Liste de potentielles questions de cours

1 Définitions à connaître

(1) Espace vectoriel

(2) Sous-espace vectoriel

(3) Famille libre, génératrice, base

(4) Coordonnées d'un vecteur dans une base

(5) Application linéaire

(6) Matrice d'une application linéaire

(7) Somme directe, espaces supplémentaires

(8) Noyau et image d'une application linéaire

(9) Produit de matrices

(10) Matrices de changement de base

(11) Matrices semblables

(12) Valeur propre, vecteur propre

(13) Espace propre

(14) Polynôme caractéristique

(15) Matrice ou endomorphisme diagonalisable

(16) Matrice ou endomorphisme trigonalisable

(17) Groupe des permutations, cycle, transposition, support d'une permutation

(18) Signature d'une permutation

(19) Déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs

(20) Trace d'un endomorphisme

(21) Polynômes d'endomorphismes ou polynômes de matrices

(22) (*) Formes n-linéaires alternées

(23) (*) Comatrice

(24) (*) Sous-espaces caractéristiques

(*) : non traité par un des groupes, donc pas au programme de l'examen

2 Résultats ou techniques à connaître

(1) Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels

(2) Théorème du rang

(3) Pivot de Gauss pour calculer le déterminant ou l'inverse d'une matrice

(4) Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints

(5) Equivalence des différentes définitions du déterminant (formule avec les permutations, (*) forme n-linéaire alternée, Pivot de Gauss)

(6) Critère d'inversibilité d'une matrice avec le déterminant

(7) Caractérisation d'une base ou d'un isomorphisme avec le déterminant

(8) Déterminant d'un produit, de l'inverse, de la transposée

(9) Développement par rapport à une ligne ou une colonne

(10) Caractérisations du rang

(11) Critère de trigonalisabilité

(12) Théorème de Cayley-Hamilton

(13) (*) Formule de la comatrice

(14) (*) Formule de Cramer

(15) (*) Lemme des noyaux

3 Preuves à savoir refaire

(1) Les espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont en somme directe

(2) Les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique

(3) Critères de diagonalisabilité (diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres $\Leftrightarrow$ les espaces propres sont en somme directe $\Leftrightarrow$ les multiplicités algébriques et géométriques coïncident)

(4) La signature d'un produit de permutations est égale au produit des signatures

(5) Les matrices d'un endomorphisme sont semblables

(6) Le polynôme caractéristique ou le déterminant ne dépendent pas du choix de la base

(7) Si P est un polynôme et f un endomorphisme tel que $P(f) = 0$ (on dit que P est un polynôme annulateur de f), alors les valeurs propres de f sont racines du polynôme P

(8) (*) Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires

(*) : non traité par un des groupes, donc pas au programme de l'examen