Algèbre linéaire 2

Corrigé de l'examen terminal

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+2y+4z, x+3y+az) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

Pour tous (x,y,z) et $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} & f((x,y,z)+(x',y',z')) \\ = \; & (x+x'+y+y'+z+z', x+x'+2(y+y')+4(z+z'), x+x'+3(y+y')+a(z+z')) \\ = \; & (x+y+z, x+2y+4z, x+3y+az)+(x'+y'+z', x'+2y'+4z', x'+3y'+az') \\ = \; & f(x,y,z)+f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)) &= (\alpha x+\alpha y+\alpha z, \alpha x+2\alpha y+4\alpha z, \alpha x+3\alpha y+a\alpha z) \\ &= \alpha(x+y+z, x+2y+4z, x+3y+az) \\ &= \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

f est donc bien une application linéaire.

2. Ecrire la matrice représentative A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $f(1,0,0) = (1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,2,3)$ et $f(0,0,1) = (1,4,a)$, donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est inversible. Pour ces valeurs, calculer l'inverse de A.

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a-1 \end{vmatrix} = a-7.$$

Ainsi la matrice A est inversible si et seulement si $a \neq 7$.
Calculons l'inverse de la matrice A en utilisant la formule $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \operatorname{com}(A)^T = \frac{1}{a-7} \operatorname{com}(A)^T$ pour $a \neq 7$. On obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{a-7} \begin{pmatrix} 2a-12 & 3-a & 2 \\ 4-a & a-1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Pour ces valeurs, donner l'expression de l'inverse de f.

On a

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{a-7}((2a-12)x+(3-a)y+2z, (4-a)x+(a-1)y-3z, x-2y+z) \end{array}$$

Exercice 2

Calculer sous forme factorisée le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & b-c & a(b-c) \\ a & c & ac \\ b-a & 0 & (b-a)c \end{vmatrix} \\
&= (b-c)(b-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ a & c & ac \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \text{(par linéarité par rapport aux } 1^{\text{ère}} \text{ et } 3^{\text{e}} \text{ lignes)} \\
&= (b-c)(b-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & c & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \text{(en retranchant } a\times \text{ la } 2^{e} \text{ colonne à la } 3^{e}) \\
&= -ac(b-c)(b-a). \quad \text{(en développant par rapport à la dernière colonne)}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}_2[X] & \to & \mathbb{C}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & XP'(X) + (X^2+1)P'(0) + P(0) \end{array}$$

où $P'(X)$ désigne la dérivée du polynôme $P(X)$.

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$.

L'application est bien définie puisque si $P(X)$ est un polynôme de degré ≤ 2, alors $P'(X)$ est un polynôme de degré ≤ 1, et donc $XP'(X)$ est de degré au plus 2. L'expression $XP'(X) + (X^2+1)P'(0) + P(0)$ définit donc bien un polynôme de $\mathbb{C}_2[X]$. Vérifions que l'application φ est linéaire, ce sera alors un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$. Pour $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}_2[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
& \varphi(\alpha P(X) + \beta Q(X)) \\
= \; & X(\alpha P + \beta Q)'(X) + (X^2+1)(\alpha P + \beta Q)'(0) + (\alpha P + \beta Q)(0) \\
= \; & \alpha X P'(X) + \beta X Q'(X) + \alpha(X^2+1)P'(0) + \beta(X^2+1)Q'(0) + \alpha P(0) + \beta Q(0) \\
= \; & \alpha\varphi(P(X)) + \beta\varphi(Q(X)).
\end{aligned}$$

φ définit bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$.

2. Soit $B = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$. Quelle est la matrice de φ dans la base B ?

On a $\varphi(1) = X \times 0 + (X^2+1) \times 0 + 1 = 1$, $\varphi(X) = X + X^2 + 1$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$, donc

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculer le polynôme caractéristique χ de φ. Quelles sont les valeurs propres de φ ?

Le polynôme caractéristique de φ est

$$\chi(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(1-X)^2.$$

Les valeurs propres de φ sont les racines du polynôme caractéristique dans le corps de base $\mathbb{C}$, soit 1 et 2.

4. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de diagonalisation.

La multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est 2. Or, sa multiplicité géométrique vaut

$$m_{\text{géom}}(1) = \dim(E_1) = \dim(\ker(\varphi - \mathrm{id})) = 3 - \mathrm{rang}(\varphi - \mathrm{id}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

qui est différent de 2, donc l'endomorphisme φ n'est pas diagonalisable.

5. L'endomorphisme φ est-il trigonalisable ? Si oui, donner une base de trigonalisation.

L'endomorphisme φ est trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé. Le polynôme X^2 est un vecteur propre pour la valeur propre 2 puisque $\varphi(X^2) = 2X^2$. Il reste donc à trouver un base de l'espace caractéristique F_1 dans laquelle $\varphi_{|F_1}$ est triangulaire. Pour cela, cherchons un vecteur dans $\ker(\varphi - \mathrm{id})^2 \setminus \ker(\varphi - \mathrm{id})$. Cela revient à chercher un élément du noyau de la matrice $(M_B(\varphi) - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas dans le noyau de la matrice $M_B(\varphi) - I_3$. Le polynôme $X - X^2$ convient : on a $(\varphi - \mathrm{id})(X - X^2) = 1$ et $(\varphi - \mathrm{id})^2(X - X^2) = 0$. La base $B = (1, X - X^2, X^2)$ convient donc. On a

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est bien trigonale.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. On considère la matrice A_n de $M_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le rang de A_n est égal à 2.

   Les premières et dernières colonnes sont identiques. Les autres colonnes sont toutes identiques également. Ainsi, l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A_n est engendré par seulement deux vecteurs : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Or ces deux vecteurs forment une famille libre. Ainsi le rang de A_n vaut 2.

2. Montrer que la dimension du noyau de A_n est $n - 2$.

   D'après le théorème du rang, nous avons
   $$\dim(\ker A_n) = n - \operatorname{rang} A_n = n - 2.$$

3. En déduire que 0 est une valeur propre de A_n.

   On a $n \geq 3$, donc $\dim(\ker A_n) \geq 1$. Ainsi, l'espace propre E_0 est non trivial, et 0 est valeur propre de A_n.

4. On cherche à présent les autres valeurs propres de A_n. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.

   (a) Montrer que l'équation matricielle $A_n X = \lambda X$ est équivalente au système
   $$\begin{cases} x_1 = x_n \\ x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ 2(2x_1 + (n-2)x_2) = \lambda x_1 \\ 2x_1 = \lambda x_2 \end{cases}$$

L'équation matricielle $A_nX = \lambda X$ équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + 2x_n & = & \lambda x_1, \\ x_1 + x_n & = & \lambda x_i \quad \forall\, 2 \leq i \leq n-1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n & = & \lambda x_n. \end{array}\right.$$

De la deuxième ligne, on déduit que $\lambda x_2 = \lambda x_3 = \ldots = \lambda x_{n-1}$, donc $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$ puisque $\lambda \neq 0$. En retranchant la première et la dernière ligne, on trouve $x_1 + x_n = \lambda(x_1 - x_n)$ donc $(\lambda - 1)x_1 = (\lambda + 1)x_n$. Si l'on avait $x_1 = x_n$, on aurait nécessairement $x_1 = x_n = 0$ puis $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 0$, et donc on trouve qu'il n'existe pas de vecteur propre pour une valeur propre non nulle, ce qui contredit le fait que X soit non nul et la suite de l'exercice...

Erreur d'énoncé !!!
On ne peut pas déduire $x_1 = x_n$.

(b) En déduire que x_2 et λ vérifient l'équation

$$2\lambda x_2 + 2(n-2)x_2 = \frac{\lambda^2}{2}x_2$$

Admettons la question précédente. En remplaçant x_1 par $\frac{\lambda}{2}x_2$ (en utilisant le dernière ligne) dans la troisième ligne du système, on trouve

$$2(\lambda x_2 + (n-2)x_2) = \frac{\lambda^2}{2}x_2.$$

(c) Montrer que $x_2 \neq 0$ et en déduire les valeurs propres non nulles de A_n.

Si l'on avait $x_2 = 0$, alors on aurait aussi $2x_1 = \lambda x_2 = 0$, $0 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$ et $x_n = x_1 = 0$, donc $X = 0$. Comme on suppose X non nul, on a nécessairement x_2 non nul. On déduit donc de l'équation précédente que l'on a

$$\lambda^2 - 4\lambda - 4(n-2) = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 + 16(n-2) = 16(n-1)$. Et on en déduit donc que les valeurs propres non nulles sont nécessairement de la forme

$$\lambda = 2 \pm 2\sqrt{n-1}.$$

Il reste à vérifier que ce sont effectivement des solutions...

5. Déterminer les dimensions des espaces propres de A_n.

L'espace propre associé à la valeur propre 0 est le noyau de A_n. Sa dimension est $n-2$ d'après la question 2. S'il y avait deux autres valeurs propres distinctes et distinctes de zéro, alors les dimensions de leurs espaces propres seraient nécessairement 1, puisque au moins 1, et la somme des dimensions des espaces propres vaut au plus n. On admet que l'on a bien trouvé deux valeurs propres distinctes et distinctes de zéro à la question 4.(c).

6. En déduire que A_n est diagonalisable.

On admet que l'on a bien trouvé deux valeurs propres distinctes et distinctes de zéro à la question 4.(c). Alors la somme de dimensions des espaces propres vaudrait n d'après la question précédente et donc la matrice serait diagonalisable.

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^3 + 2f^2 - f - 2Id_E = 0.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f. Montrer que λ est une racine de P.

   Soit $x \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a alors

   $$0 = P(f)x = P(\lambda)x.$$

   Or, on a $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$.

2. En déduire que 0 n'est pas une valeur propre de f.

   Le polynôme X^3+2X^2-X-2 est un polynôme annulateur de f. D'après la question précédente, si 0 était valeur propre, elle devrait être racine du polynôme X^3+2X^2-X-2, ce qui n'est pas le cas. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de f.

3. En déduire que f est bijectif.

   Un endomorphisme est bijectif si et seulement si son noyau est trivial. Or, le noyau de f est trivial puisque d'après la question précédente 0 n'est pas valeur propre. On peut exprimer l'inverse de f comme un polynôme en f :

   $$f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 + 2f - \mathrm{id}_E).$$