Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence de mathématiques, $2^{\text{ième}}$ année
Algèbre Linéaire 2

Corrigé du partiel
du 13 novembre 2015

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Enseignants : M.-H. Nicole, P. Mercat

Deux heures, ni documents, ni calculatrice

Lisez toutes les questions avant de commencer.

Dans tous les énoncés ci-bas, la lettre K dénote le corps de base.

Exercice 1. (2 pts)

Quel est le cardinal de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_3)$? Rappelons que $\mathbb{F}_3$ est le corps à 3 éléments.

Il y a trois valeurs possibles pour chacun des $3 \times 3 = 9$ coefficients d'une matrice de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{F}_3)$, et ces valeurs sont indépendantes les unes des autres. Cela nous donne 3^9 matrices possibles.

Exercice 2. (3 pts)

Soit $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$ les matrices 2×2 à coefficients dans K. Montrez que si $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\{M_1, M_2, M_3\}$ est une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(K)$ constitué des matrices de trace zéro. Rappelons que la trace d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donné par $\mathrm{Tr}(M) = a + d$.

Avant de commencer, rappelez la définition de la base d'un espace vectoriel V.

Une base d'un espace vectoriel est une famille de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice.
Montrons que la famille (M_1, M_2, M_3) est génératrice. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de trace nulle, c'est-à-dire telle que $a + d = 0$. On a alors $M = aM_1 + bM_3 + cM_2$. La famille (M_1, M_2, M_3) est donc génératrice.
Montrons que la famille (M_1, M_2, M_3) est libre. Soit $(a, b, c) \in K^3$ tels que $aM_1 + bM_3 + cM_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $aM_1 + bM_3 + cM_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, donc l'égalité précédente donne $a = 0, b = 0, c = 0$ et $-a = 0$. Ainsi, la famille (M_1, M_2, M_3) est libre. Cette famille est libre et génératrice, c'est donc une base.

Exercice 3. (5 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

a) Calculez le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$ de A.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1).$$

(Le passage du déterminant 3×3 au déterminant 2×2 se fait en développant par rapport à la dernière ligne ou bien par rapport à la dernière colonne.)

b) Vérifiez que 1 est une valeur propre de $P_A(\lambda)$.

On a $P_A(1) = 0$, donc 1 est bien une valeur propre de A.

c) Factorisez $P_A(\lambda)$. Quelles sont les valeurs propres de A?

Les racines du polynôme $\lambda^2 + 1$ sont les nombres complexes i et $-i$. Ainsi, le polynôme P_A se factorise dans $\mathbb{C}$ comme $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$. Les valeurs propres de A sont donc 1, $-i$ et i.

d) Est-ce que A est une matrice diagonalisable? Justifiez.

Le polynôme P_A étant scindé à racines simples, la matrice A est diagonalisable.

e) Considérez A comme une matrice de $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ i.e., est-ce qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et une matrice Q telles que $Q^{-1}DQ = A$? Si oui, quelle est-elle?

Le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ puisque le facteur $\lambda^2 + 1$ n'admet pas de racines réelles. Donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (7 pts)
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $f(P) = P(1) + XP'(1)$.
(Attention, ici $P(1)$ désigne le polynôme P évalué en 1 et non pas $P \times 1$, et P' est la dérivée de P.)

1. Montrez que f définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, l'expression $P(1) + XP'(1)$ définit bien un polynôme de degré 1, qui est donc dans $\mathbb{R}_2[X]$. Montrons que l'application f est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(aP + bQ) &= (aP + bQ)(1) + X(aP + bQ)'(1) \\ &= aP(1) + bQ(1) + X(aP' + bQ')(1) \\ &= aP(1) + bQ(1) + aXP'(1) + bXQ'(1) \\ &= a(P(1) + XP'(1)) + b(Q(1) + XQ'(1)) \\ &= af(P) + bf(Q). \end{aligned}$$

L'application f est linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrez que la famille $B = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrons que la famille est libre. Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b(X - 1) + c(X - 1)^2 = 0$. En évaluant en $X = 1$, on en déduit que $a = 0$. En dérivant termes à termes l'égalité, on obtient $b + 2c(X - 1) = 0$. En évaluant ensuite en $X = 1$ on en déduit $b = 0$. On obtient donc l'égalité $c(X - 1)^2 = 0$, et donc $c = 0$.
La famille est libre et de cardinal 3 égal à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Quelle est la matrice M de f dans la base B ?

On a

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + X \times 0 = 1, \\ f(X - 1) &= 0 + X \times 1 = X = 1 + (X - 1), \\ f((X - 1)^2) &= 0 + X \times 0 = 0. \end{aligned}$$

On a donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de f.

La matrice M étant triangulaire, ses valeurs propres (qui sont aussi celles de f) sont sur la diagonale. Ainsi, les valeurs propres de f sont 0 et 1.
La matrice M est de rang 2, donc son noyau est de dimension 1 d'après la formule du rang. Il en est donc de même pour l'endomorphisme f. Or, le vecteur non nul $(X-1)^2$ est dans le noyau de f.
Ainsi on a $E_0 = \mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left((X-1)^2\right)$.
La matrice $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est elle aussi de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. Le noyau de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$ est donc de dimension 1. Or, le vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $M - I_3$, ce qui signifie que le polynôme 1 est dans le noyau de $f - id_{\mathbb{R}_2[X]}$.
Ainsi on a $E_1 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \mathrm{Vect}(1)$.

5. Existe-t'il une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ? Si oui, trouvez-en une.

L'existence d'une telle base est équivalente à ce que les espaces propres soient supplémentaires. Or, les espaces propres E_0 et E_1 ne sont pas supplémentaires puisque la somme de leur dimension (qui vaut 2) est strictement inférieure à la dimension de l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ (qui vaut 3). Ainsi il n'existe pas de telle base.

Exercice 5. (3 pts)
Soit $m \in \mathbb{R}$, et soient les polynômes $P = X(X-m)$, $Q = (X-m)(X-1)$. Soit $S \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $S(m) \neq 0$. Montrez que les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(P,Q)$ et $\mathrm{Vect}(S)$ sont en somme directe (c'est-à-dire que l'on a l'égalité $\mathrm{Vect}(P,Q) + \mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}(P,Q) \oplus \mathrm{Vect}(S)$). Sont-ils supplémentaires ?

Soit $T \in \mathrm{Vect}(P,Q) \cap \mathrm{Vect}(S)$. Il existe alors a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $T = aP + bQ = cS$. En évaluant en m, on a $P(m) = Q(m) = 0$, donc on obtient l'égalité

$$T(m) = cS(m) = aP(m) + bQ(m) = 0.$$

Or, on a $S(m) \neq 0$ par hypothèse, donc $c = 0$. On a donc $T = cS = 0$. Ainsi, on a montré que $\mathrm{Vect}(P,Q) \cap \mathrm{Vect}(S) = \{0\}$, et donc les espaces $\mathrm{Vect}(P,Q)$ et $\mathrm{Vect}(S)$ sont en somme directe.
On vérifie facilement que les polynômes P et Q sont non colinéaires (quelle que soit la valeur de m). Ainsi, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(P,Q)$ est de dimension 2. L'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(S)$ est de dimension 1 puisqu'il est engendré par le vecteur S qui est non nul. On a donc

$$\dim(\mathrm{Vect}(P,Q) + \mathrm{Vect}(S)) = \dim(\mathrm{Vect}(P,Q)) + \dim(\mathrm{Vect}(S)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X]),$$

et donc on a l'égalité d'espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(P,Q) + \mathrm{Vect}(S) = \mathbb{R}_2[X]$.
Les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(P,Q)$ et $\mathrm{Vect}(S)$ sont donc bien supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.