Année universitaire 2015-2016

Site : ☐Luminy ☒St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : Mathématiques
Code Apogée du module : SMI3U2C Libellé du module : Algèbre linéaire 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Algèbre linéaire 2

Examen terminal

Calculatrice, portable et documents non autorisés

Durée : 2 heures

On justifiera les réponses.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+2y+4z, x+3y+az) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Ecrire la matrice représentative A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est inversible. Pour ces valeurs, calculer l'inverse de A.
4. Pour ces valeurs, donner l'expression de l'inverse de f.

Exercice 2

Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}_2[X] & \to & \mathbb{C}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + (X^2+1)P'(0) + P(0) \end{array}$$

où $P'(X)$ désigne la dérivée du polynôme $P(X)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$.
2. Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Quelle est la matrice de φ dans la base B ?
3. Calculer le polynôme caractéristique χ de φ. Quelles sont les valeurs propres de φ ?
4. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.
5. L'endomorphisme φ est-il trigonalisable ? Si oui, donner une base de trigonalisation.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. On considère la matrice A_n de $M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le rang de A_n est égal à 2.
2. Montrer que la dimension du noyau de A_n est $n-2$.
3. En déduire que 0 est une valeur propre de A_n.
4. On cherche à présent les autres valeurs propres de A_n. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
   (a) Montrer que l'équation matricielle $A_n X = \lambda X$ est équivalente au système
   $$\begin{cases} x_1 = x_n \\ x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ 2(2x_1 + (n-2)x_2) = \lambda x_1 \\ 2x_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$
   (b) En déduire que x_2 et λ vérifient l'équation
   $$2\lambda x_2 + 2(n-2)x_2 = \frac{\lambda^2}{2} x_2$$
   (c) Montrer que $x_2 \neq 0$ et en déduire les valeurs propres non nulles de A_n.
5. Déterminer les dimensions des espaces propres de A_n.
6. En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 + 2f^2 - f - 2Id_E = 0.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f. Montrer que λ est une racine de P.
2. En déduire que 0 n'est pas une valeur propre de f.
3. En déduire que f est bijectif.