Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Devoir à la maison
à rendre le
jeudi 25 septembre 2014

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

Vous porterez une attention particulière sur la rédaction.

Exercice I. **1.** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan vectoriel $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + 2y - z = 0$. Donner une base de ce plan.

Il suffit de choisir deux vecteurs non colinéaires et qui sont dans le plan. Par exemple la famille $\{(1,0,1),(0,1,2)\}$ est une base.

2. Montrer que les vecteurs $u = (1,0,2)$ et $v = (-1,1,-1)$ ne sont pas colinéaires.

Si l'on a $\alpha u + \beta v = 0$, alors en regardant la deuxième coordonnée on a $\beta = 0$ puis en regardant la première on a $\alpha = 0$. Donc les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires.

3. Donner une équation cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}_2$ engendré par u et v.

$$2x + y - z = 0$$

4. Les plans vectoriels $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont-ils supplémentaires ?

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne peuvent pas être supplémentaires, puisque sinon la dimension de leur somme serait égale à la la somme des dimensions de chacun des plans, ce qui donnerait 4, et qui est strictement supérieur à la dimension 3 de l'espace total $\mathbb{R}^3$.

5. Décrire leur intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

D'après la question précédente, l'intersection est de dimension supérieure ou égale à 1. De plus, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont distincts puisque par exemple le vecteur $u = (1,0,2)$ est dans le plan $\mathcal{P}_2$ mais n'est pas dans le plan $\mathcal{P}_1$. L'intersection est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle. Le vecteur non nul $(1,1,3)$ est dans cette intersection et fournit donc une base.

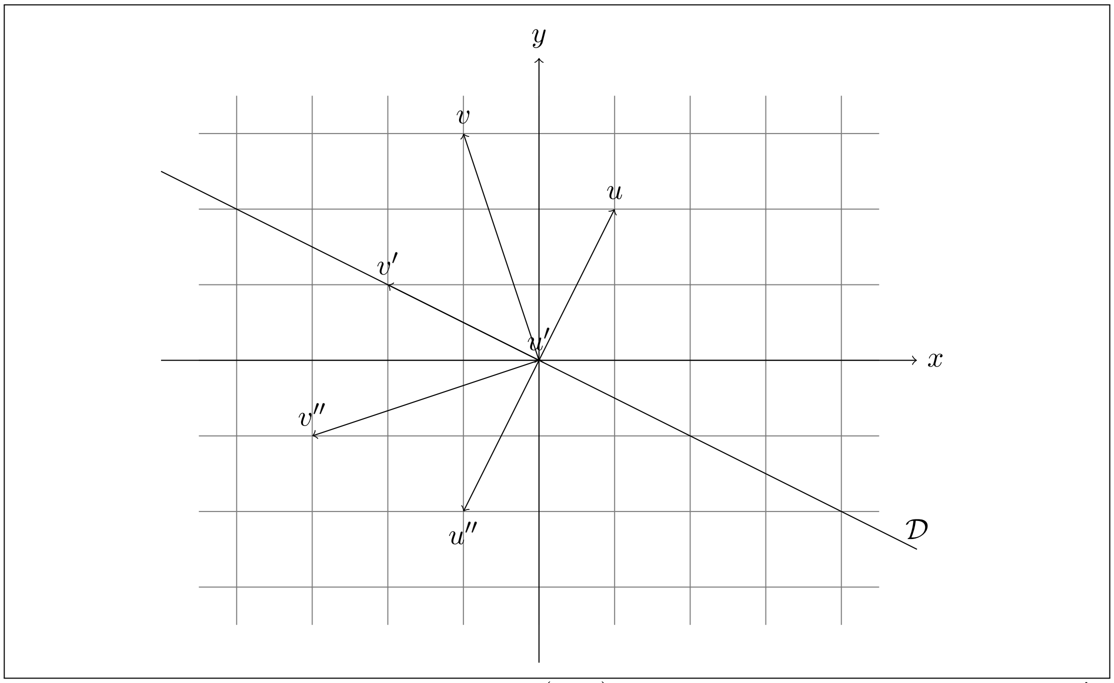
6. Trouver un vecteur w tel que (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de trouver un vecteur w qui n'est pas dans le plan vectoriel $\mathcal{P}_2$ engendré par u et v. Par exemple on vérifie que le vecteur $w = (1,0,0)$ convient grâce à l'équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.

Exercice II. **1.** Dans le plan euclidien tracer les vecteurs $u = (1,2)$, $v = (-1,3)$, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x + 2y = 0$.

2. Tracer les images $u' = p(u)$ et $v' = p(v)$ de u et v par la projection orthogonale p sur la droite $\mathcal{D}$ de u et v.

3. Tracer les images $u'' = s(u)$ et $v'' = s(v)$ de u et v par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}$ de u et v.



4. Pour un vecteur quelconque $w = (x, y)$ exprimer les deux coordonnées x' et y' du vecteur $(x', y') = w' = p(w)$ en fonction de x et y.

On remarque que le vecteur $(1, 2)$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$. En effet, l'équation de la droite $\mathcal{D}$ peut se réécrire $((1, 2)|(x, y)) = 0$, où $(.|.)$ dénote le produit scalaire usuel. Le vecteur $(-2, 1)$ est quant à lui sur la droite $\mathcal{D}$. La famille $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ fournit donc une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$, et en écrivant un vecteur $w = (x, y)$ quelconque dans cette base, on obtiendra le projeté w' en ne gardant que la partie colinéaire à $(-2, 1)$. C'est-à-dire que si $w = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 1)$, alors $w' = \beta(-2, 1)$.
Pour exprimer les coordonnées α et β de w dans la base $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ en fonction des coordonnées x et y de w dans la base canonique, on calcule l'inverse de la matrice de changement de base :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $(x, y) = \frac{x+2y}{5}(1, 2) + \frac{-2x+y}{5}(-2, 1)$, et donc $w' = \frac{-2x+y}{5}(-2, 1)$.
D'où $x' = \frac{4x-2y}{5}$ et $y' = \frac{-2x+y}{5}$.

5. Même question pour la symétrie orthogonale s.

En considérant à nouveau la base orthogonale $\{(1, 2), (-2, 1)\}$, on obtient le symétrique d'un vecteur w quelconque en remplaçant la composante orthogonale à $\mathcal{D}$ par son opposé. C'est-à-dire que si w s'écrit : $w = \alpha(1, 2) + \beta(-2, 1)$, alors l'image w'' par la symétrie orthogonale s est donnée par $w'' = -\alpha(1, 2) + \beta(-2, 1)$. Or, on a $w = (x, y) = \frac{x+2y}{5}(1, 2) + \frac{-2x+y}{5}(-2, 1)$ d'après ce que l'on a fait à la question précédente, d'où $w'' = -\frac{x+2y}{5}(1, 2) + \frac{-2x+y}{5}(-2, 1)$. On obtient finalement $x'' = \frac{3x-4y}{5}$ et $y'' = \frac{-4x-3y}{5}$.