Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, $2^{\text{ième}}$ année
Algèbre Linéaire 2

Partiel

Vendredi 13 novembre 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : M.-H. Nicole, P. Mercat

Deux heures, ni documents, ni calculatrice

Lisez toutes les questions avant de commencer.

Dans tous les énoncés ci-bas, la lettre K dénote le corps de base.

Exercice 1. (2 pts)

Quel est le cardinal de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_3)$? Rappelons que $\mathbb{F}_3$ est le corps à 3 éléments.

Exercice 2. (3 pts)

Soit $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$ les matrices 2×2 à coefficients dans K. Montrez que si $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\{M_1, M_2, M_3\}$ est une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$ constitué des matrices de trace zéro. Rappelons que la trace d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donné par $\mathrm{Tr}(M) = a + d$.

Avant de commencer, rappelez la définition de la base d'un espace vectoriel V.

Tournez la page s'il vous plaît

Exercice 3. (5 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

a) Calculez le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de A.
b) Vérifiez que 1 est une valeur propre de $P_A(\lambda)$.
c) Factorisez $P_A(\lambda)$. Quelles sont les valeurs propres de A?
d) Est-ce que A est une matrice diagonalisable? Justifiez.
e) Considérez A comme une matrice de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ i.e., est-ce qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et une matrice Q telles que $Q^{-1}DQ = A$? Si oui, quelle est-elle?

Exercice 4. (7 pts)

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $f(P) = P(1) + XP'(1)$.
(Attention, ici $P(1)$ désigne le polynôme P évalué en 1 et non pas $P \times 1$, et P' est la dérivée de P.)

1. Montrez que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrez que la famille $B = (1, X-1, (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Quelle est la matrice M de f dans la base B ?
4. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de f.
5. Existe-t'il une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, trouvez-en une.

Exercice 5. (3 pts)

Soit $m \in \mathbb{R}$, et soient les polynômes $P = X(X-m)$, $Q = (X-m)(X-1)$. Soit $S \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $S(m) \neq 0$. Montrez que les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(P,Q)$ et $\mathrm{Vect}(S)$ sont en somme directe (c'est-à-dire que l'on a l'égalité $\mathrm{Vect}(P,Q) + \mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}(P,Q) \oplus \mathrm{Vect}(S)$). Sont-ils supplémentaires ?