1. Changement de bases

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec
$$\vec{u} = (1, 1, 1); \qquad \vec{v} = (1, -1, 0) \qquad \vec{w} = (1, 1, -2)$$
(2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
(3) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique.
(4) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est $A := \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$

(1) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où
$$b_1 = (2, 4, -5); \qquad b_2 = (1, 0, 1); \qquad b_3 = (0, 1, -2)$$
(2) Calculer $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ et les exprimer en fonction de b_1, b_2 et b_3.
(3) En déduire la matrice A' de f relativement à $\mathcal{B}'$.
(4) Calculer A'^2 et en déduire f^2.

Exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où
$$f_1 : x \mapsto e^{-x} \qquad f_2 : x \mapsto (x - 1)e^{-x} \qquad f_3 : x \mapsto (x^2 + 1)e^{-x}$$
(1) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
(2) On considère l'application Φ qui associe à une fonction $f \in E$, la fonction $\Phi(f) = f'$. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
(3) Ecrire la matrice A de Φ relativement à la base B.
(4) (Optionel) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Indication : on pourra écrire $A = -I_3 + N$)

Exercice 4.
Soient $P_1 = X^2 - 1$, $P_2 = X(X - 1)$ et $P_3 = X(X + 1)$

(1) Montrer que $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(2) Ecrire la matrice P de changement de base de la base canonique vers $\mathcal{B}'$.
(3) Calculer P^{-1}.
(4) Soit l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\phi(P) = P(0)X^2 + P(1)X + P(2)$. Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique
(5) Ecrire la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$.

2. Elements propres

Exercice 5. Soit λ une valeur propre de $f : E \to F$

(1) $k \in \mathbb{N}$. Montrer que λ^k est valeur propre de f^k.
(2) Si de plus f est inversible, montrer que λ^k est valeur propre de f^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. On considère l'application $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ définie par $\Phi(P) = P(X+1) - P'$. (**Attention** aux notations $P(X+1) \neq P \times (X+1)$)

(1) En considérant le terme de plus haut degré de $\Phi(P)$, montrer que la seule valeur propre de Φ est 1.
(2) En considérant les trois termes de plus haut degré de $\Phi(P)$, montrer qu'un vecteur propre ne peut pas être de degré supérieur ou égal à 2.
(3) En déduire les éléments propres de Φ.

Exercice 7.

(1) Soit l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P) = XP'$. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.
(2) Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}$, chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ_a définie par $\phi_a(P) = (X-a)P'$.

Exercice 8. On considère l'application $\theta : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ défini par $\theta(P) = P(2-X)$

(1) Montrer que si λ est valeur propre de θ, alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
(2) Montrer que les éléments de la forme $(X-1)^{2k}$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre 1.
(3) Montrer que les éléments de la forme $(X^2-1)^{2j+1}$ avec $j \in \mathbb{N}$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre -1.
(4) En déduire la forme de tous les éléments propre de θ

Exercice 9.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que:

- $a_{ij} > 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

(1) Montrer que 1 est valeur propre de A.
(2) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 10. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_M(X) = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M)I_2$.

Exercice 11. Soit $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice. Déterminer géométriquement les vecteurs propres et les valeurs propres de S. En déduire la trace et le déterminant de S.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

(1) Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

(2) Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$.

(3) Calculer χ_M en fonction de χ_A.

---

3. Diagonalisation

Exercice 13. Soient $a, b, \theta \in \mathbb{R}$. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner les valeurs propres des matrices dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. Ces matrices sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exercice 14. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, les réduire.

Exercice 15. On considère la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & t \end{pmatrix}$ de $M_n(\mathbb{C})$.

(1) Sans calculer le polynôme caractéristique de A_t, montrer que $(t-1)$ est valeur propre.
(2) Déterminer le sous-espace propre associé.
(3) Que dire de la multiplicité de la valeur propre $(t-1)$?
(4) En déduire le spectre de A_t.
(5) A_t est-elle diagonalisable?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le polynome $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde du polynome $(X^2 - X)P$.

(1) Montrer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
(2) Déterminer le spectre de f. En déduire que f est un automorphisme.
(3) Montrer que f est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de f.
(4) Diagonaliser A.

Exercice 17. On définit la suite (u_n) par récurence de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= 5u_n - 6u_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il existe une matrice $F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$

(2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de F.
(3) Mettre F sous la forme $F = P^{-1}DP$ avec D diagonale.
(4) Calculer F^n.
(5) En déduire le terme général de la suite u_n.

Exercice 18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 2\imath+2 & 2\imath+4 & -\imath-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\imath+4 & 4\imath+8 & -\imath-4 \end{bmatrix}.$$

(1) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres etles vecteurs propres de f.
(2) Montrer qu'il existe trois endomorphismes g, h, l de $\mathbb{C}^3$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = g + \imath^n h + (-2)^n l$.
(3) Quelles sont les matrices de g, h et l dans la base canonique?

Exercice 19. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et

$$f : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(K)$.
(2) Montrer que $\mathcal{T} = \{M \in \mathcal{M}_n(K) : \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathrm{Vect}(A)$ sont des sous-espaces propres de f.
(3) En déduire que f est diagonalisable et donner la matrice de f dans une base formée de vecteurs propres.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0$.

(1) Déterminer le spectre de f. En déduire que si $f \neq 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
(2) On suppose $f \neq 0$. Soit $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$, tel que $f^r = 0$ et $f^{r-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{r-1}(x) \neq 0$.
(3) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ est libre.
(4) Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$. Montrer que F est stable par f.
(5) Soit u l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de u dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$.

Exercice 21. Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

(1) Calculer M^2. En déduire un polynôme annulateur de M.
(2) M est-elle diagonalisable?
(3) Diagonaliser M.