

Domaines de recherche

- Géométrie ergodique, questions de rigidité différentielle ou entropique, régularité à l'infini, actions de groupes, théorie ergodique et entropie.
- Géométrie de Finsler et Equations différentielles ordinaires du second ordre. Courbure négative et espace des formes.

Rigidité entropique des flots d'Anosov (Entropy rigidity of Anosov flows in dimension three. Ergodic Theory Dynam. Systems 21 (2001), no. 4, 1101—1112)

Pour les flots géodésiques à courbure négative, il est conjecturé que l'égalité entre l'entropie topologique et l'entropie métrique ne se produit que pour les espaces localement symétriques réels de rang 1 à courbure négative. Pour les surfaces, c'est un théorème dû à A. Katok. Sa preuve utilise un résultat spécifique de géométrie riemannienne, le théorème d'uniformisation. En utilisant les propriétés de la mesure de Bowen-Margulis et le théorème homologique de Livsic, j'ai pu prouver le théorème suivant : Théorème – Soit ϕ_t un C^∞ flot d'Anosov contact sur une 3-variété compacte. Si son entropie topologique est égale à son entropie métrique, alors ce flot est à revêtement fini près C^∞ conjugué au flot géodésique d'une surface à courbure négative constante. En dimension plus élevée, rien ou presque n'est connu. Ce résultat en dimension 3 quoique simple traduit deux faits importants. 1. La mesure d'entropie maximale n'est presque jamais dans la classe de Lebesgue. Si c'est le cas, la variété qui porte le flot doit être un fibré en cercle. J'ai construit des exemples de flots d'Anosov contact sur des 3-variétés hyperboliques. (C'est l'objet du paragraphe suivant.) 2. L'obstruction à être dans la classe de Lebesgue est portée par un cocycle. C'est un phénomène général. Il y a pour les flots d'Anosov des cocycles qu'on pourrait qualifier de cocycles caractéristiques.

De nouveaux flots d'Anosov Contact à partir des exemples de Handel et Thurston

Plusieurs des théorèmes que j'ai étudiés dans le passé s'appliquent aux flots d'Anosov qui préservent une forme de contact. Les preuves sont sensiblement plus difficiles dans ce cadre que dans celui des flots géodésiques. Il restait à trouver au moins un flot d'Anosov contact qui ne soit pas topologiquement équivalent à un flot géodésique. M. Handel et W. Thurston ont, avec de la chirurgie de Dehn sur les fibrés unitaires des surfaces, construit de nouveaux flots d'Anosov sur des variétés qui ne sont pas des fibrés en cercles. En m'inspirant de leurs techniques j'ai pu montrer en faisant de la chirurgie locale et des reparamétrages le théorème suivant.

Théorème - Il existe des flots C^∞ d'Anosov préservant une forme de contact sur des variétés qui ne sont pas des fibrés en cercles.

(non encore soumis à publication) Une collaboration avec J.P. Otal montre que de telles chirurgies peuvent fournir des exemples sur des 3-variétés hyperboliques. Ces flots méritent une étude complète. En effet, dans sa thèse, S. Fenley, alors étudiant de W. Thurston, avait prouvé que de tels exemples devraient posséder une infinité d'orbites périodiques dans la même classe d'homotopie libre. Il s'agit là d'une situation très nouvelle par rapport au cas des flots géodésiques où il y a unicité. Par exemple certains des flots de Handel-Thurston admettent des changements de paramétrages, tels que, les flots obtenus sont de contact.

Régularité longitudinale des feuilletages stables et instables forts (- ; Hasselblatt, Boris Zygmund strong foliations. Israel J. Math. 138 (2003), 157–169.)

Avec Boris Hasselblatt nous avons étudié la régularité longitudinale que l'on peut espérer pour les flots d'Anosov deux fois continuellement différentiables et qui préservent un volume. Au passage nous découvrons un cocycle dont l'annulation (en cohomologie) équivaut à une meilleure régularité.

Théorème- Soit M une 3-variété, $k > 1$, ϕ_t un flot d'Anosov C^k qui préserve un volume. Alors la somme directe des distributions fortement stables et instables est de classe Zygmund et il y a une obstruction à une régularité plus élevée qui se décrit géométriquement comme la courbure de l'image d'une transversale par une application de retour. Cette obstruction détermine une classe de cohomologie de cocycle (dit cocycle longitudinal) et les énoncés suivants sont équivalents. - $E^s + E^u$ est dans la classe de régularité petit - Zygmund.

- Le cocycle longitudinal est un cobord.

- $E^s + E^u$ est dans la classe de régularité Lipschitz.

- $E^s + E^u$ est dans la classe de régularité C^{k-1} .

ϕ_t est une suspension d'un difféomorphisme d'Anosov ou un flot d'Anosov- contact.

Des manifestations de ce cocycle ont par exemple été observées par la suite dans des travaux sur les flots magnétiques de G. Paternain.

Régularité longitudinale en dimension supérieure.

Avec Boris Hasselblatt, nous avons poursuivi notre étude de la régularité longitudinale des flots d'Anosov. (- ; Hasselblatt, Boris Zygmund Strong Foliations in higher dimension 2009). Nous avons été motivés par le fait que l'invariant cohomologique que nous avons introduit en dimension 3 a été utilisé plusieurs fois par d'autres auteurs (G. Paternain N. Derbekov...) pour l'étude des flots magnétiques et des thermostats. Nous montrons que les distributions fortement stables(respectivement instables) des flots d'Anosov quasi conformes et transversalement symplectiques ont une régularité Zygmund. Nous avons aussi construit un cocycle non

abélien à valeurs dans des formes quadratiques dont la nullité en cohomologie entraîne une régularité Lipschitz. Nous donnons également une nouvelle preuve de la rigidité déjà observée par Yong Fang dans le cas C^1 .

Espaces de Finsler localement symétriques (Curvature and global rigidity in Finsler manifolds. Special issue for S. S. Chern. Houston J. Math. 28 (2002), no. 2, 263–292.)

Sous l'impulsion de S.S. Chern, plusieurs équipes se sont réintéressées à la géométrie de Finsler. Celle-ci, qui englobe la géométrie riemannienne, a remporté beaucoup moins de succès. Une des raisons tient sans doute à un important manque de rigidité locale qui se traduit par des modules de déformations importants et des calculs peu agréables. Par contre, il semble et c'est le fait marquant, que bien que les métriques de Finsler soient mal adaptées aux classes caractéristiques, on retrouve de la rigidité au niveau global, avec des phénomènes nouveaux. L'exemple qui suit en est une illustration. En 1926, Cartan a introduit les espaces riemanniens localement symétriques comme étant ceux tels que la courbure est parallèle (invariante par transport parallèle). En fait ces espaces doivent leur nom à une caractérisation équivalente, les réflexions géodésiques sont des isométries locales. En géométrie de Finsler où des notions analogues courbure, connexion trouvent des extensions, ces deux définitions ne sont plus équivalentes. La notion la plus faible est celle de courbure parallèle. J'ai obtenu en utilisant des techniques de système dynamique le théorème suivant :

Théorème - Une variété compacte munie d'une métrique de Finsler réversible parallèle et à courbure négative est isométrique à une métrique riemannienne localement symétrique.

Ce résultat admet plusieurs corollaires. On retrouve notamment un résultat de Benzécri : Soit C un ouvert convexe borné dans $\mathbf{R}^n$ à bord strictement convexe et lisse. S'il existe $G \subset PGL(\mathbf{R}^n)$ laissant C invariant et tel que C/G est une variété compacte alors C est l'intérieur d'un ellipsoïde. Il existe d'autres applications notamment pour étudier l'entropie de la mesure de Liouville. Ce type de résultat est faux dans le cas plat mais il semble se passer des phénomènes semblables en courbure strictement positive. La preuve de ce théorème utilise les résultats de rigidité différentielle des flots d'Anosov que nous avons obtenus avec Y. Benoist et F. Labourie. L'isométrie est obtenue en étudiant le comportement de certains feuilletages sur le bord à l'infini.

De manière concomitante et en utilisant aussi le résultat de Lebrun et Mason, R. Bryant est parvenu à la même conclusion. La question en dimension supérieure est encore un vaste sujet mais on peut espérer que là aussi les métriques réversibles soient rigides. En parallèle à cette étude nous avons avec A. Reissman observé qu'une condition de géométrie intégrale de type Radon Gelfand pourrait nous permettre de bien mieux comprendre certaines structures projectives.