

Et d'après (3.3) :

$$\|\omega a y^{-1} H\| \asymp \|y a y^{-1} H\|, \quad \omega \in \Omega, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

Montrons que :

$$\|y a y^{-1} H\| \asymp \|a H\|, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G. \quad (3.20)$$

En effet, l'égalité $\sigma(a_y) = a_y^{-1}$ implique $\|y a y^{-1} H\| = \|a_y^2\|$, donc $\|y a y^{-1} H\| = \|y a^2 y^{-1}\|$. Or, d'après (3.3) :

$$\|y a^2 y^{-1}\| \asymp \|a^2\| = \|a H\|, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G.$$

D'où (3.20), ce qui implique :

$$\|\omega a y^{-1} H\| \asymp \|a H\|, \quad \omega \in \Omega, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad y \in \mathcal{W}_{M_{\emptyset}}^G. \quad (3.21)$$

On a le même résultat pour $\|_{BD}$.

Tenant compte de la décomposition de Cartan (1.21), on est ramené à prouver les inégalités de la Proposition pour $g = a \in A_{\emptyset}^{-}$.

Pour $i = 1, \dots, l$ on fixe une base, $f_{i,1}, \dots, f_{i,r}$, de $\tilde{V}_i^*$ formée de vecteurs poids sous A_0 telle que $f_{i,1} = v_i^* \otimes v_i$ (donc de poids $\tilde{\Lambda}_i^{-1}$ sous $\tilde{\pi}_i^*$) et telle que $\tilde{e}_{i,H} = \sum_{j=1}^r c_{i,j} f_{i,j}$, où $c_{i,1} = 1$ et pour $j = 2, \dots, r$, $c_{i,j} = 0$ ou 1. On note $\|\cdot\|'_i$ la norme sur $\tilde{V}_i^*$ qu'on en déduit. D'après l'équivalence des normes en dimension finie, $\|\cdot\|_i \asymp \|\cdot\|'_i$. Alors, en utilisant la première égalité de (3.14), on a :

$$\|a H\|_i \asymp \left\| \sum_{j=1}^r c_{i,j} \tilde{\pi}_i^*(a) f_{i,j} \right\|'_i, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}.$$

Soit encore :

$$\|a H\|_i \asymp \left\| \tilde{\Lambda}_i^{-1}(a) f_{i,1} + \sum_{j=2}^r c_{i,j} \tilde{\pi}_i^*(a) f_{i,j} \right\|'_i, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}.$$

Comme (π_i, V_i) est une représentation de plus haut poids Λ_i , l'inspection des poids sous $A_{\emptyset}$ de $\tilde{\pi}_i = \pi_i \otimes (\pi_i^* \circ \sigma)$ montre que $|\tilde{\Lambda}_i^{-1}(a)|_F = e^{-n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a))}$ est la plus grande valuation des valeurs propres de $\tilde{\pi}_i(a)$ pour $a \in A_{\emptyset}^{-}$. Puisque pour $i = 2, \dots, r$, $c_{i,j} = 0$ ou 1, on a donc :

$$\|a H\|_i \asymp e^{-n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a))}, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}, \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.22)$$

D'où :

$$\|a H\|_{BD} \asymp e^{-\sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a)) + |H_{G,\sigma}(a)|}, \quad a \in A_{\emptyset}^{-}. \quad (3.23)$$

On note $\mathfrak{a}_{\emptyset, G} := \mathfrak{a}_{\emptyset} \cap \mathfrak{a}_G$, $\mathfrak{a}_{\emptyset}^G := \mathfrak{a}_{M_{\emptyset}}^G \cap \mathfrak{a}_{\emptyset}$ (cf. (1.4)), $\bar{\mathfrak{a}}_{\emptyset}^+ := \bar{\mathfrak{a}}_{P_{\emptyset}}^+ \cap \mathfrak{a}_{\emptyset}$ et $\mathfrak{a}_{\emptyset}^{*+} := \mathfrak{a}_{\emptyset}^* \cap \mathfrak{a}_{P_{\emptyset}}^{*+}$. On remarque que $\mathfrak{a}_{\emptyset}^{*+}$ est non vide car $\rho_{P_{\emptyset}} \in \mathfrak{a}_{\emptyset}^{*+}$: en effet, $\rho_{P_{\emptyset}}$ est élément de $\mathfrak{a}_{P_{\emptyset}}^{*+}$ et $\rho_{P_{\emptyset}} \in \mathfrak{a}_{\emptyset}^*$ car $\sigma(\rho_{P_{\emptyset}}) = -\rho_{P_{\emptyset}}$ puisque $P_{\emptyset}$ est un σ -sous-groupe parabolique.

Montrons que :

$$\begin{aligned} &\text{Pour } \mu \in \mathfrak{a}_{\emptyset}^{*+} \text{ et } X \in \bar{\mathfrak{a}}_{\emptyset}^+, \text{ si l'on note } X = X^G + X_G \text{ où } X^G \in \mathfrak{a}_{\emptyset}^G \text{ et } X_G \in \mathfrak{a}_{\emptyset, G}, \\ &\text{on a : } |X| \asymp \mu(X^G) + |X_G|, X \in \bar{\mathfrak{a}}_{\emptyset}^+. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En remarquant que la norme $|\cdot|$ sur $\mathfrak{a}_{\emptyset}$ est équivalente à la norme $X \mapsto |X^G| + |X_G|$, où $X = X^G + X_G$, avec $X^G \in \mathfrak{a}_{\emptyset}^G$ et $X_G \in \mathfrak{a}_{\emptyset, G}$ on se ramène à prouver qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 |X| > \mu(X) > C_2 |X|, \quad X \in \bar{\mathfrak{a}}_{\emptyset}^+ \cap \mathfrak{a}_{\emptyset}^G,$$

ce qui résulte du fait que la fonction μ est continue et ne s'annule pas sur le compact $\{X \in \bar{\mathfrak{a}}_{\emptyset}^+ \cap \mathfrak{a}_{\emptyset}^G; |X| = 1\}$. C'est une conséquence du fait que les poids fondamentaux sont des produits scalaires positifs ou nuls.

On applique (3.24) à $\mu := \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i$ et $X := -H_{M_0}(a)$, $a \in A_{\emptyset}^-$. Alors $X_G = -H_{G, \sigma}(a)$ et $\tilde{\delta}_i(X) = \tilde{\delta}_i(X^G)$, on obtient :

$$-\sum_{i=1}^l n_i \tilde{\delta}_i(H_{M_0}(a)) + |H_{G, \sigma}(a)| \asymp |-H_{M_0}(a)|, \quad a \in A_{\emptyset}^-.$$

En exponentiant cette dernière équivalence jointe à (3.23), on trouve qu'il existe des constantes $c_1, C_1, c'_1, C'_1 > 0$ telles que :

$$C_1 e^{c_1 |H_{M_0}(a)|} \leq \|aH\|_{BD} \leq C'_1 e^{c'_1 |H_{M_0}(a)|}, \quad a \in A_{\emptyset}^-. \quad (3.25)$$

Or, d'après le Lemme 7 (iii), on obtient des inégalités similaires pour $\|aH\|$ et ces inégalités conduisent au résultat voulu. $\square$

3.3. Majorations de certains coefficients généralisés de représentations admissibles de type fini

Théorème 4.

- (i) Soit (π, V) une représentation admissible de type fini de G et soit $\xi \in V^{*H}$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C \|gH\|^c, \quad g \in G.$$

- (ii) Si (π, V) une représentation bornée irréductible de G et $\xi \in V^{*H}$, alors pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C, \quad g \in G.$$

Démonstration. (i) Montrons le Théorème par récurrence sur la dimension de G . Si $\dim G = 0$, le Théorème est trivial. Supposons maintenant qu'il soit vrai pour tout autre groupe linéaire algébrique réductif et connexe de dimension strictement inférieure à celle de G et montrons le pour G . En utilisant le fait que :

$$\langle \pi^*(g)\xi, \pi(x)v \rangle = \langle \pi^*(x^{-1}g)\xi, v \rangle, \quad x, g \in G, \quad v \in V,$$

et grâce à (3.9), on se ramène à montrer l'inégalité de (i) pour un ensemble fini de générateurs de V . Donc il suffit de montrer que :

Pour tout $v \in V$, il existe $C > 0$ et $c > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C \|gH\|^c, \quad g \in G. \quad (3.26)$$

Soit $v \in V$.

(a) Montrons d'abord que :

Il existe $C > 0$ et $c > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C \|aH\|^c, \quad a \in A_\emptyset^-. \quad (3.27)$$

Pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ et pour $0 < \varepsilon \leq 1$, on définit ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon)$ par :

$$\{a \in A_\emptyset; |\alpha(a)|_F < \varepsilon \text{ pour } \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Theta \text{ et } \varepsilon \leq |\alpha(a)|_F \leq 1 \text{ pour } \alpha \in \Theta\}.$$

Alors on a l'analogue de ce qui suit le Théorème 4.3.3 de [9] :

Pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, $A_\emptyset^-$ est l'union disjointe des ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon)$ lorsque Θ parcourt les sous ensembles de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. (3.28)

D'après le Théorème 2, pour chaque $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, il existe $\varepsilon_\Theta > 0$ tel que :

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a)j_{P_\Theta}(v) \rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P_\Theta, < \varepsilon_\Theta). \quad (3.29)$$

On pose $\varepsilon := \min_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} \varepsilon_\Theta$. D'après (3.28), $A_\emptyset^-$ est l'union disjointe des ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon)$ lorsque Θ parcourt les sous ensembles de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Or, on remarque que ${}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon) \subset A_\emptyset^-(P_\Theta, < \varepsilon)$ pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. D'après (3.29), et la définition de ε , on a donc :

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{-1/2} \langle \xi, \pi(a)v \rangle = \langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a)j_{P_\Theta}(v) \rangle, \quad a \in {}_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon), \quad \Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset).$$

Pour $\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ en utilisant la restriction de τ à M_Θ qui définit un plongement de M_Θ dans $GL_n(F)$ (cf. (3.1)), on définit la norme sur M_Θ et sur $M_\Theta \cap H$ (cf. (3.2) et (3.8)). Donc :

$$\|mM_\Theta \cap H\| = \|mH\|, \quad m \in M_\Theta. \quad (3.30)$$

Pour $\Theta \subset \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, $\Theta \neq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la représentation admissible de type fini $(\pi_{P_\Theta}, V_{P_\Theta})$ de M_Θ et à $j_{P_\Theta}^*(\xi) \in (V_{P_\Theta})^{*M_\Theta \cap H}$. De plus, comme $\varepsilon \in]0, 1]$, on a :

$$\delta_{P_\Theta}(a)^{1/2} \leq 1, \quad a \in_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon).$$

Alors :

Il existe $c_\Theta > 0$ et $C_\Theta > 0$ tels que :

$$\left| \langle j_{P_\Theta}^*(\xi), \pi_{P_\Theta}(a) j_{P_\Theta}(v) \rangle \right| \leq C_\Theta \|aH\|^{c_\Theta}, \quad a \in_\Theta A_\emptyset^-(\varepsilon), \quad (3.31)$$

puisque $\|a^{-1}M_\Theta \cap H\| = \|aM_\Theta \cap H\|$ et $\|aM_\Theta \cap H\| = \|aH\|$.

Soit $A_{\emptyset, G}$ le plus grand tore déployé de $A_\emptyset \cap A_G$. Alors $_{\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} A_\emptyset^-(\varepsilon)$ est compact modulo $A_{\emptyset, G}$ donc de la forme $\Omega' A_{\emptyset, G}$ où Ω' est une partie compacte de G . Montrons que :

Il existe $c_\Delta > 0$ et $C_\Delta > 0$ tels que :

$$\left| \langle \pi^*(a)\xi, v \rangle \right| \leq C_\Delta \|aH\|^{c_\Delta}, \quad a \in_{\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} A_\emptyset^-(\varepsilon). \quad (3.32)$$

L'application $a \rightarrow \langle \pi^*(a)\xi, v \rangle$ est invariante par un sous-groupe compact ouvert K' de $A_\emptyset$. Comme Ω' est contenu dans une réunion finie de classes à gauche de K' dans $A_\emptyset$, il suffit de prouver une inégalité du même type pour un nombre fini $v_1, \dots, v_l$ de translatés de v , mais seulement pour $A_{\emptyset, G}$. Montrons-le.

Soit $i = 1, \dots, l$. Comme (π, V) est admissible, la restriction de la fonction $g \rightarrow \langle \pi^*(g)\xi, v_i \rangle$ à A_G est A_G -finie. D'après [23, I.2], il existe $\chi_1, \dots, \chi_m$, des caractères non ramifiés de A_G et $r > 0$ tels que :

$$\left| \langle \pi^*(a)\xi, v_i \rangle \right| \leq \text{Sup}(|\chi_1(a)|, \dots, |\chi_m(a)|) (1 + \log \|a\|)^r, \quad a \in A_G. \quad (3.33)$$

Mais si χ est un caractère non ramifié de A_G , il existe $\lambda \in (\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}}$ tel que :

$$\chi(a) = e^{\lambda(H_G(a))}, \quad a \in A_G.$$

Donc :

$$|\chi(a)| \leq e^{|\lambda| |H_G(a)|}, \quad a \in A_G, \quad (3.34)$$

où $|\lambda|$ est la norme de la forme linéaire λ . Mais (3.25) jointe à la Proposition 7 montre qu'il existe $c_0 > 0$ et $C_0 > 0$ tels que :

$$C_0 e^{c_0 |H_{M_0}(a)|} \leq \|aH\|, \quad a \in A_\emptyset^-. \quad (3.35)$$

Comme $H_{M_0}(a) = H_G(a)$, $a \in A_G$, on déduit alors de (3.34) et (3.35) qu'il existe $c_\chi > 0$ et $C_\chi > 0$ tels que :

$$|\chi(a)| \leq C_\chi \|aH\|^{c_\chi}, \quad a \in A_{\emptyset, G} \subset A_G \cap A_\emptyset^-.$$

L'inégalité voulue pour v_i résulte alors de (3.33), et de l'inégalité :

$$1 + \log x \leq x, \quad x \geq 1,$$

ce qui achève de prouver (3.32). Donc (3.31) est vraie aussi pour $\Theta = \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$.

Or $\|aH\| \geq 1$ (cf. (3.3)). On pose alors

$$c := \max_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} c_\Theta > 0 \quad \text{et} \quad C := \max_{\Theta \subseteq \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)} C_\Theta > 0.$$

En utilisant (3.28), on obtient (3.27).

(b) On reprend les notations de 1.2. Par un raisonnement similaire, on peut remplacer $A_\emptyset$ par l'un des $A_i := x_i A_\emptyset x_i^{-1}$ pour $i \in I$ dans (a). Toutefois, pour définir la norme sur $M_{i,\Theta} := x_i M_\Theta x_i^{-1}$, on doit utiliser le plongement $\tau \circ \text{Ad} x_i^{-1}$. Alors on a seulement :

$$\|m M_{i,\Theta} \cap H\| \asymp \|mH\|, \quad m \in M_{i,\Theta},$$

mais cela suffit à achever la démonstration de (3.27) pour A_i au lieu de $A_\emptyset$. Donc pour tout $v \in V$, il existe $c_i > 0$ et $C_i > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C_i \|aH\|^{c_i}, \quad a \in A_i^- := x_i A_\emptyset^- x_i^{-1}.$$

On souhaite obtenir une telle inégalité sur A_i et non sur A_i^- . Or, $A_\emptyset$ est la réunion d'ensembles $A_\emptyset^-$ lorsque $P_\emptyset$ décrit l'ensemble des σ -sous-groupes paraboliques contenant $A_\emptyset$. Le choix de $P_\emptyset$ étant indifférent dans ce qui précède et I étant fini, on en déduit que :

Pour tout $v \in V$, il existe $c > 0$ et $C > 0$ vérifiant :

$$|\langle \pi^*(a)\xi, v \rangle| \leq C \|aH\|^c, \quad a \in A_i, \quad i \in I. \quad (3.36)$$

On déduit de (1.21) que :

$$G = \bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega y^{-1} A_y H, \quad A_y = y A_\emptyset y^{-1}.$$

Soit $v \in V$ et K un sous-groupe compact ouvert tel que $v \in V^K$. Soit $g \in \Omega y^{-1} a_y H$, $y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, $a_y \in A_y$. Alors :

$$\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle \in \{ \langle \pi^*(a_y)\xi, \pi(y\omega^{-1})v \rangle, \quad \omega \in \Omega \}.$$

L'ensemble $y\Omega$ étant compact et v étant invariant par K , l'ensemble $\{ \langle \pi(y\omega^{-1})v, \omega \in \Omega \rangle$ est fini. Par conséquent, il existe un nombre fini d'éléments de V , indépendants de a_y , notés $v'_1, \dots, v'_r$ tels que :

$$\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle \in \{ \langle \pi^*(a_y)\xi, v'_j \rangle, \quad j = 1, \dots, r \}. \quad (3.37)$$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Comme A_y est égal à l'un des A_i , d'après (3.36) appliqué à v'_j au lieu de v , il existe $c_{y,j} > 0$ et $C_{y,j} > 0$ tels que :

$$|\langle \pi^*(a_y)\xi, v'_j \rangle| \leq C_{y,j} \|a_y H\|^{c_{y,j}}, \quad a_y \in A_y.$$

En prenant $C' := \max_{j \in \{1, \dots, r\}, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} C_{y,j}$ et $c' := \max_{j \in \{1, \dots, r\}, y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} c_{y,j}$, on obtient :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v \rangle| \leq C' \|a_y H\|^{c'}, \quad gH = \omega y^{-1} a_y H, \quad \omega \in \Omega, \quad a_y = y a y^{-1}, \quad a \in A_\emptyset^-, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G.$$

Or, d'après (3.20), pour $a \in A_\emptyset^-$, on a : $\|a_y H\| \asymp \|a H\|$ et d'après (3.21), pour $a \in A_\emptyset^-$, on a : $\|a H\| \asymp \|g H\|$. D'où (i).

(ii) Soit $v \in V$ fixé, d'après (3.37), il suffit de montrer que :

Pour tout $i \in I$, il existe $C_i > 0$ tel que :

$$|\langle \pi^*(a_i)\xi, v \rangle| \leq C_i, \quad a_i \in A_i. \quad (3.38)$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact tel que $v \in V^K$. D'après le Lemme 2, il existe un sous-groupe ouvert compact K' de K tel que :

$$\langle \pi^*(a_i^{-1})\xi, v \rangle = \langle \pi^*(a_i^{-1})\pi^*(e_{K'})\xi, v \rangle, \quad a_i \in A_i^- \subset A_{M_{i,\emptyset}}^-,$$

où $M_{i,\emptyset} := x_i M_\emptyset x_i^{-1}$. Or (π, V) , étant bornée, il existe $C'_i > 0$ tel que :

$$|\langle \pi^*(a_i^{-1})\pi^*(e_{K'})\xi, v \rangle| \leq C'_i, \quad a_i \in A_i^-.$$

On en déduit (3.38) en procédant comme dans la preuve de (3.36), et (ii) en résulte alors. $\square$

Remarque 3. Ce théorème permet de voir qu'une des hypothèses du Théorème 3 de [3] est toujours satisfaite.

4. Un analogue d'un Lemme de Langlands

4.1. Résultats préliminaires

Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$. Par abus de notation, pour $x \in G$, on note $x = k(x)m(x)u(x)$, $k(x) \in K_0$, $m(x) \in M$, $u(x) \in U$. On note p_M la projection de P sur M de noyau U . On note $K_{0,M} := p_M(P \cap K_0)$ qui est un sous-groupe compact de M . Alors $m(x)$ est défini modulo l'action à gauche de $K_{0,M}$. On remarque que $H_M(m(x))$ est bien défini et pour $\chi \in X(M)$, $\chi(m(x))$ l'est également. De plus,

$$\text{Si } \Omega \text{ est un compact de } G, \text{ l'ensemble } \{m(x) \mid x \in \Omega\} \text{ est inclus dans un compact de } M. \quad (4.1)$$

En effet, Ω est inclus dans un nombre fini de classes à gauche modulo K_0 , et on utilise ce qui précède.

Lemme 9.

- (i) Soit (π_Λ, V) une représentation rationnelle de G , de dimension finie, de plus haut poids $\Lambda \in \text{Rat}(M_0)$, ayant un vecteur, v_Λ , de plus haut poids Λ , et un vecteur, $e_{\Lambda, H}^*$, H -invariant dans V^* pour π_Λ^* , vérifiant $\langle e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle = 1$. On note λ (ou λ_Λ) l'élément de $\mathfrak{a}_0^*$ tel que $e^{\lambda(H_{M_0}(m))} = |\Lambda(m)|_F$ pour $m \in M_0$. On suppose de plus que λ est élément de $\mathfrak{a}_M^*$. Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda(H_M(m(h))) \geq C, \quad h \in H.$$

- (ii) Si $\chi \in X(M)_\sigma$, avec $\text{Re } \chi$ strictement P -dominant ; alors il existe $C' > 0$ tel que $|\chi(m(h))| \geq C', h \in H$.

Démonstration. (i) Soit $h \in H$. On déduit de l'invariance de $e_{\Lambda, H}^*$ par h^{-1} l'équation :

$$\langle \pi_\Lambda^*((u(h))^{-1}(m(h))^{-1}(k(h))^{-1})e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle = 1,$$

où l'on a écrit :

$$h = k(h)m(h)u(h). \quad (4.2)$$

Comme λ est élément de $\mathfrak{a}_M^*$, il existe (cf. e.g. [3, (2.23)]) un caractère rationnel, Λ_1 , de M , tel que :

$$\pi_\Lambda(m)v_\Lambda = \Lambda_1(m)v_\Lambda, \quad m \in M. \quad (4.3)$$

Il existe un élément λ_1 de $\mathfrak{a}_M^*$ tel que $e^{\lambda_1(H_M(m))} = |\Lambda_1(m)|_F, m \in M$. Donc :

$$e^{\lambda(H_{M_0}(m))} = e^{\lambda_1(H_M(m))}, \quad m \in M_0.$$

En utilisant (1.4) pour $M = M_0$ et $G = M$, on trouve que $\lambda_1 = \lambda$ et :

$$|\Lambda_1(m)|_F = e^{\lambda(H_M(m))}, \quad m \in M. \quad (4.4)$$

D'après (4.2), on a :

$$\langle \pi_\Lambda^*((k(h))^{-1})e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle = \langle \pi_\Lambda^*(m(h))\pi_\Lambda^*(u(h))\pi_\Lambda^*(h^{-1})e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle.$$

Mais $e_{\Lambda, H}^*$ est invariant par H et v_Λ vérifie (4.3) et est invariant par U , donc

$$\langle \pi_\Lambda^*((k(h))^{-1})e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle = \Lambda_1(m(h))^{-1}. \quad (4.5)$$

Pour des raisons de compacité, il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$|\langle \pi_\Lambda^*(k)e_{\Lambda, H}^*, v_\Lambda \rangle|_F \leq C', \quad k \in K_0.$$

De (4.4) et (4.5), on déduit :

$$e^{-\lambda(H_M(m(h)))} \leq C', \quad h \in H.$$

D'où l'assertion en prenant successivement l'inverse puis le logarithme de l'inégalité.

(ii) On a : $\operatorname{Re} \chi \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma})^*$. Soient χ_1 dans $X(M)_\sigma$ et χ_2 dans $X(G)_\sigma$ tels que $\operatorname{Re} \chi_1 \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$, $\operatorname{Re} \chi_2 \in (\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$ et $\operatorname{Re} \chi = \operatorname{Re} \chi_1 + \operatorname{Re} \chi_2$. Alors $|\chi| = |\chi_1| |\chi_2|$. D'autre part,

$$|\chi_2(m(h))| = 1, \quad h \in H.$$

En effet, puisque $|\chi_2| \in X(G)_\sigma$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,

$$|\chi_2(h)| = 1, \quad h \in H,$$

car $|\chi_2| \circ \sigma = |\chi_2|^{-1}$, donc $|\chi_2|(h) = |\chi_2|^{-1}(h)$, $h \in H$. Or :

$$|\chi_2|(h) = |\chi_2|(k(h)m(h)u(h)) = |\chi_2|(m(h)), \quad h \in H,$$

la dernière égalité provenant du fait que les caractères non ramifiés sont triviaux sur les sous-groupes compacts et les sous-groupes unipotents. On a donc :

$$|\chi(m(h))| = |\chi_1(m(h))|, \quad h \in H.$$

Or $\operatorname{Re} \chi_1 \in (\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$ donc, d'après [3, Remarque 1], il existe $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathfrak{a}_0^*$ tels que $\operatorname{Re} \chi_1 = \sum_{i=1}^k n_i \lambda_i$ et tels que pour $i = 1, \dots, k$, il existe une représentation rationnelle de G de plus haut poids Λ_i vérifiant les propriétés de (i) avec $\lambda_i := \lambda_{\Lambda_i}$. Puisque $\operatorname{Re} \chi$ est strictement P -dominant, les n_i sont positifs. On obtient alors :

$$|\chi(m(h))| = e^{\operatorname{Re} \chi_1(H_M(m(h)))} = \prod_{i=1}^k e^{n_i \lambda_i(H_M(m(h)))}, \quad h \in H.$$

D'où (ii) en appliquant (i) aux λ_i . $\square$

Lemme 10. Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que $\operatorname{Re} \chi$ soit strictement P -dominant. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in A_M$ vérifiant $H_M(a) \in -\bar{\mathfrak{a}}_P^+$ on ait :

$$|\chi(m(a^{-1}\bar{u}a))| \leq C |\chi(m(\bar{u}))|, \quad \bar{u} \in \bar{U} := \sigma(U).$$

Démonstration. Soit $\nu \in \mathfrak{a}_P^{*+}$ (cf.(1.8)) tel que l'on ait : $e^{\nu(H_M(m))} = |\chi(m)|$, $m \in M$. Il résulte de [10, (3.14)] qu'il existe $Y_P \in \mathfrak{a}_M$ tel que l'on ait :

$$H_M(m(\bar{u})) - H_M(m(a^{-1}\bar{u}a)) \in Y_P + {}^+\bar{\mathfrak{a}}_P, \quad \bar{u} \in \bar{U}, \quad a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{\mathfrak{a}}_P^+).$$

Comme ν est P -dominant, on a :

$$\nu(H_M(m(\bar{u})) - H_M(m(a^{-1}\bar{u}a))) \geq \nu(Y_P), \quad \bar{u} \in \bar{U}, \quad a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{\mathfrak{a}}_P^+).$$

Soit encore :

$$e^{v(H_M(m(a^{-1}\bar{u}a)))} \leq e^{-v(Y_P)} e^{v(H_M(m(\bar{u})))}, \quad \bar{u} \in \bar{U}, \quad a \in A_M \cap H_M^{-1}(-\bar{a}_P^+).$$

D'où le Lemme. $\square$

4.2. Une propriété asymptotique des intégrales d'Eisenstein

Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe-parabolique de G . Soit (δ, V_δ) une représentation admissible de type fini de M . On introduit pour $\chi \in X(M)_\sigma$, la représentation $\delta_\chi = \delta \otimes \chi$ de M . L'espace de δ_χ s'identifie à V_δ . On étend l'action de M à P en la prenant triviale sur U . On rappelle que $\text{ind}_P^G V_\delta$, noté aussi $I_\chi^P(\delta)$, est l'espace des applications $\varphi : G \rightarrow V_\delta$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que :

$$\varphi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m) \delta_\chi(m^{-1}) \varphi(g), \quad g \in G, m \in M, u \in U.$$

Le groupe G agit sur $I_\chi^P(\delta)$ par la représentation régulière gauche $\pi_{\delta, \chi}^P$. On note $\bar{I}^P(\delta)$ l'espace de $\text{ind}_{K_0 \cap P}^{K_0} \delta|_{K_0 \cap P}$. Alors la restriction des fonctions à K_0 détermine un isomorphisme de K_0 -modules entre $I_\chi^P(\delta)$ et $\bar{I}^P(\delta)$. On note $\bar{\pi}_{\delta, \chi}^P$ la représentation de G sur $\bar{I}^P(\delta)$ déduite de $\pi_{\delta, \chi}^P$ par transport de structure via cet isomorphisme.

On note $C(G, P, \delta^*, \chi)$ l'espace des applications ψ sur G , à valeurs dans le dual V_δ^* de V_δ qui sont faiblement continues, i.e. telles que :

Pour tout $v \in V_\delta$, $g \mapsto \langle \psi(g), v \rangle$ soit continue et :

$$\psi(gmu) = \delta_P^{-1/2}(m) \chi(m) \delta^*(m^{-1}) \psi(g), \quad g \in G, m \in M, u \in U. \quad (4.6)$$

Le groupe G agit par représentation régulière gauche sur cet espace.

Si $\psi \in C(G, P, \delta^*, \chi)$ et $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, on note $\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{K_0} \langle \psi(k), \varphi(k) \rangle dk$ qui définit un crochet de dualité G -invariant sur ces espaces (cf. (1.11)). (On note que cette intégrale existe car il s'agit de fonctions localement constantes sur le compact K_0 .) Ceci permet d'identifier les éléments de $C(G, P, \delta^*, \chi)$ à des éléments de $I_\chi^P(\delta)^*$.

On suppose maintenant que (δ, V_δ) est une représentation bornée et irréductible de M .

Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $\text{Re } \chi \delta_P^{-1/2}$ strictement P -dominant. Soit $\eta \in V_\delta^{*M \cap H}$. On lui associe l'application $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)$ définie sur G à valeurs dans V_δ^* par les relations :

- (a) $\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta) = 0$ en dehors de HP .
- (b) Pour tout $(h, m, u) \in H \times M \times U$,

$$\varepsilon_e(P, \delta, \chi, \eta)(hmu) = \delta_P^{-1/2}(m) \chi(m) \delta^*(m^{-1}) \eta. \quad (4.7)$$

Remarquons que pour $g \in HP$, la décomposition $g = hmu$, $h \in H$, $m \in M$, $u \in U$ n'est pas unique mais h varie dans une classe à droite modulo $M \cap H$ et m dans une classe à gauche modulo $M \cap H$. La fonction ε_e est donc bien définie puisque $\chi \delta_P^{-1/2} \in X(M)_\sigma$ et $\eta \in V_\delta^{*M \cap H}$. De plus δ étant bornée et $\text{Re } \chi \delta_P^{-1/2}$ étant strictement P -dominant, il résulte du Théorème 4 (ii) et du Théorème 3 de [3] que :

La fonction ε_e est élément de $C(G, P, \delta^*, \chi)$. (4.8)

On suppose maintenant que P contient $P_\emptyset$. Alors M contient $A_\emptyset$. On reprend les notations de 1.2 et on note $\overline{W}_{M,i}$ un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ des doubles classes $W_{H_i}(A_\emptyset) \setminus W(A_\emptyset)/W_M(A_\emptyset)$ contenant l'élément neutre e et $\mathcal{W}_{M,i}^G := \{x_i x \mid x \in \overline{W}_{M,i}\}$. Alors (cf. [3, Lemme 9]) :

Toute (H, P) -double classe ouverte de G est de la forme HyP où y est un élément de :

$$\mathcal{W}_M^G = \bigcup_{i \in I} \mathcal{W}_{M,i}^G.$$

En particulier toute (H, P) -double classe ouverte est de la forme HyP où $y.P := yPy^{-1}$ est un σ -sous-groupe parabolique de G . On notera $\overline{W}_M^G$ un ensemble de représentants des (H, P) -doubles classes ouvertes, contenant e , et contenu dans $\mathcal{W}_M^G$. (4.9)

A tout $w \in \overline{W}_M^G$, on associe l'espace :

$$\mathcal{V}(\delta, w) = (V_\delta^*)^{M \cap w^{-1}.H} \quad (4.10)$$

et on considère la somme :

$$\mathcal{V}(\delta) := \bigoplus_{w \in \overline{W}_M^G} \mathcal{V}(\delta, w). \quad (4.11)$$

La projection de $\mathcal{V}(\delta)$ sur $\mathcal{V}(\delta, w)$ parallèlement aux autres composantes sera notée $\text{pr}(\delta, w)$ ou pr_w .

Montrons que :

Si $w \in \mathcal{W}_M^G$, alors $w.P$ est un σ -sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi σ -stable $w.M$. (4.12)

Comme $P_\emptyset \subset P$, on a :

$$A_0 \subset M_0 \subset M_\emptyset \subset P \cap \sigma(P) = M.$$

Donc A_0 est un tore déployé maximal de M . Il en résulte que $A_M \subset A_0$, donc $A_{M,\sigma} \subset A_\emptyset$. Ceci joint au Lemme 4 montre que $P = P_\lambda$, $\lambda \in \Lambda(A_\emptyset)$. Alors $w.P = P_\mu$ où $\mu = w\lambda w^{-1} \in w.A_\emptyset$. Or $w.A_\emptyset$ est égal à l'un des A_i , c'est donc un tore σ -déployé maximal. Il en résulte que $\sigma(P_\mu) = P_{\sigma(\mu)} = P_{\mu^{-1}}$, et $P_{\mu^{-1}}$ est bien opposé à $P_\mu = w.P$. Le sous-groupe de Levi σ -stable de P (resp. $w.P$) est alors égal au centralisateur dans G de λ (resp. $\mu = w\lambda w^{-1}$). Le sous-groupe de Levi σ -stable de $w.P$ est donc égal à $w.M$. D'où (4.12).

Pour $w \in \overline{W}_M^G$, $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ et $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $\text{Re } \chi \delta_p^{-1/2}$ strictement P -dominant on définit :

$$\varepsilon_w(P, \delta, \chi, \eta) = R_{w^{-1}} \varepsilon_e(w.P, w.\delta, w.\chi, \eta) \quad (4.13)$$

où R désigne la représentation régulière droite de G et $w.\delta$ (resp. $w.\chi$) la représentation de $w.M$ déduite de δ (resp. χ) par transport de structure. Cette expression est bien définie car $\eta \in V_{\delta}^{*M \cap w^{-1}.H}$ équivaut à $\eta \in V_{w.\delta}^{*w.M \cap H}$ et $w.P$ est bien un σ -sous-groupe parabolique d'après (4.12).

Soit σ_w l'involution rationnelle de G définie sur F , donnée par :

$$\sigma_w(g) := w^{-1} \sigma(wgw^{-1})w, \quad g \in G.$$

Lemme 11.

- (i) Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $P_{\emptyset}$ et $w \in \overline{W}_M^G$. Alors P est un σ_w -sous-groupe parabolique, $\sigma_w(P) = \sigma(P)$ et $P \cap \sigma_w(P) = M$.
- (ii) $X(M)_{\sigma} \subset X(M)_{\sigma_w}$.

Démonstration. (i) Montrons que :

$$A_{\emptyset} \text{ est un tore } \sigma_w\text{-déployé.} \quad (4.14)$$

Soit $i \in I$ et $x \in \overline{W}_{M,i}$ tels que $w = x_i x$, alors

$$w.A_{\emptyset} = x_i x.A_{\emptyset} = x_i.A_{\emptyset} = A_i,$$

en particulier,

$$w.A_{\emptyset} \text{ est } \sigma\text{-déployé,} \quad (4.15)$$

donc :

$$\sigma_w(a) = w^{-1} \sigma(waw^{-1})w = w^{-1} (wa^{-1}w^{-1})w = a^{-1}, \quad a \in A_{\emptyset}.$$

On déduit (4.14) de l'égalité précédente.

D'autre part, on a l'inclusion $A_{M,\sigma} \subset A_M \subset A_{M_{\emptyset}}$, donc $A_{M,\sigma}$ est un tore σ -déployé de $A_{M_{\emptyset}}$. Donc $A_{M,\sigma} \subset A_{\emptyset}$ puisque $A_{\emptyset}$ est le plus grand tore σ -déployé de $A_{M_{\emptyset}}$. En particulier $A_{M,\sigma}$ est un tore σ_w -déployé.

D'après le Lemme 4, il existe $\lambda \in A_{M,\sigma}$ tel que $P = P_{\lambda}$. Alors

$$\sigma_w(P) = P_{\sigma_w(\lambda)} = P_{\lambda^{-1}} = \sigma(P),$$

donc $M = P \cap \sigma_w(P)$, d'où (i).

(ii) Montrons que $w^{-1} \sigma(w) \in M_{\emptyset}$:

D'après (4.15), on a :

$$\sigma(waw^{-1}) = wa^{-1}w^{-1}, \quad a \in A_{\emptyset}.$$

D'autre part,

$$\sigma(waw^{-1}) = \sigma(w)\sigma(a)\sigma(w^{-1}).$$

On déduit des deux égalités précédentes et du fait que $\sigma(a) = a^{-1}$ que :

$$wa^{-1}w^{-1} = \sigma(w)a^{-1}\sigma(w^{-1}).$$

Donc $w^{-1}\sigma(w)$ est élément de $Z_G(A_\emptyset)$ qui est égal à $M_\emptyset$ d'après (1.15). Ceci montre que $w^{-1}\sigma(w)$ est élément de $M_\emptyset$ comme désiré.

Soit $\chi \in X(M)_\sigma$. Comme $M_\emptyset \subset M$, on a :

$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi(w^{-1}\sigma(w))\chi(\sigma(m))\chi(w^{-1}\sigma(w))^{-1}, \quad m \in M.$$

Soit encore :

$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi(\sigma(m)), \quad m \in M.$$

Comme $\chi \in X(M)_\sigma$, on a donc :

$$\chi(\sigma_w(m)) = \chi^{-1}(m), \quad m \in M.$$

Donc $\chi \in X(M)^{-\sigma_w}$. Par suite, $X(M)_\sigma$ est inclus dans $X(M)^{-\sigma_w}$. Or $X(M)_\sigma$ est connexe et contient l'élément neutre et $X(M)_{-\sigma_w}$ est la composante connexe de l'élément neutre dans $X(M)^{-\sigma_w}$, d'où (ii). $\square$

On associe enfin à tout élément η de $\mathcal{V}(\delta)$ et à tout $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant $\text{Re } \chi \delta_P^{-1/2}$ strictement P -dominant :

$$j(P, \delta, \chi, \eta) = \sum_{w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} \varepsilon_w(P, \delta, \chi, \text{pr}(\delta, w)\eta). \quad (4.16)$$

On déduit de (4.8), (4.13) et de (4.16) que :

$$\begin{aligned} &\text{L'application } j(P, \delta, \chi, \eta) \text{ est un élément de } C(G, P, \delta^*, \chi) \text{ et on l'identifie à} \\ &\text{un élément } H\text{-invariant de } I_\chi^P(\delta)^*. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Remarque 4. La condition $\text{Re } \chi - 2\rho_P$ strictement P -dominant dans le Théorème 3 de [3] où l'induction est non normalisée se traduit ici (où l'induction est normalisée) par la condition $\text{Re } \chi \delta_P^{-1/2}$ strictement P -dominant.

On définit « les intégrales d'Eisenstein » :

Si φ est un élément de l'espace $\bar{I}^P(\delta)$, $E(P, \delta, \chi, \eta, \varphi)$ est la fonction sur G/H définie par :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta, \varphi))(gH) = \langle \bar{j}(P, \delta, \chi, \eta), \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle, \quad g \in G,$$

où $\bar{j}(P, \delta, \chi, \eta)$ est l'élément de $\bar{I}^P(\delta)^*$ déduit de $j(P, \delta, \chi, \eta)$ par transport de structure à l'aide de la restriction des fonctions à K_0 . (4.18)

Remarquons que si $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, et si $\bar{\varphi}$ est sa restriction à K_0 ,

$$(E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(gH) = \langle j(P, \delta, \chi, \eta), \pi_{\delta, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle, \quad g \in G.$$

Soient $P = MU$ et $Q = MV$ deux σ -sous-groupes paraboliques de même sous-groupe de Levi, on rappelle que l'on note $\bar{Q} := \sigma(Q)$.

Soit ψ une fonction sur $V/V \cap U$ à valeurs dans V_δ . Supposons qu'il existe $v_0 \in V_\delta$ tel que pour tout $\check{v}_0 \in \check{V}_\delta$, l'intégrale

$$\int_{V/V \cap U} \langle \psi(\check{v}), \check{v}_0 \rangle d\check{v}$$

soit absolument convergente, égale à $\langle v_0, \check{v}_0 \rangle$. Alors v_0 est unique car la dualité entre $\check{V}$ et V est non dégénérée. Dans ce cas nous dirons que l'intégrale $\int_{V/V \cap U} \psi(\check{v}) d\check{v}$ converge et nous poserons :

$$\int_{V/V \cap U} \psi(\check{v}) d\check{v} := v_0. \quad (4.19)$$

Il résulte de cette définition que :

$$\int_{V/V \cap U} \delta(m)\psi(\check{v}) d\check{v} = \delta(m) \int_{V/V \cap U} \psi(\check{v}) d\check{v}, \quad m \in M. \quad (4.20)$$

On rappelle (cf. [23, Théorème IV.1.1 et équation IV.1 (10)]) que :

Il existe une constante $R_\delta > 0$ telle que, pour tout $\chi \in X(M)$, vérifiant :

$$\langle \operatorname{Re} \chi, \alpha \rangle > R_\delta, \quad \alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{Q})$$

telle que, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$ et $g \in G$, l'intégrale $\int_{V/V \cap U} \varphi(g\check{v}) d\check{v}$ converge et l'application $g \mapsto \int_{V/V \cap U} \varphi(g\check{v}) d\check{v}$ définit un élément de $I_\chi^Q(\delta)$ noté $A(Q, P, \delta, \chi)(\varphi)$. De plus, $A(Q, P, \delta, \chi)$ est un opérateur d'entrelacement non nul entre $I_\chi^P(\delta)$ et $I_\chi^Q(\delta)$. (4.21)

L'application $\chi \mapsto A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ admet un prolongement rationnel au sens de [23, IV.1] que l'on note de même. (4.22)

Il existe un polynôme q non nul sur $X(M)$ tel que si $\chi \in X(M)$ et si $q(\chi) \neq 0$, l'opérateur $A(\bar{P}, P, \delta, \chi)$ est défini et non nul (cf. [23, IV(10)]). (4.23)

Le symbole $a \rightarrow_P \infty$ (resp. $a \rightarrow_{\bar{P}} \infty$) signifie que $a \in A_M$ et que $|\alpha(a)|_F \rightarrow +\infty$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$ (resp. $\Sigma(\bar{P})$).

On rappelle que (δ, V_δ) est une représentation bornée et irréductible de M .

Théorème 5. Avec les notations ci-dessus, soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant (4.21) pour $Q = \bar{P}$ et tel que $\operatorname{Re} \chi \delta_P^{-1/2}$ soit strictement P -dominant. Alors, pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, pour tout $g \in G$, et pour tout $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$, on a :

$$\lim_{a \rightarrow \bar{P} \infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) (E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(gaH) = \langle \operatorname{pr}_e \eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(g) \rangle$$

où μ_δ est le caractère central de δ et $\bar{\varphi}$ est la restriction de φ à K_0 .

On remarque que l'ensemble des χ vérifiant l'hypothèse du Théorème contient l'ensemble $\{\chi \in X(M)_\sigma; \langle \operatorname{Re} \chi, \alpha \rangle > R, \alpha \in \Sigma(P)\}$ pour R assez grand.

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$ ce que l'on fait dans la suite. En remplaçant φ par $L_{g^{-1}}\varphi$ pour $g \in G$, on se ramène à démontrer le Théorème pour $g = e$. Avec nos hypothèses, $j(\bar{P}, \delta, \chi, \eta)$ est élément de $C(G, P, \delta^*, \chi)$ (cf. (4.17)). Donc pour $a \in A_M$, on a :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(aH) = \int_{K_0} \langle (j(P, \delta, \chi, \eta))(k), \varphi(ak) \rangle dk.$$

On pose $E := E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi})$ et $j := j(P, \delta, \chi, \eta)$. On déduit de (1.10) que l'intégrale $\int_{\bar{U}} \langle j(\bar{u}), \varphi(a\bar{u}) \rangle d\bar{u}$ est absolument convergente et que :

$$E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(\bar{u}), \varphi(a\bar{u}) \rangle d\bar{u}.$$

En changeant $\bar{u}$ en $a\bar{u}a^{-1}$ et en utilisant les propriétés de covariance à droite de φ , on a :

$$\chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u}.$$

Si $a \rightarrow \bar{P} \infty$, il est clair que $a^{-1}\bar{u}a$ converge vers e et l'expression sous le signe somme converge vers $\langle \operatorname{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle$ pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$.

Il suffit donc de vérifier que l'on peut appliquer le Théorème de convergence dominée, et de montrer que :

$$\int_{\bar{U}} \langle \operatorname{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \langle \operatorname{pr}_e \eta, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(e) \rangle, \quad \varphi \in I_\chi^P(\delta). \quad (4.24)$$

Passons à la majoration de $|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle|$. Posons :

$$\chi' := \chi \delta_P^{-1/2},$$

de sorte que $\chi' \in X(M)_\sigma$ et que $\operatorname{Re} \chi'$ est strictement P -dominant.

Soit $\bar{u} \in \bar{U} \cap HwP$. Ecrivons $\bar{u} = hwm u$ où $h \in H, m \in M, u \in U$. Soit $h_w := w^{-1}hw$. On a :

$$\bar{u} = wk(h_w)m(h_w)u(h_w)mu,$$

où, avec les notations de 4.1, $h_w = k(h_w)m(h_w)u(h_w)$. Donc :

$$m(\bar{u}) = m(wk(h_w))m(h_w)m.$$

Ce qui implique :

$$\chi'(m(\bar{u})) = \chi'(m(wk(h_w)))\chi'(m(h_w))\chi'(m). \quad (4.25)$$

On vérifie aisément que $w^{-1}Hw$ est le groupe des points fixes de l'involution $\sigma_w = \text{Ad } w^{-1} \circ \sigma \circ \text{Ad } w$. En utilisant le Lemme 11, on peut appliquer le Lemme 9 (ii) à χ' avec $w^{-1}Hw$ au lieu de H . Donc :

Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que :

$$|\chi'(m(h_w))| \geq c_1, \quad h \in H. \quad (4.26)$$

De plus, $(m(wk(h_w)))^{-1}$ reste dans une partie compacte lorsque h varie dans H . Donc :

Il existe $c_2 > 0$ telle que

$$|\chi'((m(wk(h_w)))^{-1})| \leq c_2. \quad (4.27)$$

Donc, on déduit de (4.25) que :

$$|\chi'(m)| \leq c_1^{-1}c_2|\chi'(m(\bar{u}))|, \quad \bar{u} \in \bar{U} \cap HwP. \quad (4.28)$$

Soit $\bar{u} \in \bar{U}$. Si $a^{-1}\bar{u}a \notin HwP$, on a $j(a^{-1}\bar{u}a) = 0$. Si $a^{-1}\bar{u}a \in HwP$, on écrit $a^{-1}\bar{u}a = h_0wm_0u_0$ avec $h_0 \in H, m_0 \in M, u_0 \in U$, et l'on a :

$$j(a^{-1}\bar{u}a) = \delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0)\delta^*(m_0^{-1})\eta. \quad (4.29)$$

D'autre part, on a :

$$\varphi(\bar{u}) = \delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\delta_\chi((m(\bar{u}))^{-1})\varphi(k(\bar{u})). \quad (4.30)$$

Montrons qu'il existe une constante c' , indépendante de $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, telle que :

$$\begin{aligned} | \langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle | &\leq c' |\chi'(m(\bar{u}))\delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\chi((m(\bar{u}))^{-1})| \\ &\quad \times | \langle \delta^*(m_0^{-1})\eta, \delta((m(\bar{u}))^{-1})\varphi(k(\bar{u})) \rangle |, \quad a \in A_M^-. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En effet, d'après (4.29) et (4.30), on a

$$\begin{aligned} |\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle| &= |\delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0)\delta_P^{-1/2}(m(\bar{u}))\chi((m(\bar{u}))^{-1})| \\ &\quad \times |\langle \delta^*(m_0^{-1})\eta, \delta(m^{-1}(\bar{u}))\varphi(k(\bar{u})) \rangle|. \end{aligned}$$

Or :

$$\delta_P^{-1/2}(m_0)\chi(m_0) = \chi'(m_0)$$

et d'après (4.28) appliquée à $a^{-1}\bar{u}a$:

$$|\chi'(m_0)| \leq c_1^{-1}c_2|\chi'(m(a^{-1}\bar{u}a))|.$$

De plus, d'après le Lemme 10, il existe $c_3 > 0$ telle que :

$$|\chi'(m(a^{-1}\bar{u}a))| \leq c_3|\chi'(m(\bar{u}))|.$$

En posant $c' := c_1^{-1}c_2c_3$, on obtient (4.31). Comme $\chi'\chi^{-1} = \delta_P^{-1/2}$, on déduit de (4.31) que :

$$|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle| \leq c'|\delta_P^{-1}(m(\bar{u}))||\langle \delta^*(m(\bar{u})m_0^{-1})\eta, \varphi(k(\bar{u})) \rangle|. \quad (4.32)$$

Montrer que la partie droite de l'inégalité est bornée revient à montrer que pour $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, $|\langle \delta^*(m(\bar{u})m_0^{-1})\eta, \varphi(k(\bar{u})) \rangle|$ est bornée indépendamment de $\bar{u}$ et de a .

La fonction φ étant invariante à gauche par un sous-groupe compact ouvert K_φ , $\varphi(k)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans V_δ lorsque k décrit K_0 , que l'on note $v_1, \dots, v_l$.

Alors, puisque δ est bornée et irréductible, d'après le Théorème 4 (ii), il existe $C > 0$ tel que :

$$|\langle \delta^*(m)\eta, v_i \rangle| \leq C, \quad i = 1, \dots, l, \quad m \in M.$$

On déduit alors de (4.32) que :

$$|\langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle| \leq C|\delta_P^{-1}(m(\bar{u}))|, \quad \bar{u} \in \bar{U}, \quad a \in A_M^-. \quad (4.33)$$

Mais (cf. [23, I.1(2)]),

$$\int_{\bar{U}} |\delta_P^{-1}(m(\bar{u}))| d\bar{u} < +\infty. \quad (4.34)$$

Les hypothèses du Théorème de convergence dominée sont donc réunies. Il reste à montrer (4.24).

Le Théorème de convergence dominée montre que :

$$\int_{\bar{U}} |\langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle| d\bar{u} < +\infty.$$

L'élément φ de $I_\chi^P(\delta)$ est fixé par un sous-groupe compact ouvert de G qui contient un sous-groupe compact ouvert K_M de M . Donc :

$$\int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(k_M \bar{u}) \rangle d\bar{u}, \quad k_M \in K_M.$$

En utilisant les propriétés de φ , on a :

$$\int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \delta_P^{-1/2}(k_M) \int_{\bar{U}} \langle \delta^*(k_M) \text{pr}_e \eta, \chi(k_M^{-1}) \varphi(k_M \bar{u} k_M^{-1}) \rangle d\bar{u}, \quad k_M \in K_M.$$

Or, χ et δ_P étant des caractères non ramifiés, $\delta_P^{-1/2}(k_M) = \chi(k_M^{-1}) = 1$ pour $k_M \in K_M$. En changeant de variable, on a :

$$\int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \int_{\bar{U}} \langle \delta^*(k_M) \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u}, \quad k_M \in K_M,$$

et l'intégrale est toujours absolument convergente.

On a donc, en intégrant par rapport à k_M :

$$\int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \int_{K_M} \int_{\bar{U}} \langle \delta^*(k_M) \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} dk_M,$$

où dk_M est la mesure de Haar normalisée sur K_M .

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\int_{\bar{U}} |\langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle| d\bar{u} = \int_{K_M} \int_{\bar{U}} |\langle \delta^*(k_M) \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle| d\bar{u} dk_M < +\infty. \quad (4.35)$$

On peut donc appliquer le Théorème de Fubini à (4.35) et on obtient :

$$\int_{\bar{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u} = \int_{\bar{U}} \int_{K_M} \langle \delta^*(k_M) \text{pr}_e \eta, \varphi(\bar{u}) \rangle dk_M d\bar{u}.$$

On note $e_{K_M} \text{pr}_e \eta$ l'élément de $\check{V}_\delta$ défini par :

$$\langle e_{K_M} \text{pr}_e \eta, v \rangle = \int_{K_M} \langle \text{pr}_e \eta, \delta(k_M) v \rangle dk_M, \quad v \in V_\delta,$$

l'invariance de v par rapport à un sous-groupe ouvert compact de M impliquant que l'intégrale se réduit à une somme finie. On a donc :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \int_{\tilde{U}} \langle e_{K_M} \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u}.$$

D'après la définition de $\int_{\tilde{U}} \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u}$ (cf. (4.19)), il en résulte :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \left\langle e_{K_M} \text{pr}_e \eta, \int_{\tilde{U}} \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u} \right\rangle.$$

Donc :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \int_{K_M} \left\langle \text{pr}_e \eta, \delta(k_M) \int_{\tilde{U}} \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u} \right\rangle dk_M.$$

Soit encore, grâce à (4.20) :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \int_{K_M} \left\langle \text{pr}_e \eta, \int_{\tilde{U}} \delta(k_M) \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u} \right\rangle dk_M.$$

Utilisant le fait que φ est K_M -invariante à gauche et $\varphi \in I_{\chi}^P(\delta)$, on a :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \int_{K_M} \left\langle \text{pr}_e \eta, \int_{\tilde{U}} \varphi(k_M \tilde{u} k_M^{-1}) d\tilde{u} \right\rangle dk_M.$$

En changeant $\tilde{u}$ en $k_M \tilde{u} k_M^{-1}$, on déduit :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \int_{K_M} \left\langle \text{pr}_e \eta, \int_{\tilde{U}} \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u} \right\rangle dk_M.$$

Soit encore :

$$\int_{\tilde{U}} \langle \text{pr}_e \eta, \varphi(\tilde{u}) \rangle d\tilde{u} = \left\langle \text{pr}_e \eta, \int_{\tilde{U}} \varphi(\tilde{u}) d\tilde{u} \right\rangle.$$

Tenant compte de (4.21), on en déduit (4.24), ce qui achève la preuve du Théorème. $\square$

Soient $P = MU$ et $Q = LV$ deux σ -sous-groupes paraboliques de G tels que $P_{\emptyset} \subset P \subset Q$. Alors $M \subset L$ et $V \subset U$. Soient $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ définis par $\tilde{P} = M\tilde{U}$ et $\tilde{Q} = L\tilde{V}$. On pose $\tilde{U}' := \tilde{U} \cap L$. On reprend les notations du Théorème 5. Soit Q' le σ -sous-groupe parabolique de G égal à $(P \cap L)\tilde{V}$, qui admet M pour sous-groupe de Levi σ -stable.

Théorème 6. Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ vérifiant (4.21) pour P et Q' et tel que $\operatorname{Re} \chi \delta_P^{-1/2}$ soit strictement P -dominant. Alors :

$$\forall \varphi \in I_\chi^P(\delta), \quad \forall g \in G, \quad \forall \eta \in \mathcal{V}(\delta),$$

$$\lim_{a \rightarrow \bar{Q} \infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) (E(P, \delta, \chi, \eta, \bar{\varphi}))(gaH) = \int_{\bar{U}'} \langle j(\bar{u}'), (A(Q', P, \delta, \chi)(\varphi))(\bar{u}') \rangle d\bar{u}'$$

où μ_δ est le caractère central de δ , $\bar{\varphi}$ est la restriction de φ à K_0 .

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$ ce que l'on fait dans la suite. En remplaçant φ par $L_{g^{-1}}\varphi$ pour $g \in G$, on se ramène à démontrer le Théorème pour $g = e$. D'après le début de la démonstration du Théorème 5, on a :

$$\chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}} \langle j(a^{-1}\bar{u}a), \varphi(\bar{u}) \rangle d\bar{u}, \quad a \in A_L. \quad (4.36)$$

On a l'homéomorphisme $\bar{U}' \times \bar{V} \rightarrow \bar{U}$, $(\bar{u}', \bar{v}) \mapsto \bar{u}'\bar{v}$ et, pour un bon choix de mesures,

$$\int_{\bar{U}} f(\bar{u}) d\bar{u} = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} f(\bar{u}'\bar{v}) d\bar{u}' d\bar{v}, \quad f \in C_c^\infty(G). \quad (4.37)$$

On a donc, d'après (4.36) :

$$\chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} \langle j(a^{-1}\bar{u}'a a^{-1}\bar{v}a), \varphi(\bar{u}'\bar{v}) \rangle d\bar{u}' d\bar{v}.$$

Or $a \in A_L$ et $\bar{u}' \in \bar{U} \cap L$. Donc $a\bar{u}' = \bar{u}'a$ et :

$$\chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}' \times \bar{V}} \langle j(\bar{u}'a^{-1}\bar{v}a), \varphi(\bar{u}'\bar{v}) \rangle d\bar{u}' d\bar{v}.$$

Si $a \rightarrow \bar{Q} \infty$, il est clair que $a^{-1}\bar{v}a$ converge vers e et l'expression sous le signe somme converge simplement vers $\langle j(\bar{u}'), \varphi(\bar{u}'\bar{v}) \rangle$.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée grâce aux équations (4.33), (4.34) et (4.37). On peut alors passer à la limite et appliquer le Théorème de Fubini. On a alors :

$$\lim_{a \rightarrow \bar{Q} \infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\bar{U}'} \int_{\bar{V}} \langle j(\bar{u}'), \varphi(\bar{u}'\bar{v}) \rangle d\bar{v} d\bar{u}'.$$

On procède comme dans la preuve de (4.24), pour montrer que :

$$\int_{\tilde{V}} \langle j(\tilde{u}'), \varphi(\tilde{u}'\tilde{v}) \rangle d\tilde{v} = \left\langle j(\tilde{u}'), \int_{\tilde{V}} \varphi(\tilde{u}'\tilde{v}) d\tilde{v} \right\rangle.$$

On a alors :

$$\lim_{a \rightarrow \tilde{Q}^\infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\tilde{U}'} \left\langle j(\tilde{u}'), \int_{\tilde{V}} \varphi(\tilde{u}'\tilde{v}) d\tilde{v} \right\rangle d\tilde{u}'.$$

On remarque que :

$$(A(Q', P, \delta, \chi)(\varphi))(\tilde{u}') = \int_{\tilde{V}} \varphi(\tilde{u}'\tilde{v}) d\tilde{v}.$$

On a donc :

$$\lim_{a \rightarrow \tilde{Q}^\infty} \chi(a) \mu_\delta(a) \delta_P^{-1/2}(a) E(aH) = \int_{\tilde{U}'} \langle j(\tilde{u}'), (A(Q', P, \delta, \chi)(\varphi))(\tilde{u}') \rangle d\tilde{u}',$$

d'où le Théorème. $\square$

5. Une propriété de la décomposition de Cartan

5.1. Transport de structure

Soit $P = MU$ un σ -sous-groupe parabolique de G contenant $A_\emptyset$. Soit $y = x_i x \in \mathcal{W}_M^G$ (cf. 4.2 pour les notations). Alors (cf. (4.12)), $y.P$ est un σ -sous-groupe parabolique de sous-groupe de Levi σ -stable $w.M = wMw^{-1}$. Pour ce σ -sous-groupe parabolique qui ne contient pas $A_\emptyset$ mais A_i , on peut définir $\mathcal{W}_{y.M}^G$ de même qu'en (4.9), ainsi que $\mathcal{V}(y.\delta, w)$ et $\mathcal{V}(y.\delta)$. En particulier, on peut imposer à $\mathcal{W}_{y.M}^G$ de contenir y^{-1} , qui est un représentant de la $(H, y.P)$ double classe ouverte $Hy^{-1}yPy^{-1} = HPy^{-1}$. Alors $V_\delta^{*M \cap H} = V_{y.\delta}^{*y.M \cap y.H}$ donc :

$$\mathcal{V}(y.\delta, y^{-1}) = \mathcal{V}(\delta, e).$$

Si $\eta_e \in \mathcal{V}(\delta, e)$, on notera $\eta_{y^{-1}}$ l'élément correspondant dans $\mathcal{V}(y.\delta, y^{-1})$. On note R la représentation régulière droite. Avec ces notations, soit (δ_0, V_{δ_0}) la représentation triviale de M , soit η_e un élément non nul de $V_{\delta_0}^{*M \cap H}$ et soit $\chi \in X(M)_\sigma$ tel que :

$$\chi \text{ vérifie (4.21) pour } Q = \bar{P} \text{ et } \operatorname{Re} \chi \delta_P^{-1/2} \text{ soit strictement } P\text{-dominant.} \quad (5.1)$$

Montrons que :

$$\langle j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle = \langle j(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}}), \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1})R_y\varphi \rangle, \quad (5.2)$$

pour $\varphi \in I_\chi^P(\delta_0)$, $y \in \mathcal{W}_M^G$.

En effet, comme on le vérifie aisément, R_y est un opérateur d'entrelacement entre

$$(\pi_{\delta_0, \chi}^P, I_{\chi}^P(\delta_0)) \quad \text{et} \quad (\pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}, I_{y.\chi}^{y.P}(y.\delta_0)),$$

i.e. :

$$\pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi = R_{y^{-1}}\pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1})R_y\varphi, \quad \varphi \in I_{\chi}^P(\delta_0), \quad g \in G, \quad y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G. \quad (5.3)$$

D'où :

$$\langle j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle = \langle R_y j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1})R_y\varphi \rangle. \quad (5.4)$$

Or les fonctions de G dans $V_{y.\delta_0}^*$: $j(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}})$ et $R_y j(P, \delta_0, \chi, \eta_e)$ sont toutes deux nulles en dehors de $Hy^{-1}(y.P)$, coïncident en y^{-1} , sont H -invariantes à gauche et vérifient la même relation de covariance à droite sous P donc elles sont nécessairement égales. On a alors :

$$\langle j(P, \delta_0, \chi, \eta_e), \pi_{\delta_0, \chi}^P(g^{-1})\varphi \rangle = \langle j(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}}), \pi_{y.\delta_0, y.\chi}^{y.P}(g^{-1})R_y\varphi \rangle. \quad (5.5)$$

Soit encore, avec les notations de (4.18) :

$$(E(P, \delta_0, \chi, \eta_e, \bar{\varphi}))(gH) = (E(y.P, y.\delta_0, y.\chi, \eta_{y^{-1}}, \overline{R_y\varphi}))(gH). \quad (5.6)$$

5.2.

Théorème 7. *Il existe $T > 0$ tel que la réunion $\bigcup_{y \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda_T^-(A_\emptyset) y^{-1} H$ soit disjointe.*

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, comme $\mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ est fini :

Il existe $y, y' \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$ avec $y \neq y'$ et une suite (g_n) telle que :

$$\begin{aligned} g_n &= \omega_n \lambda_n y^{-1} = \omega_n y^{-1} \lambda_{y,n} \quad \text{et} \\ g_n &= \omega'_n \lambda'_n y'^{-1} = \omega'_n y'^{-1} \lambda'_{y',n} \end{aligned}$$

$$\text{où } \omega_n, \omega'_n \in \Omega, n \in \mathbb{N}, \lambda_n, \lambda'_n \in \Lambda_n^-(A_\emptyset), \text{ et } \lambda_{y,n} := y \lambda_n y^{-1}, \lambda'_{y',n} := y' \lambda'_n y'^{-1}. \quad (5.7)$$

Montrons que c'est impossible.

On note P (resp. P') le σ -sous-groupe parabolique de G égal à $y.P_\emptyset$, (resp. $y'.P_\emptyset$), et $\bar{P} := y.\bar{P}_\emptyset$ (resp. $\bar{P}' := y'.\bar{P}_\emptyset$). Alors, comme λ_n et λ'_n sont des éléments de $\Lambda_n^-(A_\emptyset)$, on a :

$$\lambda_{y,n} \rightarrow \bar{P} \infty \quad \text{et} \quad \lambda'_{y',n} \rightarrow \bar{P}' \infty. \quad (5.8)$$

Par extraction, on peut supposer que ω_n et ω'_n convergent dans Ω vers ω et ω' puisque Ω est compact.

Soit δ_0 la représentation triviale de $M_\emptyset$. Alors $\delta := y.\delta_0$ est la représentation triviale de M . Pour $\chi \in X(M)_\sigma$ et $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$, on pose :

$$A_\chi(\varphi) := A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi) \in \text{Ind}_P^G V_{\delta_\chi}.$$

On reprend les notations du Théorème 5, et soit $\chi_0 \in X(M_\emptyset)_\sigma$ vérifiant (5.1) et tel que $A_{y \cdot \chi_0}$ soit non nul (cf. (4.23)). Par symétrie des rôles de y et y' et par extraction, on peut supposer que :

$$(\chi_0 \delta_{P_\emptyset}^{-1/2})(\lambda_n^{-1}) \geq (\chi_0 \delta_{P_\emptyset}^{-1/2})(\lambda_n'^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.9)$$

ce que l'on fait. On pose $\chi := y \cdot \chi_0$. Alors :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \bar{\varphi}))(g_n H) = \langle \bar{j}(P, \delta, \chi, \eta_e), \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(\lambda_{y, n}^{-1}) \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(y \omega_n^{-1}) \bar{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in I_\chi^P(\delta).$$

On pose $v_n := y \omega_n^{-1}$. Alors v_n converge vers la limite $v = y \omega$. Donc il existe un rang $n_\varphi \in \mathbb{N}$ à partir duquel le fixateur de φ contient $v^{-1} v_n$. En remarquant que $v_n = v(v^{-1} v_n)$, on obtient :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \bar{\varphi}))(g_n H) = (E(P, \delta, \chi, \eta_e, \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(v) \bar{\varphi}))(\lambda_{y, n} H), \quad \varphi \in I_\chi^P(\delta), \quad n \geq n_\varphi.$$

Comme $P = y \cdot P_\emptyset$, $\chi = y \cdot \chi_0$ et δ est la représentation triviale de M , on a $\delta_P(\lambda_{y, n}) = \delta_{P_\emptyset}(\lambda_n)$, $\chi(\lambda_{y, n}) = \chi_0(\lambda_n)$. D'après (5.8), le Théorème 5 implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_0(\lambda_n) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n) (E(P, \delta, \chi, \eta_e, \bar{\varphi}))(g_n H) = \langle \text{pr}_e \eta_e, (A(\bar{P}, P, \delta, \chi)(\varphi))(v) \rangle,$$

pour tout $\varphi \in I_\chi^P(\delta)$.

D'après les hypothèses, l'application $A_\chi := A_{y \cdot \chi_0}$ est non nulle. Par G -invariance, il existe $\varphi_0 \in \bar{I}^P(\delta)$ telle que $(A_\chi(\varphi_0))(v)$ soit non nulle. On pose $C := (A_\chi(\varphi_0))(v)$. On a alors :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \varphi_0))(g_n H) \sim \chi_0(\lambda_n^{-1}) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}) C,$$

où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi_0(\lambda_n^{-1}) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}) = +\infty, \quad (5.10)$$

car $\text{Re } \chi_0 \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}$ est strictement $P_\emptyset$ -dominant et $\lambda_n \rightarrow \bar{P}_\emptyset \infty$, puisque $\lambda_n \in \Lambda_n^-(A_\emptyset)$. En refaisant le calcul pour $g_n = \omega'_n y'^{-1} \lambda'_{y', n}$, on trouve l'existence d'un rang n_1 à partir duquel :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \bar{\varphi}_0))(g_n H) = \langle \bar{j}(P, \delta, \chi, \eta_e), \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(\lambda_{y', n}^{-1}) \bar{\varphi}'_0 \rangle,$$

pour $n \geq n_1$, et $\varphi'_0 = \bar{\pi}_{\delta, \chi}^P(v') \varphi_0$ où $v' = \lim_{n \rightarrow +\infty} y' \omega_n'^{-1}$.

Soit $x' := y' y^{-1}$, alors $x' P x'^{-1}$ est le σ -sous-groupe parabolique P' de G . Notons que $H x' P = H y' (y^{-1} P y) y^{-1} = H y' P_\emptyset y^{-1}$ donc la (H, P) double classe $H x' P$ est ouverte. On peut alors appliquer ce qu'on a vu en 5.1 au sous-groupe parabolique P de G , en prenant pour y' le représentant de la (H, P) double classe x' . On obtient alors :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \varphi_0))(g_n H) = (E(x' \cdot P, x' \delta, x' \chi, \eta_{x'^{-1}}, \psi'_0))(\lambda'_{y', n} H)$$

où l'on a posé $\psi'_0 = R_{x'}(\varphi'_0)$.

Comme $y \neq y' \in \mathcal{W}_{M_\emptyset}^G$, on a $HyP_\emptyset \neq Hy'P_\emptyset$. Tenant compte de la définition de P et x' , on en déduit que $H(x'.P) \neq Hx'^{-1}(x'.P)$. Donc $\text{pr}_e \eta_{x'^{-1}} = 0$. Comme $\lambda'_{y',n} \rightarrow_{x'.P} \infty$, il résulte du Théorème 5 et des relations de conjugaison qu'il existe une suite ε_n de limite nulle telle que :

$$(E(P, \delta, \chi, \eta_e, \varphi_0))(g_n H) = \varepsilon_n \chi_0(\lambda_n^{-1}) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}). \quad (5.11)$$

On pose :

$$\begin{aligned} x_n &:= (E(P, \delta, \chi, \eta_e, \varphi_0))(g_n H), \quad n \in \mathbb{N}, \\ z_n &:= \chi_0(\lambda_n^{-1}) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et :

$$z'_n := \chi_0(\lambda_n'^{-1}) \delta_{P_\emptyset}^{-1/2}(\lambda_n'^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, d'après (5.10) :

$$x_n \sim Cz_n. \quad (5.12)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Cz_n est non nul, et d'après (5.12) :

$$x_n (Cz_n)^{-1} \rightarrow 1.$$

D'autre part, d'après (5.11), il existe une suite ε_n de limite nulle telle que :

$$x_n = \varepsilon_n z'_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$|\varepsilon_n z'_n| |Cz_n|^{-1} \rightarrow 1. \quad (5.13)$$

Mais, d'après (5.9), on a :

$$0 < z'_n \leq z_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$|\varepsilon_n z'_n| |Cz_n|^{-1} \leq |\varepsilon_n C^{-1}|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.14)$$

Comme ε_n est de limite nulle, on trouve alors une contradiction entre (5.13) et (5.14). On en déduit que (5.7) est impossible. D'où le Théorème. $\square$

Remerciements

Je remercie Patrick Delorme pour m'avoir permis de mener à bien cet article ainsi que Joseph Bernstein pour la démonstration du Lemme 1 et pour son intérêt concernant ce travail.

Appendice A

Définition 2. Soit A un tore déployé sur F et soit $\mathcal{X} := (\chi_1, \dots, \chi_l)$ une suite finie de caractères continus de A dans $\mathbb{C}^*$. On appelle fonction de type $\mathcal{X}$ toute fonction φ de A dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$((L_a - \chi_1(a)) \dots (L_a - \chi_l(a))\varphi)(x) = 0, \quad a, x \in A.$$

Soit A un tore déployé sur F et soit A^1 le plus grand sous-groupe ouvert compact de A , de sorte que $A = \Lambda(A)A^1$.

Lemme 12.

- (i) Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse. Alors f est A -finie si et seulement s'il existe une suite finie $\mathcal{X}$ de caractères lisses de A dans $\mathbb{C}^*$ telle que f soit de type $\mathcal{X}$ sur A .
- (ii) Soient $E := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in E^*$ linéairement indépendants, on pose

$$\Gamma := \{\lambda \in \Lambda(A) \mid \alpha_i(\lambda) \leq 0, i = 1, \dots, l\}$$

et $B := A^1 \times \Gamma$.

Si f est une fonction de A dans $\mathbb{C}$, lisse, A -finie et nulle sur B , alors f est nulle sur A .

Démonstration. (i) Si f est A -finie, en triangulant l'action du groupe commutatif A dans l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les translatés de f par les éléments de A , on trouve l'existence de caractères $(\chi_1, \dots, \chi_l)$ de A dans $\mathbb{C}$ tels que l'action de A dans une base bien choisie s'écrive :

$$\begin{pmatrix} \chi_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \chi_l \end{pmatrix}.$$

Ces caractères sont lisses puisque f l'est et f est donc de type $(\chi_1, \dots, \chi_l)$.

Supposons maintenant que f soit une fonction lisse de type $\mathcal{X}$ sur A , où $\mathcal{X} = (\chi_1, \dots, \chi_l)$ est une suite finie de caractères lisses de A dans $\mathbb{C}$. On note $A^{1'}$ le sous-groupe ouvert compact de A par lequel f est invariante. Montrons que f est A -finie. Pour cela, montrons que l'espace des fonctions lisses de A dans $\mathbb{C}$, invariantes par $A^{1'}$ et de type $\mathcal{X}$ est un espace de dimension finie. On notera $C^\infty(A/A^{1'})_{\mathcal{X}}$ cet espace. Soit $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_{\mathcal{X}}$ l'ensemble des éléments f de l'espace $\mathbb{C}[\Lambda(A)]$ tels que :

$$(L_\lambda - \chi_1(\lambda)) \dots (L_\lambda - \chi_l(\lambda))f = 0, \quad \lambda \in \Lambda(A).$$

On considère l'application qui à $f \in C^\infty(A/A^{1'})_{\mathcal{X}}$ associe la famille $(\varphi_\omega)_{\omega \in A^1/A^{1'}}$ d'éléments de $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_{\mathcal{X}}$ définie par $\varphi_\omega(\lambda) = f(\lambda\omega)$, $\lambda \in \Lambda(A)$, $\omega \in A^1/A^{1'}$. Elle est injective, d'où le résultat puisque $A^1/A^{1'}$ est fini et que $\mathbb{C}[\Lambda(A)]_{\mathcal{X}}$ est de dimension finie (cf. [10, Lemme 3.14]). On a bien montré que $C^\infty(A/A^{1'})_{\mathcal{X}}$ est de dimension finie. Comme pour tout élément a , a' de A , $L_{a'}$ commute à $(L_a - \chi_1(a)) \dots (L_a - \chi_l(a))$, l'espace $C^\infty(A/A^{1'})_{\mathcal{X}}$ est stable par les

translations à gauche par les éléments de A . Donc les translatés de $f \in C^\infty(A/A^1)_\chi$ par les éléments de A sont encore dans cet espace. Cela prouve (i).

(ii) D'après (i), il existe une suite finie de caractères lisses de A dans $\mathbb{C}$ notée $\mathcal{X}$ telle que f soit de type $\mathcal{X}$ sur A . En reprenant les notations de la démonstration de (i), il suffit de montrer que pour $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction φ_ω de type $\mathcal{X}$ sur $\Lambda(A)$, est nulle sur $\Lambda(A)$. Par hypothèse, φ_ω est nulle sur Γ . De plus (cf. [10, Lemme 14]), il existe un ensemble fini $F \subset \Lambda(A)$ tel que :

$$\text{Toute fonction } g \text{ de type } \mathcal{X} \text{ sur } \Lambda(A) \text{ nulle sur } F \text{ est nulle sur } \Lambda(A). \quad (\text{A.1})$$

Soit $\lambda_0 \in \Lambda(A)$ tel que $\alpha_i(\lambda_0) < 0$, $i = 1, \dots, l$, qui existe d'après l'indépendance linéaire des α_i , et soit $a := \max_{f \in F, i=1, \dots, l} \alpha_i(f)$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\lambda_0 + F \subset \Gamma$. On pose $\lambda := n_0\lambda_0 \in \Lambda(A)$.

Alors, pour tout $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction $L_{\lambda^{-1}}\varphi_\omega$ est nulle sur F puisque φ_ω est nulle sur Γ donc $L_{\lambda^{-1}}\varphi_\omega$ est nulle sur $\Lambda(A)$ d'après (A.1). Donc pour tout $\omega \in A^1/A^{1'}$, la fonction φ_ω est nulle sur $\Lambda(A)$, d'où (ii). $\square$

Références

- [1] E.P. van den Ban, H. Schlichtkrull, P. Delorme, Harmonic Analysis on Symmetric Spaces—General Plancherel Theorems, Lie Theory, Progr. Math., vol. 229, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
- [2] Y. Benoist, H. Oh, Polar decomposition for p -adic symmetric spaces, prépublication, arXiv: math.GR/0612305.
- [3] P. Blanc, P. Delorme, Vecteurs distributions H -invariants de représentations induites, pour un espace symétrique réductif p -adique G/H , Ann. Inst. Fourier (Grenoble), à paraître.
- [4] A. Borel, N.R. Wallach, Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, Ann. of Math. Stud., vol. 94, Princeton Univ. Press/Univ. Tokyo Press, Princeton, NJ/Tokyo, 1980.
- [5] N. Bourbaki, Eléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphe 1 à 7), Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1333, Hermann, Paris, 1967.
- [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres II, III : Groupes de Lie, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1349, Hermann, Paris, 1972.
- [7] C.J. Bushnell, Representations of reductive p -adic groups: Localization of Hecke algebras and applications, J. London Math. Soc. 63 (2001) 364–386.
- [8] C.J. Bushnell, P.C. Kutzko, Smooth representations of reductive p -adic groups: Structure theory via types, Proc. London Math. Soc. 77 (1998) 582–634.
- [9] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p -adic reductive groups.
- [10] P. Delorme, Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif p -adique, in: Noncommutative Harmonic Analysis, in Honour of J. Carmona, in: Progr. Math., vol. 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 131–176.
- [11] P. Delorme, V. Sécherre, An analogue of the Cartan decomposition for p -adic reductive symmetric spaces, prépublication, arXiv: math.RT/0612545.
- [12] M. Flensted-Jensen, T. Oshima, H. Schlichtkrull, Boundedness of certain unitarizable Harish-Chandra modules, in: Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, in: Adv. Stud. Pure Math., vol. 14, Academic Press, Boston, MA, 1988, pp. 651–660.
- [13] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass–Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math. (2) 104 (1976) 117–201.
- [14] A.G. Helminck, G.F. Helminck, A class of parabolic k -subgroups associated with symmetric k -varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 4669–4691.
- [15] A.G. Helminck, S.P. Wang, On rationality properties of involutions of reductive groups, Adv. Math. 99 (1993) 26–96.
- [16] Y. Hironaka, Spherical functions and local densities on Hermitian forms, J. Math. Soc. Japan 51 (1999) 553–581.
- [17] Y. Hironaka, F. Sato, Spherical functions and local densities of alternating forms, Amer. J. Math. 110 (1988) 473–512.
- [18] J. Humphreys, Linear Algebraic Groups, Grad. Texts in Math., vol. 21, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [19] S. Kato, K. Takano, Subrepresentation theorem for p -adic symmetric spaces, arXiv: math.RT/07060567.

- [20] A.W. Knap, Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples, Princeton Landmarks in Math., Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2001. Reprint of the 1986 original.
- [21] N. Lagier, Asymptotiques de fonctions sur un espace symétrique p -adique, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 344 (2007) 421–424.
- [22] O. Offen, Relative spherical functions on $\mathfrak{o}$ -adic symmetric spaces (three cases), Pacific J. Math. 215 (2004) 97–149.
- [23] J.-L. Waldspurger, La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d’après Harish-Chandra), J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003) 235–333.