

Devoir à la maison

à rendre le
vendredi 21 octobre 2016

Exercice I. Soit $M_2(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans \mathbb{C} . Soient $x \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 2-x & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. On définit une application f par

$$\begin{aligned} f : M_2(\mathbb{C}) &\rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned} .$$

1. Montrez que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$.
2. Soit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$. Vérifiez que B est une base de $M_2(\mathbb{C})$.
3. Calculez la matrice C de l'endomorphisme f dans la base B .
4. Calculez le polynôme caractéristique χ_f de f , et montrer que l'on a $\chi_f = (\chi_A)^2$, où χ_A est le polynôme caractéristique de la matrice A .
5. Le polynôme caractéristique χ_f est-il scindé? est-il à racines simples?
6. Déterminer le spectre de f .
7. Déterminer les espaces propres de f .
8. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?