Exercice I. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Trigonalisables ? Donnez, le cas échéant, une base de diagonalisation ou de trigonalisation.

1. $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 18 \\ -8 & -3 & -15 \\ -5 & -1 & -11 \end{pmatrix}$ **2.** $B = \begin{pmatrix} -5 & 12 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -8 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ **3.** $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -7 & -4 \\ -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 11 \\ -24 & -7 & 21 \\ -26 & -6 & 21 \end{pmatrix}$ **5.** $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 12 & -7 & 3 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $F = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 8 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice II. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que si P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, alors $P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (où F est la matrice de l'exercice précédent).

Exercice III. Déterminer en fonction du paramètre réel a, si la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ou trigonalisable.

Exercice IV. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $M \neq Id$ et $M^3 = Id$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

2. Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Exercice V. Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui vérifient $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$.

Exercice VI. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices inversibles M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$M^{-1} = -\frac{1}{4}(M^2 - M - 4I_n).$$

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ vérifie $P(M) = 0$.

2. Montrer que $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : P(M) = 0\}$.

3. Montrer que si $M \in \mathcal{A}$, alors $\mathrm{Sp}(M) \subset \{1, 2, -2\}$ (où $\mathrm{Sp}(M)$ désigne le spectre de M).

4. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{A}$ est diagonalisable.

Exercice VII. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En effectuant le moins de calculs possible :

1. Montrer que $\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$ et déterminer les dimensions respectives de $\ker A$ et $\ker A^2$.

2. Déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \langle e_1 \rangle$.

3. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre.

4. Montrer que $Ae_1 \in \ker A^2$, et que $\ker A^2 = \ker A \oplus \langle Ae_1 \rangle$.

5. Montrer que $A^2e_1 \in \ker A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que

$$\ker A = \langle A^2e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle.$$

6. Montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.

7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

8. Trouver, de même, des matrices de passage Q et R telles que $A^{-1}BQ$ et $R^{-1}CR$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients juste au dessus de la diagonale qui sont des 0 ou des 1.