Corrigé du devoir à la maison

à rendre le
jeudi 3 décembre 2015

Exercice I. Soit K un corps, et $M_2(K)$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans K. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. On définit une application f par

$$f : \begin{array}{ccc} M_2(K) & \to & M_2(K) \\ M & \mapsto & AM \end{array}.$$

1. Montrez que f est un endomorphisme de $M_2(K)$.

Montrons que f est linéaire. Pour $M, N \in M_2(K)$ et $\alpha, \beta \in K$, on a

$$f(\alpha M + \beta N) = A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha f(M) + \beta f(N),$$

donc f est bien linéaire et elle va de $M_2(K)$ dans $M_2(K)$, donc c'est bien un endomorphisme de $M_2(K)$.

2. Soit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $M_2(K)$. Vérifiez que B est une base de $M_2(K)$.

Montrons que c'est une famille libre. Soient α, β, γ et $\delta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, d'où la liberté.
Montrons que la famille est génératrice. Pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$, on a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a bien montré que la famille est génératrice et libre, c'est donc une base.

3. Quelle est la matrice de f dans la base B ?

On a

$$\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) &= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) &= A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) &= A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) &= A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

4. Calculez le polynôme caractéristique de f. Quelles sont les valeurs propres de f ?

Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi(f) = \det(M_B(f) - XI_4) = \begin{vmatrix} a-X & 0 & b & 0 \\ 0 & a-X & 0 & b \\ 0 & 0 & d-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-X \end{vmatrix} = (a-X)^2(d-X)^2.$$

Les valeurs propres sont donc a et d.

5. Déterminer les espaces propres de f.

Commençons par déterminer les espaces propres de $M_B(f)$. On a

$$\begin{aligned} E_a(M) &= \mathrm{Ker}(M_B(f) - aI_4) \\ &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{pmatrix} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in K^4 \mid bz = bt = (d-a)z = (d-a)t = 0\} \\ &= \begin{cases} K^4 & \text{si } b = d-a = 0, \\ \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Et on a pour la valeur propre d, en supposant $d \neq a$,

$$\begin{aligned} E_d(M) &= \mathrm{Ker}(M_B(f) - dI_4) \\ &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} a-d & 0 & b & 0 \\ 0 & a-d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in K^4 \mid (a-d)x + bz = (a-d)y + bt = 0\} \\ &= \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d-a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d-a \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

On en déduit alors les espaces propres de f :

$$E_a(f) = \begin{cases} M_2(K) & \text{si } b = d-a = 0, \\ \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et si $d \neq a$, on a aussi l'espace propre

$$E_d(f) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d-a \end{pmatrix}).$$

6. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- Si $a \neq d$, alors f a deux espaces propres qui sont chacun de dimension 2. La somme des dimensions de ces deux espaces est égale à la dimension de $M_2(K)$ (c'est-à-dire 4), donc f est diagonalisable.
- Si $a = d$, alors f a un unique espace propre, et il y a deux cas :
  - Si $b = 0$, alors f est diagonalisable dans la base canonique (puisque la matrice $M_B(f)$ est diagonale).
  - Si $b \neq 0$, alors l'unique espace propre de f est de dimension $2 < 4 = \dim(M_2(K))$ d'après la question précédente, et donc f n'est pas diagonalisable.

En résumé, f est diagonalisable si et seulement si $a \neq d$ ou $b = 0$.