Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Licence de mathématiques, 2e année
Algèbre Linéaire 2

Corrigé du D.M.
à rendre le
jeudi 1er octobre 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : M.H. Nicole, P. Mercat

Vous porterez une attention particulière sur la rédaction.

Exercice I. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le plan vectoriel $\mathcal{P}_1$ d'équation

$$x - 2y - z + t = z - t = 0.$$

1. Vérifier que $\mathcal{P}_1$ est bien un plan (c'est-à-dire de dimension 2) et donner une base de ce plan.

L'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - 2y - z + t \\ z - t \end{pmatrix} \end{array}$$

a pour noyau $\mathcal{P}_1$ par définition de $\mathcal{P}_1$. Or, c'est une application de rang 2 puisque son image est $\mathbb{R}^2$: en effet, les images des vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(1,0,1,0)$ sont respectivement $(1,0)$ et $(0,1)$ qui engendrent $\mathbb{R}^2$ puisque c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le théorème du rang nous donne alors que $\dim(\mathcal{P}_1) = \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = 4 - 2 = 2$, et donc $\mathcal{P}_1$ est bien un plan.
On vérifie que les vecteurs $(2,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$ ne sont pas colinéaires et sont tous les deux dans $\mathcal{P}_1$. Ils forment donc une base de $\mathcal{P}_1$.

2. Montrer que les vecteurs $u = (1,0,2,0)$ et $v = (-1,1,-1,1)$ ne sont pas colinéaires.

Il n'existe pas de scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha u = v$ puisque en regardant la première coordonnée on devrait avoir $\alpha = -1$, mais l'égalité est fausse avec $\alpha = -1$ en regardant par exemple la deuxième coordonnée. De plus, le vecteur u est non nul, donc les vecteurs u et v ne sont pas proportionnels.

3. Donner une équation cartésienne du plan vectoriel $\mathcal{P}_2$ engendré par u et v.

On montre de la même façon qu'en 1 que le système d'équations

$$2x - z + t = y - t = 0$$

convient.

4. Les plans vectoriels $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont-ils supplémentaires ?

Montrons que l'on a $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^4$. Pour cela vérifions que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = ((2,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,2,0),(-1,1,-1,1))$ est libre. Il suffit de montrer que la matrice

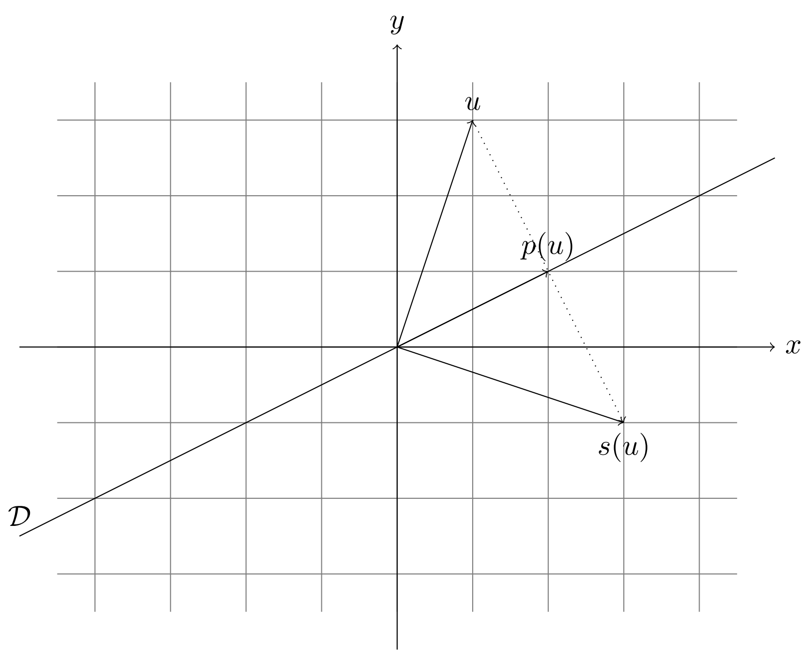
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible. Par des opérations du pivot de Gauss on se ramène à la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

qui a 4 pivot non nuls. Ainsi la matrice est bien inversible, et la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est une base. On a donc bien $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathbb{R}^4$. De plus, on a $4 = \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \dim(\mathcal{P}_1) + \dim(\mathcal{P}_2) - \dim(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = 2 + 2 - \dim(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2)$. On a donc $\dim(\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2) = 0$ donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \{(0,0,0,0)\}$, et donc la somme $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ est directe. Ainsi, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont supplémentaires.

Exercice II. **1.** Dans le plan euclidien, tracer le vecteur $u = (1,3)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - 2y = 0$.
2. Tracer l'image $p(u)$ du vecteur u par la projection orthogonale p sur la droite $\mathcal{D}$.
3. Tracer l'image $s(u)$ du vecteur u par la symétrie orthogonale p sur la droite $\mathcal{D}$.



4. Pour un vecteur quelconque $v = (x,y)$, exprimer le vecteur $(x', y') = v' = p(v)$ en fonction de x et y.
5. Même question pour la symétrie orthogonale.

Le vecteur $(2,1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur $(-1,2)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $(2,1)$. Un vecteur quelconque (x,y) peut s'écrire dans la base $((2,1),(-1,2))$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2x+y}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-x+2y}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

puisque l'on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$p(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{2x+y}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \frac{2x+y}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-x+2y}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$$