Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

**Licence de mathématiques**, 2e année
Algèbre Linéaire 2

*Deux heures, ni documents, ni calculatrice*

**Examen**
Jeudi 15 janvier 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : T. Coulbois, P. Mercat

**Exercice 1.** **(cours) 1.** Donner la définition de la matrice d'une application linéaire $f$ d'un espace vectoriel $E$ par rapport à une base $\mathcal{B}$.
**2.** Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ ayant pour valeurs propres 1, 2 et 3. Montrer que les sous-espaces propres associés $E_1$, $E_2$ et $E_3$ (respectivement) sont en somme directe.
**3.** Donner la définition de la signature d'une permutation.

**Exercice 2.** Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

**1.** Calculer le polynôme caractéristique de $A_m$.
**2.** Soit $Q(X) = X^3 - (m+2)X^2 + (2m+1)X$. Montrer que $Q(A_m) = mId_3$.
**3.** Pour $m \neq 0$, déduire l'inverse $A_m^{-1}$ de la question précédente.
**4.** Pour $m = 3$, montrer que la matrice $A_3$ est diagonalisable et donner une matrice de passage $P_3$ telle que $P_3^{-1}A_3P_3$ est diagonale (inutile de calculer l'inverse de $P_3$).
**5.** Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$, montrer que $A_m$ n'est pas diagonalisable.
**6.** Pour $m = 1$, montrer que la matrice $A_1$ n'est pas diagonalisable et donner une matrice $P_1$ telle que $P_1^{-1}A_1P_1$ est triangulaire.

**Exercice 3.** On considère $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ diagonalisable, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $f$ (pas nécessairement distinctes) et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associés (respectivement). Soit $v$ un vecteur de $E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ (nous rappelons que par définition $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
**1.** Calculer les coordonnées, par rapport à la base $\mathcal{B}$, de $f(v)$, puis celles de $f^2(v)$ et enfin celles de $f^k(v)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
**2.** En reconnaissant un déterminant de Vandermonde, établir l'équivalence des conditions suivantes :
  (i) $(v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de $E$
  (ii) les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $f$ sont deux à deux distinctes et les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ de $v$ sont toutes non nulles

*Tournez s'il vous plait*

**Exercice 4.** Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$. On suppose $n \geq 1$. Soit $\Delta$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n\left[X\right], \quad \Delta\left(P\right)\left(X\right) = P\left(X+1\right) - P\left(X\right)$$

**1.** Déterminer $\operatorname{Ker}\left(\Delta\right)$.
**2.** En déduire que $\operatorname{Im}\left(\Delta\right) = \mathbb{R}_{n-1}\left[X\right]$.
**3.** Avec $V(X) = X^n$, Montrer que $\mathcal{B} = (V, \Delta(V), \Delta^2(V), \ldots, \Delta^n(V))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
**4.** Donner la matrice de $\Delta$ dans cette base.