Année universitaire 2016-2017

Site : ☐Luminy ☒St-Charles ☐St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme :
Code Apogée du module : Libellé du module : Algèbre linéaire 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Algèbre linéaire 2

Examen

Calculatrice, portable et documents non autorisés Durée : 2 heures

Les cinq exercices sont indépendants. Le barême est indicatif.

Lire toutes les questions avant de commencer. On justifiera les réponses.

Exercice 1 (5 pts)

1. Rappelez la définition d'une valeur propre.
2. Rappelez la définition du polynôme caractéristique.
3. Démontrez que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Exercice 2 (1,5 pts)

Calculez sous forme factorisée le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (8 pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $T : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad T(M) = AM - MA.$$

1. Montrez que T définit un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.
2. Vérifiez que les matrices I_2 et A sont des vecteurs propres de T. Déduisez-en une valeur propre de T. Que pouvez-vous dire de sa multiplicité ?
3. Vérifiez que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de T.
4. Déterminez les espaces propres de T et leur dimension.
5. Donnez le polynôme caractéristique de T.

6. L'endomorphisme T est-il trigonalisable ? Est-il diagonalisable ? Si oui, donnez une base de réduction.

Exercice 4 (5,5 pts)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient $f, g, h \in E$ les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \exp(x), \quad g(x) = x\exp(x), \quad h(x) = x^2\exp(x),$$

et soit $F = \text{vect}\{f, g, h\}$ le sous-espace vectoriel de E engendré par ces trois fonctions. Soit D l'application $\left\{ \begin{array}{rcl} D : F & \to & F \\ u & \mapsto & u' \end{array} \right.$, où u' est la dérivée de la fonction u.

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
2. Montrez que l'application D définit un endomorphisme de F.
3. Ecrivez la matrice de D dans une base.
4. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ? Est-il trigonalisable ?

Exercice 5 (exercice bonus, 3 pts)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrez que A est diagonalisable, et donnez une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.
2. Déduisez-en A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.