Corrigé de l'examen d'Algèbre linéaire 2

Exercice 1

1. Rappelez la définition d'une valeur propre.

Pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, une valeur propre est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ (appelé vecteur propre) vérifiant $f(x) = \lambda x$.

2. Rappelez la définition du polynôme caractéristique.

Pour un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, le polynôme caractéristique est le polynôme $\det(f - X id_E) \in \mathbb{K}[X]$.

3. Démontrez que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et P son polynôme caractéristique. On a les équivalences

$$\begin{aligned} P(\lambda) = 0 &\iff \det(f - \lambda id_E) = 0 \\ &\iff f - \lambda id_E \text{ non inversible} \\ &\iff Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\} \\ &\iff \exists x \in E \backslash \{0\}, (f - \lambda id_E)(x) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est une valeur propre de } f. \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculez sous forme factorisée le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

En retranchant la première ligne aux deux autres, nous ne changeons pas le déterminant. En utilisant ensuite la linéarité du déterminant par rapport à chacune des deux dernières lignes nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & (a-c)b \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & c-a & (a-c)b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

Puis en développant par rapport à la première colonne, nous avons $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix}$ = c-b.

Ainsi, nous avons l'égalité $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $T(M) = AM - MA$.

1. Montrez que T défini un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

L'application T est linéaire, puisque l'on a pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M, N \in M_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} T(\alpha M + N) = A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)A = &\ \alpha AM + AN - (\alpha MA + NA) \\ = &\ \alpha(AM - MA) + (AN - NA) = \alpha T(M) + T(N). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $M \in M_2(R)$, on a $AM - MA \in M_2(\mathbb{R})$ donc T définit bien une application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même. C'est donc un endomorphisme.

2. Vérifiez que les matrices I_2 et A sont des vecteurs propres de T. Déduisez-en une valeur propre de T. Que pouvez-vous dire de sa multiplicité ?

On a $T(I_2) = AI_2 - I_2A = A - A = 0$ et $T(A) = A^2 - A^2 = 0$, donc I_2 et A sont des vecteurs propres de T pour la valeur propre 0. La famille $\{I_2, A\}$ étant libre, on en déduit que l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension au moins deux, donc la multiplicité géométrique vaut au moins deux, et donc la multiplicité algébrique aussi.

3. Vérifiez que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de T.

On a $T(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T pour la valeur propre 1.

Nous vérifions de la même façon que $T(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T pour la valeur propre -1.

4. Déterminez les espaces propres de T et leur dimension.

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Ainsi, nous avons d'après les questions précédentes

$$\dim(E_{-1} \oplus E_1 \oplus E_0) = \underbrace{\dim(E_{-1})}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(E_1)}_{\geq 1} + \underbrace{\dim(E_0)}_{\geq 2} \geq 4$$

Or, $M_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4, donc les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités. Ainsi, il n'y a pas d'autres espaces propres, et nous avons $E_0 = \text{vect}\{I_2, A\}$ de dimension 2, $E_{-1} = \text{vect}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\}$ de dimension 1 et $E_1 = \text{vect}\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ de dimension 1.

5. Donnez le polynôme caractéristique de T.

Les valeurs propres sont racines du polynôme caractéristique P, et le terme dominant de ce polynôme est $(-1)^4X^4 = X^4$. Or, nous avons vu que la valeur propre 0 est de multiplicité géométrique 2, donc elle est de multiplicité algébrique au moins 2, et donc 0 est racine double de P. Ainsi nous avons

$$P(X) = X^2(X - 1)(X + 1).$$

6. L'endomorphisme T est-il trigonalisable ? Est-il diagonalisable ? Si oui, donnez une base de réduction.

Nous avons vu à la question 4 que les espaces propres sont supplémentaires. Ainsi T est diagonalisable, et la famille $B = \{I_2, A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\}$ est une base de vecteurs propres de T. Dans cette base, la matrice de T est

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme étant diagonalisable, il est aussi trigonalisable. En effet, la matrice $[T]_B$ est diagonale donc aussi triangulaire.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient $f, g, h \in E$ les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp(x), \quad g(x) = x\exp(x), \quad h(x) = x^2 \exp(x),$$

et soit $F = \text{vect}\{f, g, h\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions.

Soit D l'application $\left\{ \begin{array}{rcl} D : F & \to & F \\ u & \mapsto & u' \end{array} \right.$, où u' est la dérivée de la fonction u.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

F est un sous-espace vectoriel par définition, donc c'est un espace vectoriel. Pour montrer qu'il est de dimension 3, il suffit de montrer que la famille $\{f, g, h\}$ est une base.
C'est une famille génératrice par définition de F. Montrons que c'est une famille libre.
Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ $(*)$.

- En évaluant en $x = 0$, nous obtenons $\alpha = 0$.
- En dérivant l'égalité $(*)$, nous avons $x \mapsto \beta(x+1)e^x + \gamma(x^2+2x)e^x = x \mapsto 0$. En évaluant en $x = 0$, nous obtenons $\beta = 0$.
- En dérivant l'égalité $(*)$ deux fois, il vient $x \mapsto \gamma(x^2+4x+2)e^x = x \mapsto 0$. En évaluant en $x = 0$, il vient $2\gamma = 0$.

Ainsi la famille $\{f, g, h\}$ est libre. C'est une donc base de F. La dimension de F est donc égale au cardinal de la base, c'est-à-dire 3.

2. Montrez que l'application D définit un endomorphisme de F.

- Montrons que D est bien définie. Les fonctions f, g et h sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc toute combinaison linéaire est bien une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, D définit bien une application de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Nous savons que la dérivation est linéaire. Ainsi l'application D est bien linéaire.
- Montrons que l'image de D est inclue dans F. L'image de D est engendré par la famille $\{D(f), D(g), D(h)\}$ puisque d'après la question précédente la famille $\{f, g, h\}$ est une base de F, donc il suffit de montrer que $D(f)$, $D(g)$ et $D(h)$ sont dans F. Or on a $\forall x \in \mathbb{R}, D(f)(x) = e^x = f(x)$, $D(g)(x) = (x+1)e^x = g(x) + f(x)$ et $D(h)(x) = (x^2+2x)e^x = h(x) + 2g(x)$. Donc $D(f) = f, D(g) = f + g$, et $D(h) = h + 2g$ sont des éléments de F. L'application D définit donc bien un endomorphisme de F.

3. Ecrivez la matrice de D dans une base.

Nous avons $D(f) = f, D(g) = f + g$, et $D(h) = h + 2g$, donc

$$[D]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $B = (f, g, h)$.

4. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ? Est-il trigonalisable ?

L'endomorphisme D est trigonalisable puisque la matrice de D dans base $B = (f, g, h)$ est triangulaire. La matrice triangulaire de D obtenue à la question précédente permet également de voir que 1 est l'unique valeur propre de D. Or, la matrice $[D]_B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang au moins 2 (en fait exactement 2) puisque la sous-matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible. On en déduit que

$$\dim(E_1) = 3 - \operatorname{rang}([D]_B - I_3) \leq 1 < m_{\text{alg}}(1) = 3,$$

donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 5

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrez que A est diagonalisable, et donnez une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Nous remarquons que 1 est une valeur propre évidente puisque $A - I_3$ est une matrice non inversible. Nous voyons de plus que $A - I_3$ est une matrice de rang 1 puisque c'est une matrice non nulle dont toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première. D'après le théorème du rang, nous avons donc $\dim(E_1) = 3 - \operatorname{rang}(A - I_2) = 2$.
Il ne reste donc plus qu'à trouver la dernière valeur propre (éventuellement confondue avec celle que l'on a déjà). Pour cela, nous savons que la trace, qui est la somme des coefficients diagonaux de la matrice A, est aussi égale à la somme des valeurs propres (avec multiplicités algébriques). Ici la trace vaut $6 = 1 + 1 + \lambda$ où λ est la dernière valeur propre cherchée. Nous obtenons donc la valeur propre $\lambda = 4$. Nous pouvons vérifier que 4 est bien une valeur propre, puisque la matrice $A - 4I_3$ n'est pas inversible : en effet, la somme de ses colonnes est nulle. Nous en déduisons que $E_4 = \operatorname{vect}\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. La somme des dimensions des espaces propres vaut 3, donc la matrice est bien diagonalisable.
Nous avons ensuite $E_1 = \{\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} | x + y + z = 0\} = \operatorname{vect}\{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\}$.
Ainsi, la famille de vecteurs $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La matrice P est bien inversible, et nous pouvons le vérifier :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-1 - 1) = 3 \neq 0$$

en développant par rapport à la première ligne.

2. Déduisez-en A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, où P est la matrice trouvée à la question précédente.
Calculons P^{-1}. Pour cela on peut par exemple utiliser la formule de la comatrice :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t\mathrm{com}(P)$$

où

$$\mathrm{com}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la comatrice de P. Nous obtenons donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$